Sous-espaces de $C^1(\mathbb{R})$ stables par translation

Perrine Jouteur

Je présente d'abord le développement classique sur ce thème, qui fonctionne très bien dans les leçons 151, 154, 159, 201, 220, 221 et 228. On peut trouver le détail dans Oraux X-ENS algèbre 1.
En deuxième partie, je me suis amusée à étendre le théorème aux distributions, et j'en ai déduis un théorème que je trouve étonnant. Bien sûr, je conseille de présenter le développement classique le jour J, mais il peut être valorisant de citer dans le plan la version distributions, ou même de faire une remarque lors de la présentation pour tendre une perche au jury (qui sera ravi de la prendre et de vérifier si vous savez de quoi vous parlez)...

1 Développement classique

Définition 1.1 Pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on notera f_a la fonction translaté de a, définie par $f_a(x) = f(x+a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.2 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants si et seulement si l'espace engendré par les translations de f est de dimension finie.

Démonstration
• Sens direct : si f est solution d'une EDO linéaire, alors toutes ses translatés sont solutions de la même EDO. Or l'ensemble des solution de l'EDO en question est de dimension finie, et c'est ce qu'on voulait.

• Réciproquement, supposons que l'espace F engendré par les translations de f soit de dimension finie d.
Si f est identiquement nulle, le résultat est immédiat puisque f est alors solution de l'EDO $y = 0$. Supposons donc que f soit non nulle. Soit $(f_{a_1}, f_{a_2}, \cdots, f_{a_d})$ une base de F, en prenant $a_1 = 0$ de telle sorte que $f_{a_1} = f$.
Montrons qu'il existe des réels $x_1, \cdots, x_d$ tels que la matrice $(f_{a_i}(x_j))_{i,j}$ soit inversible.
Considérons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la forme linéaire d'évaluation

$$ev_x : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g & \longmapsto & g(x). \end{array}$$

Alors la famille $(ev_x)_{x\in\mathbb{R}}$ est génératrice de F^*. On raisonne par orthogonalité. Si $g \in \mathrm{Vect}(ev_x, x \in \mathbb{R})^\perp$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = 0$, donc g est nulle. Ainsi $\mathrm{Vect}(ev_x, x \in \mathbb{R}) = F^*$. Il existe donc des réels $x_1, \cdots, x_d$ tels que $(ev_{x_1}, \cdots, ev_{x_d})$ soit une base de F^*.
Vérifions maintenant que la matrice $M = (f_{a_i}(x_j))_{i,j}$ est inversible, en montrant que les lignes $L_1, \cdots, L_d$ forment une famille libre.
Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ tels que $\sum_{i=1}^d \lambda_i L_i = 0$.
Alors pour tout j,

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i f_{a_i}(x_j) = 0$$

ce qui revient à écrire que pour tout j,

$$ev_{x_j}\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i f_{a_i}\right) = 0$$

Comme $(ev_{x_1}, \cdots, ev_{x_d})$ engendre F^*, ces égalités impliquent que $\sum_{i=1}^d \lambda_i f_{a_i} \in (F^*)^\perp = \{0\}$. Donc on se retrouve avec

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i f_{a_i} = 0$$

mais $(f_{a_1}, \cdots, f_{a_d})$ est une famille libre, donc pour tout i, $\lambda_i = 0$.
Ainsi la matrice M est inversible.

Pour démontrer le théorème, on va commencer par montrer que toutes les dérivées de f sont dans l'espace F. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la translaté f_a est dans F par définition, donc on peut l'écrire dans la base $(f_{a_1}, \cdots, f_{a_d})$:

$$f_a = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(a) f_{a_i}.$$

En particulier, pour tout j,

$$f_a(x_j) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(a) f_{a_i}(x_j)$$

ce qu'on peut réécrire en utilisant la matrice M :

$$\begin{pmatrix} f_a(x_1) \\ \vdots \\ f_a(x_d) \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_d(a) \end{pmatrix}$$

Comme M est inversible, on a finalement que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_d(a) \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} f(a+x_1) \\ \vdots \\ f(a+x_d) \end{pmatrix}$$

