

# Liste de développements

Perrine Jouteur

## Développements

### B

- Algorithme du gradient à pas optimal** Leçons 219, (223), 226, 229, 253. Référence : Ciarlet et Bernis. 5, 8–10
- Caractérisation d'une loi par ses moments** Leçons 241, 243, 261, 262. Référence : développement de Thomas Cavallazi. Remarque : c'est quasi le même développement que le problème des moments de Hamburger. 9, 10
- Connexité d'un ensemble de Julia** Leçons 204, 219, 223, 226. Référence : Oaux X ENS analyse 3, page 115.. 7, 8
- Développement eulérien** Leçons 230. Références : Garet-Kurtzmann. 4, 9
- Diagonalisation des opérateurs autoadjoints compacts** Leçons 203, 213. Référence : Brézis et Hirsh-Lacombe. 7
- Équation de Schrodinger : solution élémentaire** Leçons 222, 228, 239, 250. Référence : Bony, Golse. 8–10
- Espace de Bergman** Leçons 201, 205, 208, 213, 234, 245. Référence : Bernis Bernis. 7, 9
- Fonction génératrice** Leçons 230, 243, 264. Références : Foata-Fuchs ou Candelpergher. 9, 10
- Formule de Stirling via le TCL** Leçons (235), 261, 262, 266. Référence : Foata et Fuchs. 8, 10
- Formule des compléments** Leçons 235, 236, 239, 245. Référence : Amar Matheron. 9, 10
- Inégalité isopérimétrique** Leçons 219, 236, 246, 267. Référence : Testard. 8–10
- Intégrale de Fresnel et transformée de Fourier de gaussienne complexe** Leçons 235, 250. Référence : Gourdon. 9, 10
- Minimisation d'une fonctionnelle convexe** Leçons 203, 205, 208, 213, 219, 229, 253. Référence : Ciarlet. 7–10
- Non-existence de mesure équirépartie sur  $\mathbb{N}$**  Leçons 262, 264, 266. Référence : Zavidovique et Garet-Kurtzman. 10
- Problème des moments de Hamburger** Leçons 241, 243, 261. Référence : développements de Antoine Diez. 9, 10
- Prolongement de la fonction  $\Gamma$**  Leçons 207. 10
- Prolongement de la fonction zêta** Leçons 207, 235, 239, 245, 265. Référence : Amar-Matheron. 7, 9, 10
- Représentation des fonctions lipschitziennes** Leçons 201, 205, 207, 208, 228, 234. Référence : développement de Thomas Cavallazi. 7–9
- Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier** Leçons 209, 213, 241, . 7–10
- Sous-espaces de dimension finie de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  stables par translation** Leçons 151, 154, 159, 201, 220, 221, 228. Référence : Oaux X ENS algèbre 1. 5–8
- Stabilité des systèmes newtoniens** Leçons 220, 221. Références : Bernis Bernis et Arnold. 8
- Théorème de Féjer** Leçons 209, 246. Référence : Zuily-Queffélec. 7, 10
- Théorème de Runge** Leçons 209. Référence : Queffélec topologie. 7, 9
- Trajectoire à trois rebonds dans un billard** Leçons 203, 215, 219. Référence : Rouvière. 7, 8

