Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

Perrine Jouteur

Ce développement trouve sa place dans les leçons 158, 160, 161, 181. Il est détaillé dans le livre d'exercices de Francinou - Gianella - Nicolas, *Oraux X ENS Algèbre 3.*

1 Prérequis

Définition 1.1 Soit C un convexe. Soit a un point de C. On dit que a est extrémal lorsque $C \setminus \{a\}$ est convexe.

Proposition 1.1 Soit C un convexe et a un point de C. Alors a est extrémal ssi pour tout $b, c \in C$, si $a = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$ alors $b = c = a$.

Démonstration
• Supposons que a soit extrémal. Soient $b, c \in C$ tel que $a = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$.
Par l'absurde : si $b \neq a$, alors $b, c \in C \setminus \{a\}$ qui est convexe par hypothèse, donc la combinaison $\frac{b}{2} + \frac{c}{2}$ est dans $C \setminus \{a\}$, ce qui est absurde.

• Supposons que pour tout $b, c \in C$, si $a = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$, alors $b = c = a$.
Soient $b, c \in C \setminus \{a\}$, et $\lambda \in [0,1]$. Notons $d = \lambda b + (1-\lambda)c$. Par convexité de C, d est un point de C. Quitte à échanger λ et $1-\lambda$, on peut supposer que $\lambda \geqslant 1/2$. Alors $\mu := 2\lambda - 1 \in [0,1]$, et par convexité de C, le point $e = \mu b + (1-\mu)c$ est dans C. Mais alors

$$\frac{b}{2} + \frac{e}{2} = \frac{b}{2} + \lambda b - \frac{b}{2} + (1-\lambda)c = d.$$

Donc d est le milieu de deux points différents de a, et donc $d \neq a$ et ainsi $d \in C \setminus \{a\}$. ■

Lemme 1.1 (cas d'égalité dans les inégalités triangulaires euclidiennes)
Si on a une norme euclidienne $\|\cdot\|$ et deux vecteurs x, y tels que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, alors x et y sont positivement liés, i.e. il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$.

Proposition 1.2 Décomposition polaire.

Théorème 1.1 Théorème spectral.

2 Le développement

Théorème 2.1 Soit E un espace euclidien.
Les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$, notée B, sont exactement les éléments du groupe orthogonal $O(E)$.

Démonstration
• Sens direct. Soit $u \in O(E)$. Supposons qu'il existe $v, w \in B$, tels que $u = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$. Montrons que $v = w = u$.
Soit $x \in E$, de norme 1. Alors on a les inégalités suivantes, par Cauchy-Schwarz et car $\|v\|, \|w\| \leq 1$:

$$1 = \|x\| = \|u(x)\| = \frac{1}{2}\|v(x) + w(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\|v(x)\| + \frac{1}{2}\|w(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|w\| \leqslant 1.$$

Ainsi toutes les inégalités sont des égalités. En particulier, le cas d'égalité dans les inégalités triangulaires euclidiennes (cf lemme) nous donne $\lambda_x \geq 0$ tel que $v(x) = \lambda_x w(x)$. De plus, l'égalité dans la deuxième inégalité nous dit que $\|v\| = \|v(x)\|$ et $\|w\| = \|w(x)\|$. Ainsi $\|v\| = \lambda \|w\|$. Enfin l'égalité dans la dernière inégalité nous dit que $\|v\| = \|w\| = 1$. Donc $\lambda_x = 1$. On a montré que $v = w$, ce qu'on voulait démontrer.

• Sens indirect, par contraposée. Soit $u \in B$, avec $u \notin O(E)$. Montrons que u n'est pas extrémal. On considère A la matrice de u dans la base canonique de E. Par décomposition polaire, il existe $O \in O(E)$ et S symétrique positive telles que $A = OS$. Par théorème spectral, il existe $P \in O(E)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale et avec $\lambda_1 \leqslant \cdots \lambda_n$, telles que $S =^t PDP$. Comme A est de norme 1, ses valeurs propres sont de module inférieur à 1. Et comme A n'est pas orthogonales, on a $\lambda_1 < 1$. Écrivons alors $\lambda_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, avec $-1 \leqslant \alpha < \beta \leq 1$. Considérons les matrices $D' = \text{diag}(\alpha, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ et $D'' = \text{diag}(\beta, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. On a $\frac{D'+D''}{2} = D$ et donc

$$\frac{1}{2}(O^tPD'P + O^tPD''P) = A.$$

Vérifions que les matrices $O^tPD'P$ et $O^tPD''P$ sont dans B, et on aura alors que A s'écrit comme milieu de deux éléments de B, distincts, ce qui montre que u n'est pas extrémal.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$, unitaire. On a

$$\left\|O^tPD'PX\right\| = \|D'PX\| \leqslant 1 \text{ car } D' \in B.$$

De même pour D''. ■