

Séries de Fourier. Exemples et applications.
(Leçon 246)

Perrine Jouteur

Table des matières

1	Un morphisme d'algèbres	3
1.1	Coefficients de Fourier	3
1.2	Influence de la régularité de la fonction	3
2	Le cas des fonctions continues et C^1 par morceaux	6
3	Convergences dans le cas général	8
3.1	Noyaux trigonométriques	8
3.2	Le théorème de Fejér généralisé	10
3.3	Le théorème de Dirichlet	12
4	Application à la résolution d'équations différentielles	13
4.1	Équations différentielles ordinaires	13
4.2	Équations aux dérivées partielles	14

Introduction

Motivations et repères historiques

Les séries de Fourier doivent leur nom au mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830), qui a utilisé des séries trigonométriques pour résoudre l'équation de diffusion de la chaleur, exposant sa théorie dans un traité publié en 1822. L'idée est de décomposer des fonctions périodiques en somme de fonctions trigonométriques (sinus et cosinus), pour pouvoir traiter morceau par morceau chaque composante de la somme. Cependant, dans ce traité, Fourier éluda la difficulté principale de la théorie, qui consiste à retrouver la fonction d'origine à partir de la somme des composantes. Ce problème a progressivement été résolu au cours des XIX^{ème} et XX^{ème} siècles, notamment grâce aux progrès de la théorie de l'intégration. Ainsi Dirichlet, Jordan, Riemann, Fejér, Cantor, etc... affinèrent et consolidèrent tour à tour la théorie. De nos jours, la recherche a élargi le champ d'étude en s'intéressant à l'analyse de Fourier sur des groupes non commutatifs.

Pour plus de détails, on pourra consulter les pages Wikipédia des sujets en question, dans leur version française ou anglaise [Wik].

Notations et références

Pour rédiger ce mémoire, j'ai principalement suivi le livre d'analyse de Fourier de El Amrani [Amr08], en m'appuyant également sur les ouvrages de Candelpergher [Can09], Monier [Mon13] et Queffélec-Zuily [HQ13].

Dans le cadre des séries de Fourier, on considère des fonctions périodiques, en convenant ici que la période vaut 2π . Ainsi, on note $C_{2\pi}^k$ l'ensemble des fonctions de classe C^k et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . On notera également C_{pm}^1 l'ensemble des fonctions de classe C^1 par morceaux de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . De même, pour toute fonction mesurable et 2π -périodique f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , on définit sa norme p comme

$$\|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt.$$

Ainsi $L_{2\pi}^p$ désignera l'ensemble des classes d'équivalences, pour la relation "être égales presque partout", de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , mesurables, dont un représentant est presque partout 2π -périodique, et dont la norme p est finie. En particulier, l'espace $L_{2\pi}^2$ peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert, avec le produit scalaire hermitien

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

On remarquera que le segment $[0, 2\pi]$ étant de mesure finie, si $p \leq q$ alors $L_{2\pi}^q \subset L_{2\pi}^p$.

On définit aussi le produit de convolution de deux fonctions intégrables et 2π -périodiques comme

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x)g(t) dt.$$

Remarquons que par théorème de changement de variables, si f et g sont dans $L_{2\pi}^1$, on a $f * g = f * f$. De plus, par théorème de Fubini, le produit de convolution $f * g$ est encore dans $L_{2\pi}^1$. Ainsi l'espace $(L_{2\pi}^1, +, *)$ est une \mathbb{C} -algèbre commutative.

1 Un morphisme d'algèbres

Dans cette première partie, on associe à des fonctions intégrables une suite de coefficients, appelés coefficients de Fourier. On montre que cela permet de construire un morphisme d'algèbres entre l'espace $L^1_{2\pi}$ et l'espace $c_0(\mathbb{N})$ des suites qui convergent vers 0.

1.1 Coefficients de Fourier

Notation 1.1 Soit $n \in \mathbb{Z}$. On notera e_n la fonction $x \mapsto e^{inx}$. Cette fonction est mesurable et 2π -périodique.

Définition 1.2 Coefficients de Fourier.

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Pour tout entier relatif n , on définit le n -ième coefficient de Fourier de f par la formule suivante :

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e_n(-t)dt.$$

Remarquons que si f est dans $L^2_{2\pi}$, alors $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Définition 1.3 Série de Fourier.

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. La série de Fourier de f est la série $\sum c_n(f)e_n$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on notera $S_N(f)$ la N -ième somme partielle de cette série, c'est-à-dire $S_N(f) =$

$$\sum_{n=-N}^N c_n(f)e_n.$$

Exemple 1.4 Si f est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire que $f = \sum_{n=-k}^k a_n e_n$, alors pour tout $n \in \llbracket -k, k \rrbracket$, on a $c_n(f) = a_n$, et pour $|n| > k$, on a $c_n(f) = 0$. Ainsi la série de fonctions $\sum c_n(f)e_n$ (qui est en fait finie) coïncide avec f .