### G

- Algorithme de factorisation de Cantor-Zassenhaus** Leçons 123, 141, 142. Références : Cohen ou Demazure. 4
- Conique passant par cinq points** Leçons 152, 162, 171, 181, 191. Références : Eiden (cf Thomas Cavallazi). 5, 6
- Décomposition de Dunford constructive** Leçons 153, 155, 156, 157. Référence : NH2G2 tome 1 page 162. 5
- Étude du groupe  $O(p, q)$**  Leçons 106, 150, 156, 158, 160, 170, 171. Référence : NH2G2. 3, 5, 6
- Groupes d'isométries des solides de Platon** Leçons 101, 104, 105, 106, 161, (170), 190 (pour le coloriage). Références : ?. 3, 6
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques** Leçons 102, 125, 141, 144. Référence : Perrin. 3–5
- Lemme de Morse** Leçons 170, 171, 214, 215. Référence : Bernis. 6, 8
- Loi de réciprocity quadratique, version résultants** Leçons 120, 121, 123, 126, 140, 142, 144, 152. Référence : Mérindol. 4, 5
- Matrices diagonalisables sur un corps fini** Leçons 154, 155, 190. Référence : Carnet de Voyage en Algèbre. 3–6
- Méthode QR** Leçons 149, 162, 226. Référence : Ciarlet. 5, 6, 8
- Nombres premiers de la forme  $x^2 + 3y^2$**  Leçons 121, 122, 126. Références : Carnet de Voyage en Algèbre. 4
- Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$**  Leçons 158, 160, 161, 181. Référence : FGN algèbre tome 3 page 130. 6
- Polygones constructibles à la règle et au compas** Leçons 102, 121, 125, (144), 191. Références : Gozard, ou Lavigne pour un exposé calibré. 3–6
- Produit d'ordre arbitraire dans un groupe fini** Leçons 104. 3
- Réduction de Frobenius** Leçons 101, 122, 151, 153, 154, 155, 159. Référence : Roudier ou Gourdon. 3–6
- Sous-groupes de Frattini des  $p$ -groupes** Leçons 101, 103, 104, 108, 151 Référence : Zavidovique. 3–5
- Sous-groupes distingués de  $GL(E)$**  Leçons 103, 106, 108. Référence : Orthiz. 3
- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$**  Leçons 101, 104, 160. Référence : Delcourt. 3, 6
- Test de non primalité de Solovay-Strassen** Leçons 120, 121, 123, 190. Références : Demazure ou Cohen. 4, 6
- Théorème de Brauer** (Permutations conjuguées). Leçons 101, 105, 108, (142). Référence : Objectif agrégation page 321. 3, 4, 6
- Théorème de Burnside** Leçon 157. Références : FGN. 6
- Théorème des restes chinois et application à la résolution de systèmes** Leçons 120, 122, 126, 142.. 4

# Algèbre

(35 leçons, 21 développements nécessaires)

## Leçon 101 : Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Officiel :

- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$
- Sous-groupes de Frattini des  $p$ -groupes

Autres :

- Théorème de Brauer
- Réduction de Frobenius
- Matrices diagonalisables sur un corps fini

## Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Application.

Officiels :

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques
- Polygones constructibles à la règle et au compas

## Leçon 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Officiels :

- Sous-groupes de Frattini des  $p$ -groupes
- Sous-groupes distingués de  $GL(E)$

Autres :

- Théorème de Brauer

## Leçon 104 : Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

Officiels :

- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$
- Sous-groupes de Frattini des  $p$ -groupes

Autres :

- Produit d'ordre arbitraire dans un groupe fini

## Leçon 105 : Groupes des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Officiels :

- Groupes d'isométries des solides de Platon
- Théorème de Brauer

## Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $GL(E)$ . Applications.

Officiels :

- Étude du groupe  $O(p, q)$
- Sous-groupes distingués de  $GL(E)$

Autres :

- Matrices diagonalisables sur un corps fini
- Produit d'ordre arbitraire dans un groupe fini
- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$

## Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Officiels :

- Sous-groupes distingués de  $GL(E)$
- Sous-groupes de Frattini des  $p$ -groupes

Autres :

- Théorème de Brauer

## Leçon 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.

Officiels :

- Test de non primalité de Solovay-Strassen
- Théorème des restes chinois et application à la résolution de systèmes

Autres :

- Algorithme de factorisation de Cantor-Zassenhaus
- Loi de réciprocité quadratique, version résultants

### **Leçon 121 : Nombres premiers. Applications.**

Officiels :

- Test de non primalité de Solovay-Strassen
- Développement eulérien

Autres :

- Loi de réciprocité quadratique, version résultants
- (Sous-groupes de Frattini des  $p$ -groupes)
- Polygones constructibles à la règle et au compas
- Nombres premiers de la forme  $x^2 + 3y^2$

### **Leçon 122 : Anneaux principaux. Applications.**

Officiels :

- Théorème des restes chinois et application à la résolution de systèmes
- Nombres premiers de la forme  $x^2 + 3y^2$

Autres :

- Réduction de Frobenius

### **Leçon 123 : Corps finis. Applications.**

Officiels :

- Loi de réciprocité quadratique, version résultants
- Test de non primalité de Solovay-Strassen
- Algorithme de factorisation de Cantor-Zassenhaus