Or les fonctions $a \mapsto f(a+x_j)$ sont de classe C^1, et la matrice M ne dépend pas de la variable a. Donc pour tout j, la fonction $a \mapsto \lambda_j(a)$ est de classe C^1. En dérivant par rapport à a dans l'égalité 1, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f'(a+x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda'(a) f_{a_i}(x)$$

et en particulier, pour $a = 0$, on a une expression de la dérivée f' en fonction des translatés f_{a_i}, ce qui montre que $f' \in F$.
De la même manière, on déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^{(k)}$ est dans F. Cet espace F étant de dimension finie, la famille $(f^{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est nécessairement liée, donc il existe un entier p et des constantes $c_0, c_1, \cdots, c_p$ tels que

$$c_p f^{(p)} + \cdots + c_1 f' + c_0 f = 0$$

La fonction f est bien solution d'une EDO linéaire homogène à coefficients constants. ■

2 Variante : au sens des distributions

Pour corser un peu les choses, on peut traduire le développement dans le monde des distributions. On obtient alors ce résultat surprenant :

Théorème 2.1 Soit $T \in D'(\mathbb{R})$. Si l'espace engendré par les translations de T est de dimension finie, alors T est en fait une fonction, qui plus est de classe C^∞.

Pour démontrer cela, on généralise le théorème 2.1 aux distributions. On énonce d'abord quelques définitions et propriétés qui fixent le cadre.

Définition 2.2 Soit $a \in \mathbb{R}$. On va considérer l'opérateur de translation suivant

$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & D'(\mathbb{R}) & \longrightarrow & D'(\mathbb{R}) \\ & T & \longmapsto & \tau_a T : f \mapsto \langle T, f_{-a} \rangle \end{array}$$

Remarque 2.3 Il faudrait vérifier que $\tau_a T$ est bien une distribution. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ les constantes associées à la continuité de T sur $K + a$ (on note $K + a$ le compact $\{x+a, x \in K\}$). Soit ϕ une fonction de classe C^∞ à support dans K. Alors la translaté ϕ_{-a} est à support dans $K + a$, donc

$$|\langle \tau_a T, \phi \rangle| = |\langle T, \phi_{-a} \rangle| \leqslant C \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N} \\ \alpha \leq p}} \|\delta^\alpha \phi_{-a}\|_\infty = C \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N} \\ \alpha \leq p}} \|\delta^\alpha \phi\|_\infty$$

ce qui montre la continuité de τ_a sur K.

On aura besoin de la proposition suivante, qui donne en quelque sorte la régularité de l'application $a \mapsto \tau_a$.

Proposition 2.4 Soit $\phi \in D(\mathbb{R})$. Soit $T \in D'(\mathbb{R})$. Alors la fonction suivante est de classe C^1 :

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & < \tau_a T, \phi > \end{array}$$

Démonstration
Comme T est une distribution, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction test $\psi \in D(\mathbb{R})$, si $\mathrm{supp}(\psi) \subset K$ alors

$$|< T, \psi >| \leqslant C_K \max_{\alpha \leqslant p_K} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)|$$

Choisissons K un compact qui contient le support de ϕ. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, le support de ϕ_{-a} est inclus dans $K + a$.
On a :

$$\left| \frac{\lambda(a+h) - \lambda(a)}{h} + < T, \phi'_{-a} > \right| = \frac{\left| < T, \phi_{-a-h} - \phi_{-a} + h\phi'_{-a} > \right|}{h}$$

Et pour $h \in [-1, 1]$, le support de la fonction $\phi_{-a-h} - \phi_{-a} + h\phi'_{-a}$ est inclus dans $K + a + [-1, 1]$. Soient C et p les constantes de T associées à ce compact. Alors pour tout $h \in [-1, 1]$, non nul, on a

$$\left| \frac{\lambda(a+h) - \lambda(a)}{h} + < T, \phi'_{-a} > \right| \leqslant \frac{C}{|h|} \max_{\alpha \leqslant p} \sup_{x \in K+a+[-1,1]} \left| \partial^\alpha \big(\phi(x-a-h) - \phi(x-a) + h\phi'(x-a) \big) \right|$$

Comme ϕ est de classe C^∞, pour tout $\alpha \leqslant p$, par formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in K+a+[-1, 1]$,

$$\left| \partial^\alpha \big(\phi(x-a-h) - \phi(x-a) - (-h)\phi'(x-a) \big) \right| \leqslant \frac{|h|^2}{2} \sup_{K+a+[-1,1]} \left| \phi^{(\alpha+2)} \right|$$