La théorie des séries de Fourier cherche à généraliser cette écriture pour des fonctions plus compliquées que les polynômes trigonométriques. Après avoir donné un certain nombre de propriétés immédiates des coefficients de Fourier, on étudiera dans le deuxième paragraphe le comportement asymptotique des coefficients de Fourier, dans l'espoir de donner un sens à la somme de la série de Fourier d'une fonction.

Proposition 1.5 Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $g \in L^\infty_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$ et $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$. Les coefficients de Fourier vérifient les relations suivantes :

1. $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ où $\check{f} : x \mapsto f(-x)$;
2. $c_n(\bar{f}) = \overline{c_n(f)}$;
3. $c_n(\tau_a f) = e_n(-a)c_n(f)$ avec $\tau_a f : x \mapsto f(x - a)$;
4. $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)e_n$;
5. $f * e_n = c_n(f)e_n$;
6. $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$;
7. Pour tout $h \in L^1_{2\pi}$, $c_n(f * h) = c_n(f)c_n(h)$.

1.2 Influence de la régularité de la fonction

Les coefficients de Fourier d'une fonction f sont d'autant plus faciles à manipuler que la fonction est régulière. La régularité est ici entendue au sens large, on considère par exemple que des propriétés de parité ou d'intégrabilité ajoutent à la régularité d'une fonction.

Proposition 1.6 Soit $f \in L^1_{2\pi}$.

- Si f est paire, alors

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt)f(t)dt.$$

De plus, on mettra dans ce cas la série de Fourier de f sous la forme $\sum_{n \geq 0} a_n(f) \cos(nx)$, avec

$$a_n(f) := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt)dt.$$

• De même, si f est impaire, alors

$$c_n(f) = \frac{1}{i\pi} \int_0^\pi \sin(nt) f(t) dt.$$

On met ici la série de Fourier de f sous la forme $\sum_{n \geq 1} b_n(f) \sin(nx)$, où

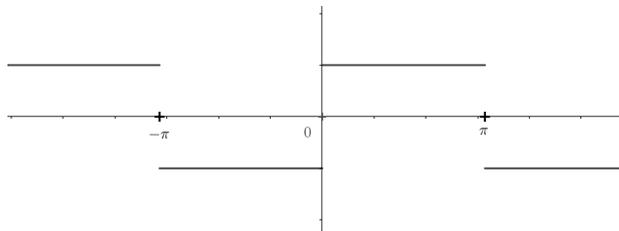
$$b_n(f) := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt.$$

Remarque 1.7 Les égalités suivantes relient les coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$ et les coefficients réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \\ c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) \end{cases}.$$

Exemple 1.8 Fonction créneau.

Soit f la fonction 2π -périodique, impaire définie par : pour tout $t \in]0, \pi[$, $f(t) = 1$, et $f(0) = f(\pi) = 0$.



Alors f est dans $L^1_{2\pi}$, et on calcule que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n}.$$

Exemple 1.9 Calcul des coefficients de Fourier de la fonction signal.

Soit $\epsilon \in]0, \pi[$. On considère la fonction "signal", définie sur $] - \pi, \pi[$ comme suit, et étendue par 2π -périodicité à \mathbb{R} tout entier :

$$\sigma_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } \epsilon < |t| \leq \pi \end{cases}.$$

Par construction, cette fonction est paire, et un calcul d'intégration du cosinus montre que, pour $n \neq 0$, on a $c_n(\sigma_\epsilon) = \frac{\sin(n\epsilon)}{n\pi}$ et que $c_0(\sigma_\epsilon) = \epsilon/\pi$.

Lemme 1.10 Riemann-Lebesgue.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in L^1([a, b], \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{it\lambda} dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(t\lambda) dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(t\lambda) dt = 0.$$

Démonstration

On démontre le lemme directement pour des fonctions de classe C^1 puis on utilise un résultat de densité. Soit donc $\phi \in C^1([a, b], \mathbb{C})$. La fonction $t \mapsto e^{it\lambda}$ est de classe C^1 sur le segment $[a, b]$. Par intégration par parties, on a

$$\int_a^b \phi(t) e^{it\lambda} dt = -i\phi(b) \frac{e^{ib\lambda}}{\lambda} + i\phi(a) \frac{e^{ia\lambda}}{\lambda} + \frac{i}{\lambda} \int_a^b \phi'(t) e^{it\lambda} dt.$$

Comme ϕ' est continue sur le segment $[a, b]$, on peut majorer, par inégalités triangulaires :

$$\left| \int_a^b \phi(t) e^{it\lambda} dt \right| \leq \frac{|\phi(a)| + |\phi(b)|}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|} (b-a) \|\phi'\|_\infty.$$

D'où la convergence vers 0 quand λ tend vers $\pm\infty$.