Autres :

- Matrices diagonalisables sur un corps fini

### **Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.**

Officiels :

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques
- Polygones constructibles à la règle et au compas

### **Leçon 126 : Exemples d'équations en arithmétique.**

Officiels :

- Loi de réciprocité quadratique, version résultants
- Nombres premiers de la forme  $x^2 + 3y^2$

Autres :

- Théorème des restes chinois et application à la résolution de systèmes

### **Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**

Officiels :

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques
- Algorithme de factorisation de Cantor-Zassenhaus

Autres :

- (Loi de réciprocité quadratique, version résultants)

### **Leçon 142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calculs. Exemples et applications.**

Officiels :

- Algorithme de factorisation de Cantor-Zassenhaus
- Théorème des restes chinois et application à la résolution de systèmes

Autres :

- (Théorème de Brauer)

**Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**

Officiels :

- Loi de réciprocité quadratique, version résultants
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

Autres :

- (Polygones constructibles à la règle et au compas)

**Leçon 149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.**

- Méthode QR
- Algorithme du gradient à pas optimal

**Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.**

- Réduction de Frobenius
- Matrices diagonalisables sur un corps fini
- Étude du groupe  $O(p, q)$

**Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.**

Officiels :

- Sous-espaces de dimension finie de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  stables par translation
- Sous-groupes de Frattini des  $p$ -groupes

Autres :

- Réduction de Frobenius

**Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.**

Officiels :

- Loi de réciprocité quadratique, version résultants
- Conique passant par cinq points

**Leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**

Officiels :

- Décomposition de Dunford constructive
- Réduction de Frobenius

Autres :

- Matrices diagonalisables sur un corps fini

**Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**

- Matrices diagonalisables sur un corps fini
- Réduction de Frobenius

**Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**

Officiels :

- Matrices diagonalisables sur un corps fini
- Décomposition de Dunford constructive

Autres :

- Réduction de Frobenius

**Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.**

- Décomposition de Dunford constructive
- Étude du groupe  $O(p, q)$

**Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**

- Décomposition de Dunford constructive

- Théorème de Burnside

**Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**

- Étude du groupe  $O(p, q)$
- Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$

**Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.**

- Réduction de Frobenius
- Sous-espaces de dimension finie de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  stables par translation

**Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.**

- Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$
- Étude du groupe  $O(p, q)$

Autres :

- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$

**Leçon 161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.**

- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$  ou Groupes d'isométries des solides de Platon
- Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$

**Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires : opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**

- Méthode QR
- Conique passant par cinq points

**Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.**

- Étude du groupe  $O(p, q)$
- Lemme de Morse

**Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**

Officiels :

- Étude du groupe  $O(p, q)$
- Conique passant par cinq points

Autres :

- Lemme de Morse

**Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.**

Officiels :

- Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$
- Conique passant par cinq points

**Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**

- Matrices diagonalisables sur un corps fini
- Théorème de Brauer

Autres :

- Sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$
- Test de non primalité de Solovay-Strassen

**Leçon 191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.**

- Groupes d'isométries des solides de Platon
- Conique passant par cinq points
- Polygones constructibles à la règle et au compas

# Analyse

(35 leçons, environ 20 développements nécessaires)

## Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Officiel :

- Représentation des fonctions lipschitziennes
- Espace de Bergman

Autres :

- Sous-espaces de dimension finie de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  stables par translation

## Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Officiel :

- Trajectoire à trois rebonds dans un billard
- Théorème de Runge

Autres :

- Diagonalisation des opérateurs autoadjoints compacts
- Minimisation d'une fonctionnelle convexe

## Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications.