Ainsi

$$\left| \frac{\lambda(a+h) - \lambda(a)}{h} + < T, \phi'_{-a} > \right| \leqslant C \frac{|h|}{2} \max_{\alpha \leqslant p} \sup_{K+a+[-1,1]} \left| \phi^{(\alpha+2)} \right|$$

Donc λ est dérivable en a, de dérivée $a \mapsto - < T, \phi'_a > = < (\tau_a T)', \phi >$. Avec le même raisonnement, on montre qu'en fait λ est de classe C^∞. ■

Proposition 2.5 Si $T \in D'(\mathbb{R})$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène, alors T est en fait une fonction de classe C^∞.

Démonstration
Tout repose sur le lemme qui dit que si T vérifie $T' = 0$ alors T est constante (à savoir justifier au besoin).

Plus précisément, supposons que T soit solution de l'équation

$$y^{(d)} + a_{d-1} y^{(d-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

Alors posons $X_T = (T, T', \cdots, T^{(d-1)})$. Le vecteur X_T est solution de $X'_T = AX_T$, avec $A \in M_d(\mathbb{R})$ la transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$.

Or on connaît les solutions de cette équation différentielle vectorielle parmi les fonctions, ce sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{At}v$, où v est un vecteur de $\mathbb{R}^d$. On veut montrer que X_T est en fait une fonction qui est de cette forme. Pour cela, on va étudier le vecteur $e^{-At}X_T$, qui est bien défini car on

multiplie des distributions par des fonctions de classe C^∞.
En fait, on voit $e^{-At}X_T$ comme un élément de $D'(\mathbb{R})^d$. On aimerait montrer que c'est en fait un vecteur constant, dans $\mathbb{R}^d$.

Dérivons (coefficient par coefficient) le vecteur $e^{-At}X_T$ au sens des distributions. Pour ça, on vérifie en général que si B est une matrice dont les coefficients sont des fonctions de classe C^∞ et si Y est un vecteur dont les coefficients sont des distributions, alors au sens des distributions,

$$(BY)' = B'Y + BY'$$

Soit $\Phi \in D(\mathbb{R})^d$ un vecteur de fonctions test. Alors, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$,

$$\begin{aligned}
\langle (BY)_i', \Phi_i \rangle &= -\langle \sum_{j=1}^{d} B_{ij} Y_j, \Phi_i' \rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{d} \langle Y_j, B_{ij} \Phi_i' \rangle \\
&= -\sum_{j=1}^{d} \langle Y_j, \big((B_{ij}\Phi_i)' - B_{ij}', \Phi_i\big) \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{d} \langle B_{ij} Y_j', \Phi_i \rangle + \sum_{j=1}^{d} \langle B_{ij}' Y_j, \Phi_i \rangle \\
&= \langle (BY')_i, \Phi_i \rangle + \langle (B'Y)_i, \Phi_i \rangle \\
&= \langle (BY' + B'Y)_i, \Phi_i \rangle
\end{aligned}$$

ainsi coefficient par coefficient, on a calculé que $\langle (BY)', \Phi \rangle = \langle B'Y + BY', \Phi \rangle$, donc qu'au sens des distributions, $(BY)' = B'Y + BY'$.

En appliquant cette formule avec $B = e^{-tA}$ et $Y = X_T$, on obtient

$$(e^{-At}X_T)' = -Ae^{-At}X_T + e^{-At}X_T'$$

En utilisant le fait que $X_T' = AX_T$, on constate alors que $(e^{-At}X_T)' = 0$, au sens des distributions, et donc il existe un vecteur constant v tel que $e^{-At}X_T = v$. Ainsi X_T est un vecteur de fonctions de classe C^∞, et en particulier T est une fonction de classe C^∞. ■

On a à présent tous les ingrédients pour démontrer le théorème 3.1.

Lemme 2.6 Soit $T \in D'(\mathbb{R})$. Si l'espace F engendré par les translations de T est de dimension finie, alors la distribution T est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Démonstration On reprend exactement la démonstration du théorème classique 2.1, en modifiant le vocabulaire où il faut.