Traisons à présent le cas général. Soit $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. Soit $\epsilon > 0$. Par densité de $C^1([a, b], \mathbb{C})$ dans $L^1([a, b], \mathbb{C})$, il existe $\phi \in C^1([a, b], \mathbb{C})$, telle que $\|f - \phi\|_\infty < \epsilon$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_a^b f(t)e^{it\lambda} dt - \int_a^b \phi(t)e^{it\lambda} dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - \phi(t)| dt \leq \epsilon(b-a)$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 1.11 Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $c_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0$.

Application 1.12 On peut alors démontrer qu'il n'y a pas d'unité pour la convolution dans l'algèbre $L^1_{2\pi}$.

En effet, supposons qu'il existe $f \in L^1_{2\pi}$ telle que pour tout $g \in L^1_{2\pi}$, $f * g = g$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f)c_n(g) = c_n(g)$. En appliquant à $g = e_m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a donc $c_m(f) = 1$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Or par lemme de Riemann-Lebesgue, la suite $(c_n(f))_n$ doit tendre vers 0... C'est absurde.

Il n'existe donc pas d'unité pour la convolution dans $L^1_{2\pi}$.

Proposition 1.13

L'ensemble des suites indexées par \mathbb{Z} à valeurs complexes qui tendent vers 0 en $\pm\infty$, noté $c_0(\mathbb{Z})$, est une \mathbb{C} -algèbre commutative pour l'addition et le produit terme à terme.

De plus, on peut le munir de la norme "infinie" définie comme $\|(u_n)_n\|_\infty = \max(|u_n|, n \in \mathbb{Z})$. Avec cette norme, $c_0(\mathbb{Z})$ est un espace de Banach.

Proposition 1.14 Relation fonction-coefficients de Fourier.

On pose

$$\gamma : \begin{array}{ccc} (L^1_{2\pi}, +, *, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (c_0(\mathbb{Z}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_n \end{array}$$

Cette application est un morphisme de \mathbb{C} -algèbres, continu et de norme 1.

Remarque 1.15 L'application γ n'est pas surjective. On sera en mesure d'en donner une justification théorique dans la suite.

La proposition suivante raffine le lemme de Riemann-Lebesgue, en énonçant que plus une fonction est lisse, plus la décroissance de ses coefficients de Fourier est rapide. On verra que la réciproque est presque vraie au paragraphe suivant.

Proposition 1.16 Décroissance des coefficients de Fourier.

Soit $f \in C^0_{2\pi} \cap C^1_{pm}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = inc_n(f)$.

De plus, si $f \in C^p_{2\pi}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

Démonstration

• Supposons que f soit de classe $C^0_{2\pi} \cap C^1_{pm}$. Alors par intégration par parties, et grâce à la périodicité de f ,

$$\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int} dt = [f(t)e^{-int}]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt = inc_n(f)$$

• Supposons à présent que f soit de classe $C^1_{2\pi}$. En particulier, f est de classe $C^0_{2\pi} \cap C^1_{pm}$, donc $c_n(f') = inc_n(f)$. Or par lemme de Riemann-Lebesgue $c_n(f') \rightarrow 0$ donc $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Le résultat pour $f \in C^p_{2\pi}$ se déduit par récurrence. ■

Enfin, en rajoutant des hypothèses d'intégrabilité, on a aussi un contrôle sur les coefficients de Fourier. On verra plus loin que cette inégalité est en fait une égalité.

Proposition 1.17 (Inégalité de Parseval)

Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors la suite $(c_n(f))_n$ est de carré intégrable, et

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Démonstration

Soit $f \in L^2_{2\pi}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a, par orthonormalité de la famille (e_n) ,

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2.$$

Donc $\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$, ce qui montre que $(c_n(f))_n$ est de carré intégrable et montre l'inégalité voulue. ■

2 Le cas des fonctions continues et C^1 par morceaux

L'objectif de l'étude des séries de Fourier est de trouver des cas où la fonction est somme de sa série de Fourier, en un certain sens à préciser. Ici, nous étudions un cas simple où cela est vrai : quand la fonction est continue et de classe C^1 par morceaux.

Proposition 2.1 Soit $f \in C^0_{2\pi} \cap C^1_{2\pi, pm}$. Alors la série $\sum c_n(f) e_n$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Démonstration

Par la proposition 1.14, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = -i c_n(f')/n$. De plus, comme f' est continue par morceaux et 2π -périodique, f' est dans $L^2_{2\pi}$. Donc la suite $(c_n(f'))_n$ est de carré intégrable, d'après l'inégalité de Parseval (proposition 1.15). Donc, par lemme de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|c_n(f')|}{n} \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

Donc la série $\sum c_n(f)$ est absolument convergente, ce qui équivaut à la convergence normale de la série de fonctions $\sum c_n(f) e_n$ car $\|e_n\|_{\infty} = 1$. ■

La proposition précédente affirme que la série de Fourier converge normalement, mais ne dit pas vers quoi. C'est le théorème de Fejér qui lève cette incertitude, en assurant que c'est bien la fonction f elle-même qui est la limite de sa série de Fourier.

Théorème 2.2 Fejér version continue

Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Alors la série $\sum c_n(f) e_n$ converge en norme infinie au sens de Cesàro vers f .