Officiel :

- Connexité d'un ensemble de Julia
- Théorème de Runge

## Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Officiel :

- Représentation des fonctions lipschitziennes
- Espace de Bergman

Autres :

- Minimisation d'une fonctionnelle convexe

## Leçon 207 : Prolongements de fonctions. Exemples et applications.

Officiel :

- Prolongement de la fonction zêta
- Représentation des fonctions lipschitziennes

## Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Officiel :

- Représentation des fonctions lipschitziennes
- Espace de Bergman

Autres :

- Minimisation d'une fonctionnelle convexe

## Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Officiel :

- Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier
- Théorème de Runge

Autres :

- Théorème de Féjer

## Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Officiel :

- Espace de Bergman
- Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier

Autres :

- Diagonalisation des opérateurs autoadjoints compacts
- Minimisation d'une fonctionnelle convexe

**Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.**

Officiel :

- Lemme de Morse
- Trajectoire à trois rebonds dans un billard

**Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.**

Officiel :

- Trajectoire à trois rebonds dans un billard
- Lemme de Morse

**Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemple et applications.**

Officiel :

- Trajectoire à trois rebonds dans un billard
- Minimisation d'une fonctionnelle convexe

Autres :

- Connexité d'un ensemble de Julia
- Inégalité isopérimétrique

**Leçon 220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.**

Officiels :

- Sous-espaces de dimension finie de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  stables par translation
- Stabilité des systèmes newtoniens

**Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.**

- Sous-espaces de dimension finie de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  stables par translation
- Stabilité des systèmes newtoniens (adapter en linéarisant)

**Leçon 222 : Exemples d'études d'équations différentielles linéaires et d'équations aux dérivées partielles linéaires.**

Officiels :

- Équation de Schrodinger : solution élémentaire
- Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier

**Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**

- Connexité d'un ensemble de Julia
- Formule de Stirling via le TCL

**Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par la relations de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.**

Officiel :

- Méthode QR
- Connexité d'un ensemble de Julia

Autres :

- Algorithme du gradient à pas optimal

**Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.**

Officiel :

- Représentation des fonctions lipschitziennes
- Sous-espaces de dimension finie de  $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  stables par translation

Autres :

- Équation de Schrodinger : solution élémentaire



**Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**

- Algorithme du gradient à pas optimal
- Minimisation d'une fonctionnelle convexe

**Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**

- Fonction génératrice
- Développement eulérien

**Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**

Officiel :

- Représentation des fonctions lipschitziennes
- Espace de Bergman

**Leçon 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.**

Officiel :

- Intégrale de Fresnel et transformée de Fourier de gaussienne complexe
- Formule des compléments
- Équation de Schrodinger : solution élémentaire
- Prolongement de la fonction zêta

**Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrale de fonction d'une ou plusieurs variables.**

Officiel :

- Formule des compléments
- Inégalité isopérimétrique

Autres :

- Intégrale de Fresnel et transformée de Fourier de gaussienne complexe

**Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**

Officiel :

- Formule des compléments
- Équation de Schrodinger : solution élémentaire

Autres :

- Intégrale de Fresnel et transformée de Fourier de gaussienne complexe

**Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**

Officiels :

- Théorème de Runge
- Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier

Autres :

- Problème des moments de Hamburger ou Caractérisation d'une loi par ses moments

**Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**

- Théorème de Runge
- Espace de Bergman
- Fonction génératrice

**Leçon 245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.**

Officiels :

- Théorème de Runge
- Formule des compléments
- Prolongement de la fonction zêta

Autres :

- Espace de Bergman

**Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.**

Officiels :

- Inégalité isopérimétrique
- Résolution de l'équation de la chaleur par les séries de Fourier

Autres :

- Théorème de Féjer

**Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.**

Officiels :

- Équation de Schrodinger : solution élémentaire
- Intégrale de Fresnel et transformée de Fourier de gaussienne complexe

**Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.**

Officiels :

- Algorithme du gradient à pas optimal
- Minimisation d'une fonctionnelle convexe

**Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.**

Officiels :

- Caractérisation d'une loi par ses moments (ou Problème des moments de Hamburger)
- Formule de Stirling via le TCL
- Fonction génératrice

**Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.**

Officiels :

- Non-existence de mesure équirépartie sur  $\mathbb{N}$
- Formule de Stirling via le TCL

**Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

Officiels :

- Non-existence de mesure équirépartie sur  $\mathbb{N}$
- Fonction génératrice

**Leçon 265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.**

Officiels :

- Formule des compléments
- Prolongement de la fonction zêta

Autres :

- Prolongement de la fonction  $\Gamma$

**Leçon 266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilité.**

Officiels :

- Formule de Stirling via le TCL
- Non-existence de mesure équirépartie sur  $\mathbb{N}$

**Leçon 267 : Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.**

Officiels :

- Inégalité isopérimétrique
- Formule des compléments