Formule de Stirling via le TCL

Perrine Jouteur

Ce développement est assez technique, mais je trouve qu'il vaut le coup puisqu'il couvre la plupart des leçons de probabilité : 261, 262 et 266. En argumentant un peu, on peut même le faire passer dans la leçon 235 (je décline toute responsabilité en cas de contestation du jury pour ce recasage limite). On pourra trouver les grandes lignes du développement dans le livre *Calcul des probabilités* de Foata et Fuchs.

On a besoin des résultats suivants :
- La convergence ponctuelle des fonctions de répartition caractérise la convergence en loi.
- Une loi Gamma de paramètres $(p, 1)$ est une somme de p lois iid exponentielles de paramètre 1.

Théorème 0.1 Soit $(X_p)_p$ une suite de variables aléatoires telles que $X_p \sim \Gamma(p+1, 1)$. Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) La suite $(\frac{1}{\sqrt{p}}(X_p - p))_p$ converge en loi vers une gaussienne centrée réduite

(ii) $\Gamma(p+1) = p! \sim_{+\infty} p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p}$ (formule de Stirling)

De plus, ces deux propositions sont vraies.

Démonstration
Commençons par montrer l'équivalence annoncée. On note f_p la densité de X_p, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p+1)} e^{-x} x^p \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

De plus, on note g_p la densité de la variable normalisée $\dfrac{X_p - p}{\sqrt{p}}$. On a

$$g_p(x) = \frac{\sqrt{p}}{\Gamma(p+1)} e^{-\sqrt{p}x - p} (\sqrt{p}x + p)^p 1_{\mathbb{R}^+}(\sqrt{p}x + p).$$

On va utiliser le fait que la convergence ponctuelle des fonctions de répartitions caractérise la convergence en loi. Pour cela, fixons $x \in \mathbb{R}$, et exprimons la fonction de répartition au point x de $\dfrac{X_p - p}{\sqrt{p}}$, pour p assez grand (i.e. p tel que $\sqrt{p}x + p > 0$) :

$$\begin{aligned} F_p(x) &= \int_{-\infty}^{x} g_p(u)du \\ &= \int_{-\sqrt{p}}^{x} \frac{\sqrt{p}}{\Gamma(p+1)} e^{-\sqrt{p}u - p} (\sqrt{p}u + p)^p du \\ &= \frac{p^p \sqrt{p} e^{-p}}{\Gamma(p+1)} \int_{-\sqrt{p}}^{x} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{p}}\right)^p e^{-\sqrt{p}u} du. \end{aligned}$$

■

Il suffit à présent d'étudier le comportement de l'intégrale pour pouvoir conclure : en effet, si cette intégrale converge vers une quantité adéquate, alors la convergence de $F_p(x)$ ne dépendra que du comportement asymptotique de $\dfrac{p^p e^{-p}\sqrt{p}}{p!}$, d'où on déduira l'équivalence promise.
On va montrer que

$$\int_{-\sqrt{p}}^{x} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{p}}\right)^p e^{-\sqrt{p}u} du \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du. \quad (*)$$

Pour cela, on veut appliquer le théorème de convergence dominée. Regardons donc déjà la convergence simple : par un calcul de petitto, ok.
Reste à avoir la domination. On va montrer que pour tout $u \in]-\infty, x[$, pour tout p tel que $\sqrt{p} > x$, on a

$$\left| 1_{]-\sqrt{p},x[}(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{p}}\right)^p e^{-\sqrt{p}u} \right| \leqslant 1_{]-\infty,x[}(u) e^{-u^2/4}. \quad (**)$$

Cela permettra d'appliquer le théorème de convergence dominée, car $u \mapsto e^{-u^2/4}$ est intégrable sur $]-\infty, x[$. Pour avoir cette majoration, on remarque déjà que si $u \leq -\sqrt{p}$, c'est bon. On est donc amené à étudier le cas où $-\sqrt{p} < u < x$, que l'on va traiter via une étude de fonction. Posons

$$\begin{array}{rccc} h: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t - \dfrac{t^2}{4} - \ln(1+t) \end{array}.$$

Pourquoi une telle fonction ? Parce qu'en posant $t := \frac{u}{\sqrt{p}}$, l'inégalité $(**)$ équivaut à $\ln(1+t) - t \leqslant \frac{t^2}{4}$, c'est-à-dire à $h \geqslant 0$ sur $]-1,1[$.
La fonction h est dérivable, et on a, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$h'(t) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{2}\frac{2(t+1) - t(t+1) - 2}{t+1} = \frac{t(1-t)}{2(1+t)}.$$

Ainsi on peut tracer le tableau de variation de h, et conclure que h est bien positive sur $]-1,1[$.
Tout ceci nous donne finalement la convergence $(*)$. Mais alors, il est facile d'obtenir l'équivalence entre les deux propositions du théorème ! En effet, si le point (ii) est vrai, alors d'après nos calculs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_p(x) \underset{p \mapsto +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

et donc la suite des fonctions de répartition des variables $\frac{X_p - p}{\sqrt{p}}$ converge ponctuellement vers la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, ce qui revient à dire que cette suite de variables normalisées converge en loi vers une gaussienne centrée réduite.
Inversement, si la suite de variables aléatoires converge vers une gaussienne centrée réduite, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_p(x) \underset{p \mapsto +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \neq 0,$$

et donc la quantité $\frac{p^p \sqrt{p} e^{-p}}{\Gamma(p+1)}$ converge, vers 1, ce qui est l'énoncé du point (ii).

On a ainsi ramené la formule de Stirling à une convergence de loi vers une gaussienne. Or on dispose d'un outil puissant pour démontrer ce genre de convergences : le théorème central limite ! Pour l'appliquer, on remarque que pour tout p, la variable X_p a la même loi qu'une somme de variables exponentielles iid de paramètre 1, ce qui correspond aux hypothèses du TCL (à savoir énoncer et expliquer le jour J). Donc la proposition (i) est vraie, et par conséquent la formule de Stirling aussi. ■