Si T est identiquement nulle, le résultat est immédiat puisque T est alors solution de l'EDO $y = 0$. Supposons donc que T soit non nulle.
Pour abréger les notations, on notera $T_a := \tau_a T$. Soit $(T_{a_1}, T_{a_2}, \cdots, T_{a_d})$ une base de F.
Montrons qu'il existe des fonctions test $\phi_1, \cdots, \phi_d$ tels que la matrice $(\langle T_{a_i}, \phi_j \rangle)_{i,j}$ soit inversible.
Considérons, pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$, la forme linéaire d'évaluation

$$\begin{array}{rccc} ev_\phi : & F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S & \longmapsto & \langle S, \phi \rangle. \end{array}$$

Alors la famille $(ev_\phi)_{\phi \in D(\mathbb{R})}$ est génératrice de F^*. En effet, on peut raisonner par orthogonalité. Si $S \in \mathrm{Vect}(ev_\phi, \phi \in D(\mathbb{R}))^\perp$, alors pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$, on a $\langle S, \phi \rangle = 0$, donc S est nulle. Ainsi $\mathrm{Vect}(ev_\phi, \phi \in D(\mathbb{R})) = F^*$.
Il existe donc des fonctions test $\phi_1, \cdots, \phi_d$ telles que $(ev_{\phi_1}, \cdots, ev_{\phi_d})$ soit une base de F^*.

Vérifions maintenant que la matrice $M = (\langle T_{a_i}, \phi_j \rangle)_{i,j}$ est inversible, en montrant que les lignes $L_1, \cdots, L_d$ forment une famille libre.
Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ tels que $\sum_{i=1}^d \lambda_i L_i = 0$.
Alors pour tout j,

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i \langle T_{a_i}, \phi_j \rangle = 0$$

ce qui revient à écrire que pour tout j,

$$ev_{\phi_j}\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i T_{a_i}\right) = 0$$

Comme $(ev_{\phi_1}, \cdots, ev_{\phi_d})$ engendre F^*, ces égalités impliquent que $\sum_{i=1}^d \lambda_i T_{a_i} \in (F^*)^\perp = \{0\}$. Donc on se retrouve avec

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i T_{a_i} = 0$$

mais $(T_{a_1}, \cdots, T_{a_d})$ est une famille libre, donc pour tout i, $\lambda_i = 0$.
Ainsi la matrice M est inversible.

Pour finir la démonstration, on va montrer que toutes les dérivées de T sont dans l'espace F. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la translaté T_a est dans F par définition, donc on peut l'écrire dans la base $(T_{a_1}, \cdots, T_{a_d})$:

$$T_a = \sum_{i=1}^d \lambda_i(a) T_{a_i}.$$

En particulier, pour tout j,

$$\langle T_a, \phi_j \rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i(a) \langle T_{a_i}, \phi_j \rangle$$

ce qu'on peut réécrire en utilisant la matrice M :

$$\begin{pmatrix} \langle T_a, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle T_a, \phi_d \rangle \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_d(a) \end{pmatrix}$$

Comme M est inversible, on a finalement que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_d(a) \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} \langle T_a, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle T_a, \phi_d \rangle \end{pmatrix}$$

Or par la proposition 3.4 les fonctions $a \mapsto \langle \tau_a T, \phi_j \rangle$ sont de classe C^1, et la matrice M ne dépend pas de la variable a. Donc pour tout j, la fonction $a \mapsto \lambda_j(a)$ est de classe C^1. En dérivant par rapport à a dans l'égalité 4, on obtient que pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\langle (\tau_a T)', \phi \rangle = \sum_{i=1}^d \lambda'(a) \langle T_{a_i}, \phi \rangle$$

et en particulier quand $a = 0$,

$$T' = \sum_{i=1}^d \lambda'(0) T_{a_i}$$

On a donc une expression de la dérivée T' en fonction des translatés T_{a_i}, ce qui montre que $T' \in F$.
De la même manière, on déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la distribution $T^{(k)}$ est dans F. Cet espace F étant de dimension finie, la famille $(T^{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est nécessairement liée, donc il existe un entier p et des constantes $c_0, c_1, \cdots, c_p$ tels que

$$c_p T^{(p)} + \cdots + c_1 T' + c_0 T = 0$$

La distribution T est bien solution d'une EDO linéaire homogène à coefficients constants. ■

En appliquant la proposition 3.5 à la suite de ce lemme, on obtient le théorème 3.1.