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant, qui étudie la suite des sommes partielles de Cesàro de la série de Fourier de f . On verra plus loin qu'il s'agit en fait de l'étude d'un noyau appelé noyau de Fejér.

Lemme 2.3 Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $\sigma_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$.

Alors $\sigma_N(f) = \sigma_N(D) * f$, où on a noté D la fonction trigonométrique $\sum_{n=-N}^N e_n$. De plus pour tout $x \in]0, 2\pi[$,

$$\sigma_N(D)(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

Démonstration (du lemme)

Il s'agit d'utiliser la distributivité du produit de convolution par rapport à l'addition et la formule $e_k * f = c_k(f) f$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ensuite, le résultat sur $\sigma_N(D)$ se calcule directement en utilisant les formules trigonométriques. ■

Démonstration (du théorème)

Il s'agit de montrer que la suite $(\sigma_N(f))_N$ converge vers f en norme infinie.

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, elle y est uniformément continue, donc il existe

$\eta > 0$ tel que pour tout $(x, t) \in [0, 2\pi]^2$, si $|t| \leq \eta$, alors $|f(x-t) - f(x)| \leq \epsilon$. Alors, pour tout $x \in]0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f)(x) - f(x)| &= |\sigma_N(1) * f(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sigma_N(1)(t)| |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^\eta |\sigma_N(1)(t)| dt + \frac{1}{\pi} \|f\|_\infty \int_\eta^{2\pi} |\sigma_N(1)(t)| dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sigma_N(1)(t)| dt + \frac{\|f\|_\infty}{N\pi} \int_\eta^{2\pi} \frac{1}{\sin(t/2)^2} dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sigma_N(1)(t)| dt + \frac{2\|f\|_\infty}{N} \frac{1}{\sin(\eta/2)^2} \end{aligned}$$

■

Ainsi, en passant à la limite supérieure quand N tend vers $+\infty$, on obtient

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty \leq \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, et la norme infinie étant positive, on a finalement la convergence voulue

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0.$$

Corollaire 2.4 Soit $f \in C_{2\pi}^0 \cap C_{2\pi, pm}^1$. Alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f . On écrira

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n.$$

Démonstration

On a vu, en proposition 2.1, que si $f \in C_{2\pi}^0 \cap C_{pm}^1$, alors la série de Fourier $\sum c_n(f) e_n$ converge normalement sur \mathbb{R} , vers sa somme S . A fortiori, la série de Fourier converge uniformément en moyenne de Cesàro vers S sur \mathbb{R} . Mais le théorème de Fejér assure que la série de Fourier converge uniformément en moyenne de Cesàro vers f sur \mathbb{R} . Par unicité de la limite, $f = S$ et donc f est somme uniforme de sa série de Fourier. ■

Corollaire 2.5 Soit $f \in C_{2\pi}^0$. Si $\sum c_n(f) e_n$ converge simplement sur \mathbb{R} , alors sa limite simple est f .

Démonstration

Comme f est continue, en vertu du théorème de Fejér ci-dessus, la série $\sum c_n(f) e_n$ converge uniformément en moyenne de Cesàro vers f , et a fortiori elle converge simplement en moyenne de Cesàro vers f . Mais par hypothèse, la série $\sum c_n(f) e_n$ converge simplement vers sa somme, au sens fort, donc a fortiori en moyenne de Cesàro. Par unicité de la limite au sens de Cesàro, la somme de $\sum c_n(f) e_n$ et f coïncident sur \mathbb{R} . ■

Grâce à ce corollaire, on peut énoncer une réciproque partielle à la proposition 1.14 qui liait régularité de fonction et vitesse de décroissance des coefficients de Fourier.

Application 2.6 Soit $f \in C_{2\pi}^0$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que les coefficients de Fourier de f vérifient

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)$$

Alors, grâce à un théorème de dérivation sous le signe somme, la série $\sum c_n(f) e_n$ converge vers une fonction de classe $C_{2\pi}^k$, et cette somme n'est autre que f .

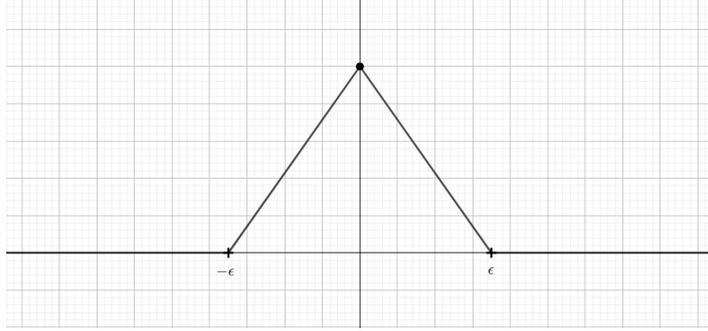
Ainsi la décroissance à l'ordre $k+2$ des coefficients de Fourier implique la régularité à l'ordre k de la fonction.

Dans le cas général, le théorème de Fejér n'assure pas la convergence uniforme de la série de Fourier vers f . Il existe des contre-exemple, et on a même la propriété suivante, dont on verra une justification théorique plus loin.

Proposition 2.7 Il existe une fonction $f \in C_{2\pi}^0$ dont la série de Fourier en 0 diverge.

Exemple 2.8 Fonction triangle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, paire, telle que $f(x) = x$ sur $[0, \pi]$.



On calcule que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair non nul} \\ -2/\pi n^2 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Comme f est continue et de classe C^1 par morceaux, elle est uniformément somme de sa série de Fourier, et en particulier, en $x = 0$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} .$$

Remarque 2.9 On est à présent en mesure de montrer que le morphisme γ de la section précédente n'était pas surjectif. Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs. Supposons que la série $\sum a_n \sin(nx)$ soit une série de Fourier, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f \in L_{2\pi}^1$ impaire, dont la série de Fourier serait $\sum a_n \sin(nx)$.

Posons alors $F : x \mapsto \int_0^x f(u) du$. La fonction F est continue et 2π -périodique, car f est impaire. De plus, pour tout $|n| \geq 1$, $c_n(F) = \frac{-a_{|n|}}{2|n|}$. On a également, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{k} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \frac{a_{|n|}}{2|n|} + c_0(F) + \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N a_k .$$

Par lemme de Riemann-Lebesgue et théorème de Féjer, on conclut que la série $\sum \frac{a_k}{k}$ converge. En particulier, la série $\sum \frac{1}{\ln(n)} \sin(nx)$ n'est pas une série de Fourier.

Application 2.10 Du théorème de Fejer dans le cas continu, on peut déduire le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

3 Convergences dans le cas général

3.1 Noyaux trigonométriques

Définition 3.1 Noyau de Dirichlet, noyau de Féjer

Soit $N \in \mathbb{N}$.

Le noyau de Dirichlet d'ordre N est la fonction $D_N := \sum_{-N}^N e_n$.

Le noyau de Féjer d'ordre N (pour $N \neq 0$) est la fonction $K_N := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$.

L'intérêt d'un noyau est de le convoler avec des fonctions. Ici, on dispose de la propriété suivante, qui justifie l'étude des noyaux de Dirichlet et de Fejér lorsqu'on s'intéresse aux modes de convergence de la série de Fourier d'une fonction.

Proposition 3.2 Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a

$$f * D_N = S_N(f) \text{ et donc } f * K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f).$$

Proposition 3.3 Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D_N est une fonction paire, 2π -périodique, et vérifie :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}.$$

De plus, $\|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2} \ln(N) + O(1)$.

Remarque 3.4 Le fait que $\|D_N\|_1 \rightarrow +\infty$ assure l'existence d'une fonction f continue et 2π -périodique dont la série de Fourier diverge en 0, ce qui fournit un contre-exemple à une potentielle généralisation du théorème de Fejér où on aurait remplacé la convergence en moyenne de Cesaro par une convergence classique.

En effet, considérons les applications linéaires suivantes

$$T_N : \begin{array}{ccc} C_{2\pi}^0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & S_N(f)(0) \end{array}.$$

Un calcul permet de montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la norme d'opérateur de T_N vaut $\|D_N\|_1$. Ainsi $\|T_N\| \rightarrow +\infty$. Par contraposée du théorème de Banach-Steinhaus (l'espace des fonctions continues et 2π -périodique est bien un espace de Banach), il existe $f \in C_{2\pi}^0$ telle que la suite $(|T_N(f)|)_N$ soit non bornée, et donc telle que la série de Fourier de f diverge en 0.

Proposition 3.5 Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Le noyau de Féjér vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$K_N(x) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

où la deuxième expression se prolonge par continuité pour les $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

De plus, la suite $(K_N)_N$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$, c'est-à-dire que $\|K_N\|_1 = 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et

$$\forall \epsilon > 0, \quad \int_{\epsilon \leq |x| \leq \pi} K_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration

- Le premier point a déjà été démontré en lemme 2.3.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La deuxième expression montre que K_N est positif. Donc

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x) dx = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \langle e_n, 1 \rangle = 1$$

Enfin, soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in [\epsilon, \pi]$, par croissance de la fonction $u \mapsto \sin(u)^2$ sur $[0, \pi/2]$, on a $\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$, d'où

$$0 \leq \int_{\epsilon \leq |x| \leq \pi} K_N(x) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} dx \leq \frac{2\pi}{N \sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Ce résultat annonce les théorèmes de convergence du paragraphe suivant, puisque le rôle d'une approximation de l'unité (g_N) est précisément d'approcher une fonction f par la suite des convolutions $(f * g_N)$.

3.2 Le théorème de Fejér généralisé

Théorème 3.6 (Fejér)

Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $f \in L^p_{2\pi}$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f) \right\|_p \leq \|f\|_p.$$

De plus, la série de Fourier $\sum c_n(f)e_n$ converge en moyenne de Cesaro en norme p vers f :

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f) - f \right\|_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque 3.7 Ce théorème a de nombreuses conséquences théoriques et pratiques, notamment dans le cas $p = 2$.

Une première conséquence est que le morphisme γ qui à une fonction associe ses coefficients de Fourier est injectif sur $L^1_{2\pi}$. On peut alors retrouver le fait qu'il n'est pas surjectif en invoquant le théorème d'isomorphisme de Banach et en exploitant les propriétés du noyau de Dirichlet, à savoir que $\|D_N\|_1 \rightarrow +\infty$ et $\|(c_n(D_N))_n\|_\infty = 1$.

Corollaire 3.8 La famille $(e_n)_n$ forme une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, et donc toute fonction de $L^2_{2\pi}$ est limite de sa série de Fourier en norme 2.

Corollaire 3.9 Égalité de Parseval.

Pour tout $f \in L^2_{2\pi}$,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

Remarque 3.10 Grâce aux identités de polarisation, on en déduit que pour tous $f, g \in L^2_{2\pi}$,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

Cette égalité est parfois encore appelée formule de Parseval, et on s'en servira dans le premier développement.

Corollaire 3.11 L'espace $L^2_{2\pi}$ est naturellement isométrique à $l^2(\mathbb{Z})$, via

$$\tilde{\gamma} : \begin{array}{ccc} L^2_{2\pi} & \longrightarrow & l^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_n \end{array}.$$

Outre ses conséquences théoriques, l'égalité de Parseval est utile pour calculer des sommes de séries ou, de manière plus surprenante, pour résoudre des problèmes d'optimisation comme on le verra avec l'inégalité isopérimétrique.

Exemple 3.12 Fonction créneau (bis)

Reprenons la fonction créneau f définie en exemple 1.2, qu'on avait définie par $f(t) = 1$ sur $]0, \pi[$, $f(0) = f(\pi) = 0$ et f est impaire et 2π -périodique. On avait calculé les coefficients de Fourier de f , obtenant

$$b_n(f) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n}.$$

Comme f est de classe $L^2_{2\pi}$, on peut lui appliquer l'égalité de Parseval.

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2(2p+1)^2}.$$

D'où la valeur de la somme des inverses des carrés des nombres impairs :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Application 3.13 Inégalité isopérimétrique. (**Développement 1**, voir [Tes12])

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée continue et C_{pm}^1 , injective sur $]0, 1[$ et telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma'(t) \neq 0$. Cette courbe définit une surface d'aire A et de périmètre L . Alors on a toujours

$$L^2 \geq 4\pi A$$

avec égalité si et seulement si la courbe décrit un cercle.

Démonstration

On va commencer par restreindre les hypothèses sur γ , sans perte de généralité.

- On peut supposer que $L = 1$, quitte à composer par une homothétie.
- Ensuite, on peut supposer que la paramétrisation γ parcourt la courbe à vitesse constante. En effet, considérons la fonction suivante :

$$s : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \\ u \longmapsto \int_0^u |\gamma'(t)| dt .$$

Alors s est un C^1 -difféomorphisme, et la paramétrisation $\gamma \circ s^{-1}$ parcourt la courbe à vitesse constante.

À présent, on va exprimer les quantités L et A en fonction de coefficients de Fourier d'une certaine fonction.

Comme $\gamma(0) = \gamma(1)$, on peut étendre γ en une fonction continue sur \mathbb{R} tout entier, 1-périodique. On note toujours γ la fonction obtenue, qui est continue et de classe C_{pm}^1 sur \mathbb{R} .

On note $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de γ .

$$c_n := \int_0^1 \gamma(t) e^{-2\pi i t} dt \text{ et } c'_n := \int_0^1 \gamma'(t) e^{-2\pi i t} dt .$$

Comme pour tout $t \in]0, 1[$, $|\gamma'(t)| = 1 = |\gamma'(t)|^2$, en utilisant la formule de Parseval on a

$$L^2 = \int_0^1 |\gamma'(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c'_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 n^2 |c_n|^2 .$$

Exprimons maintenant l'aire A . Par la formule de Green-Riemann,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\gamma} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_0^1 \gamma'(t) \overline{\gamma(t)} dt \right) .$$

Or par la formule de Parseval, dans sa version produit scalaire, on a

$$\int_0^1 \gamma'(t) \overline{\gamma(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n \overline{c_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi i n |c_n|^2 .$$

D'où

$$A = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |c_n|^2 .$$

Puis

$$L^2 - 4\pi A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4\pi |c_n|^2 (n^2 - n) \geq 0 .$$

On a l'inégalité voulue. De plus, il y a égalité si et seulement si tous les coefficients de la somme sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si pour tout n différent de 0 et 1, le coefficient c_n est nul. Dans ce cas, le paramétrage γ s'écrit

$$\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{2i\pi t} .$$

Ceci est une équation paramétrisant un cercle de centre c_0 et de rayon $|c_1|$. ■

3.3 Le théorème de Dirichlet

Un autre résultat de convergence, dû à Dirichlet, donne une condition peu restrictive pour avoir la convergence simple de la série de Fourier vers sa fonction associée.

Théorème 3.14 Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que les limites suivantes existent :

$$f(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ et } f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

On suppose aussi que les fonctions suivantes sont bornées au voisinage de x_0^+ (resp. x_0^-) :

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \text{ et } x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}.$$

Alors la suite des sommes partielles $(S_N(f)(x_0))_N$ converge, et on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Démonstration

Quitte à translater, on peut supposer que $x_0 = 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N(f)(0) = f * D_N(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(-t) D_N(t) dt.$$

D'où,

$$S_N(f)(0) - \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin(t/2)} dt.$$

De plus, par hypothèse sur f , la fonction $h : t \mapsto (f(t) + f(-t) - f(0^+) - f(0^-)) / \sin(t/2)$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. Par lemme de Riemann-Lebesgue, on a

$$\int_0^\pi h(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où la convergence simple $S_N(f)(0) \rightarrow \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$. ■

Remarque 3.15 Les hypothèses de ce théorème sont optimales, au sens où on peut montrer que si f a une discontinuité de première espèce en x_0 , c'est-à-dire si f vérifie en x_0 les hypothèses du théorème, alors la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers f au voisinage de x_0 , à cause d'oscillations appelées phénomène de Gibbs, illustré ci-dessous.

Exemple 3.16 Phénomène de Gibbs

Considérons la fonction f suivante, définie par imparité et 2π -périodicité sur \mathbb{R} , et telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x \in [0, \pi[\\ -1/4 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}.$$

Comme f est impaire, on peut mettre sa série de Fourier sous la forme $\sum_{n \geq 1} b_n(f) \sin(nx)$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Par théorème de Dirichlet, cette série est simplement convergente sur \mathbb{R} . On va montrer que la suite des sommes partielles $(S_N(f))_N$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On s'intéresse au premier maximum local sur $]0, \pi[$ de la fonction $S_N(f)$.

On a

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=0}^N \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}$$

donc en dérivant,

$$S_N(f)'(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^N \cos((2n+1)x).$$

En délinéarisant la somme de cosinus, on obtient

$$S_N(f)'(x) = \frac{\sin(2(N+1)x)}{2\pi \sin(x)}.$$

Ainsi le premier extremum de la fonction est en $x_N := \frac{\pi}{2(N+1)}$. Il s'agit d'un maximum au vu du signe de la dérivée au voisinage de x_N . En ce maximum, la fonction $S_N(f)$ vaut

$$S_N(f)(x_N) = \frac{1}{2(N+1)} \sum_{n=0}^N \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2(N+1)})}{\frac{(2n+1)\pi}{2(N+1)}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx \simeq 0,29.$$

Ainsi la valeur du premier pic de $S_N(f)$ converge vers une valeur strictement plus grande que $1/4$, ce qui empêche la convergence uniforme.

Le théorème de Dirichlet permet de calculer efficacement des sommes de séries. On en donne un exemple en revenant une dernière fois sur la fonction créneau.

Exemple 3.17 Fonction créneau (ter)

La fonction 2π -périodique et impaire f était définie par $f(t) = 1$ sur $]0, \pi[$, $f(0) = f(\pi) = 0$. On avait calculé que $b_n(f) = 0$ si n est pair et $b_n(f) = \frac{4}{\pi n}$ sinon.

Comme f est de classe C_{pm}^1 , on peut lui appliquer le théorème de Dirichlet en tous points, et en particulier en $\pi/2$, on obtient

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)}.$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4 Application à la résolution d'équations différentielles

4.1 Équations différentielles ordinaires

Lorsqu'on a une équation différentielle linéaire avec second membre à résoudre, la procédure usuelle consiste à trouver une solution particulière puis à résoudre l'équation homogène pour déterminer l'ensemble des solutions comme espace affine dirigé par l'ensemble des solutions homogènes et passant par la solution particulière. L'étape délicate est justement de trouver une solution particulière.

L'idée est de développer (si c'est possible) le second membre en série de Fourier, pour en déduire des relations sur les coefficients de Fourier d'une éventuelle solution de l'équation différentielle. On expose cette démarche dans un exemple, ci-dessous.

Exemple 4.1 L'objectif est de résoudre l'équation $y'' + y = |\sin(x)|$, sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ est π -périodique, paire, continue et de classe C_{pm}^1 , donc elle est uniformément somme de sa série de Fourier.

$$|\sin(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2nx)$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} |\sin(t)| \cos(2nt) dt = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$.

Supposons qu'on ait une solution f de l'équation différentielle. Alors f est de classe C^2 . Supposons que f soit 2π -périodique. Alors elle est somme de sa série de Fourier, et ses coefficients de Fourier doivent vérifier les égalités suivantes, pour respecter l'équation différentielle :

$$a_n(f'') + a_n(f) = \begin{cases} \frac{a_n/2}{1-n^2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et } b_n(f'') + b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1 - 4n^2)a_{2n}(f) = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$ et pour tout $n \neq 1$, $a_{2n+1}(f) = b_n(f) = 0$. Les coefficients $a_1(f)$ et $b_1(f)$ n'ont pas de contrainte. La fonction f s'écrit donc

$$f(x) = b_1(f) \sin(x) + \frac{4}{\pi} + a_1(f) \cos(x) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2 - 1)^2}$$

Par exemple, prenons $b_1(f) = a_1(f) = 0$, et on vérifie que la fonction définie par l'expression ci-dessus est bien une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} , et solution de l'équation différentielle $y'' + y = |\sin(x)|$. On a donc trouvé une solution particulière.

4.2 Équations aux dérivées partielles

Historiquement, les séries de Fourier ont été introduites pour résoudre des équations linéaires aux dérivées partielles. L'idée était d'utiliser la linéarité des équations pour "superposer", c'est-à-dire sommer, des solutions simples.

Théorème 4.2 (Développement 2), voir [Mon13].

Soit $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , et vérifiant $f(0) = f(L) = 0$.

Considérons le problème suivant :

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, x \in]0, L[\\ u(0, x) = f(x), & 0 < x < L \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0 \end{cases} .$$

En notant $U :=]0, L[\times \mathbb{R}_+^*$, ce problème admet une unique solution u continue sur \bar{U} et de classe C^2 sur U . Cette solution est donnée par

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

où les coefficients b_n valent :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Démonstration

On procède par analyse-synthèse.

• Analyse : soit u une solution du problème (*). Soit $t \in \mathbb{R}_+$, fixé pour le moment. On construit une fonction $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, en la prenant impaire, $2L$ -périodique et définie sur $[0, L]$ par

$$g_t(x) = u(t, x) \quad 0 \leq x \leq L.$$

Comme u est solution de (*), elle est en particulier de classe C^2 sur $]0, L[$ selon sa deuxième variable. Donc la fonction g_t est de classe C^2 par morceaux, et elle est continue par construction. Elle est donc somme de sa série de Fourier, uniformément sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(g_t) \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right)$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g_t) = \frac{2}{L} \int_0^L g_t(x) \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^L u(t, x) \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right) dx$.

Or la fonction u est de classe C^1 selon sa première variable, et pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, pour tout $t \in [a, b]$, pour tout $x \in [0, L]$, on a

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right) \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x).$$

La fonction $x \mapsto \sup_{t \in [a, b]} \partial_t u(t, x)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0, L]$. Par théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction $t \mapsto b_n(g_t)$ est donc de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ , et pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\partial b_n(g_t)}{\partial t}(t) = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right) dx.$$

Or u est solution de (*), donc $\partial_t u = \partial_x^2 u$, et on obtient après deux intégrations par parties une équation différentielle vérifiée par les coefficients $b_n(g_t)$:

$$\partial_t b_n(g_t)(t) = \int_0^L \partial_x^2 u(t, x) \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right) dx = -n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L u(t, x) \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right) dx = -n^2 \frac{\pi^2}{L^2} b_n(g_t).$$

Ainsi il existe $b_n \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait $b_n(g_t) = b_n e^{-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} t}$.

De plus, on a $b_n(g_0) = \int_0^L f(x) \sin(nx) dx = b_n$.

• Synthèse : définissons la fonction u comme suit. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in [0, L]$,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right)$$

avec b_n définis par $b_n := \int_0^L f(x) \sin(nx) dx$.

Montrons que cette fonction a la régularité voulue, et qu'elle est solution de (*).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n(t, x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right)$.

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in [0, L]$,

$$|u_n(t, x)| = \left| b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \right| \leq |b_n|.$$

Comme f est supposée de classe C^1 , la série $\sum b_n$ converge absolument. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+ \times [0, L]$, vers u .

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe C^2 , et on a, pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in [a, b]$, pour tout $x \in [0, L]$,

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) \right| = \left| b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \right| \leq |b_n| \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a\right) \\ \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) \right| = \left| b_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \right| \leq |b_n| \frac{n\pi}{L} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a\right) \\ \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(t, x) \right| = \left| b_n \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \right| \leq |b_n| \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a\right) \end{cases}.$$

Or les séries $\sum b_n n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a\right)$ et $\sum b_n n^2 \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a\right)$ sont absolument convergentes, donc par théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction u est de classe C^1 en t et de classe C^2 en x , et vérifie de plus l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Par définition des coefficients b_n , on a bien $u(0, x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, L]$.

Enfin, $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

La fonction u est solution du problème (*). ■

Références

- [Amr08] Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipse, 2008.
- [Can09] Bernard Candelpergher. *Calcul intégral*. Cassini, 2009.
- [HQ13] Claude Zuily Hervé Queffélec. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 4ème édition, 2013.
- [Mon13] Jean-Marie Monier. *Analyse MP*. Dunod, 2013.
- [Tes12] Frédéric Testard. *Analyse mathématique, la maîtrise de l'implicite*. Calvage et Mounet, 2012.
- [Wik] Wikipédia.