Prolongement de la fonction ζ

Perrine Jouteur

Ce développement est long, donc il vaut mieux faire plusieurs entraînements pour le faire tenir en quinze minutes. Il se place dans les leçons 207, 235, 239, 245, 265, et se trouve dans le livre *Analyse complexe* par Amar et Matheron.

1 Les prérequis

Définition 1.1 Fonction ζ sur $\Re(s) > 1$.
Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$, on définit la série suivante

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Remarque 1.1 Cette série a bien un sens car pour s de partie réelle strictement plus grande que 1, on a $|1/n^s| = 1/n^{\Re(s)}$.

Proposition 1.1 La fonction ζ définie ci-dessus est holomorphe sur le demi-plan $\{\Re > 1\}$.

Démonstration
Théorème d'holomorphie sous l'intégrale. ■

Proposition 1.2 La fonction Γ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui ne s'annule pas, dont les pôles sont simples et sont les entiers négatifs. De plus, pour tout z tel que cela ait un sens, on a

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

2 Le développement

Théorème 2.1 La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec comme seul pôle le point 1, et c'est un pôle simple, de résidu 1.

Démonstration
• Étape 1 : Montrer que pour tout $s > 1$, on a

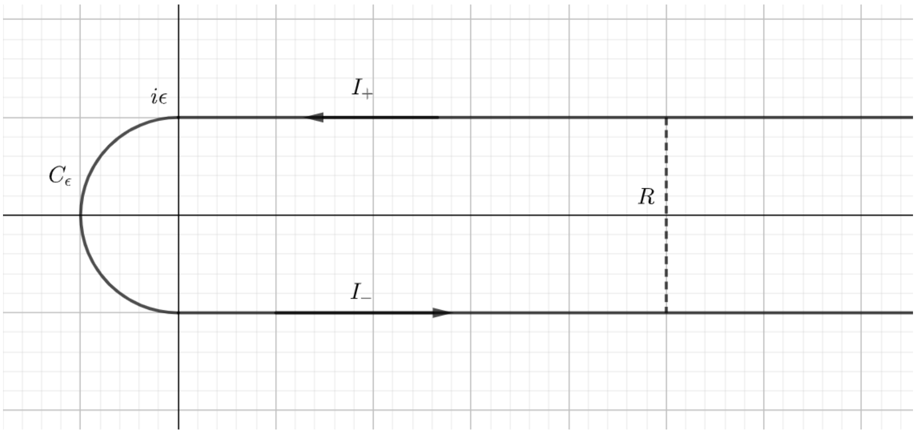
$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

Il s'agit d'un simple calcul, on utilise Fubini-Tonelli et on calcule la somme.

• Étape 2 : On retravaille l'expression de l'intégrale. On va montrer que, pour tout $\alpha > 0$ et pour $\epsilon_0 < 2\pi$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt = \frac{1}{e^{2i\pi\alpha} - 1} \int_{\gamma_{\epsilon_0}} \frac{z^\alpha}{e^z - 1} dz \quad (1)$$

où γ_{ϵ_0} est le contour suivant (en traits pleins) :



Pour cela, fixons $\alpha > 0$ et introduisons la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z^\alpha}{e^z - 1} \end{array}.$$

On choisit la détermination de l'argument qui arrive dans $]0, 2\pi[$ de sorte que la détermination du logarithme associée est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, et ainsi f est méromorphe. De plus, on constate qu'on a l'inégalité ci-dessous, dont on va se servir sans arrêt dans la suite :

$$\forall x \geqslant 0, \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x+iy)| \leqslant \frac{(x+|y|)^\alpha}{e^x - 1} \quad (*).$$

Soit $\epsilon_0 \in]0, 2\pi[$. Montrons déjà que f est intégrable sur le contour γ_{ϵ_0}. Comme f est holomorphe au voisinage de ce chemin, il suffit de montrer que f est intégrable sur I_+ et sur I_-. D'après $(*)$, pour tout $z = x \pm i\epsilon_0$ avec $x \geqslant 0$,

$$|f(z)| \leqslant \frac{(x+\epsilon_0)^\alpha}{e^x - 1} \sim_{x \mapsto +\infty} x^\alpha e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi f est intégrable sur γ_{ϵ_0}. De plus, grâce à l'inégalité $(*)$, par un théorème d'holomorphie sous le signe intégral on a que la fonction $\alpha \longmapsto \int_{\gamma_{\epsilon_0}} \frac{z^\alpha}{e^z - 1} dz$ est holomorphe, et donc si on prouve l'égalité (1), on aura identifié les éventuelles singularités de ζ.

Montrons déjà que pour tout $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, on a $\int_{\gamma_\epsilon} f = \int_{\gamma_{\epsilon_0}} f$.
Pour tout $R > 0$, on applique le théorème de Cauchy à f sur le contour fermé suivant :

Il suffit de montrer que les intégrales de f sur les segments $[R + i\epsilon, R + i\epsilon_0]$ et $[R - i\epsilon, R - i\epsilon_0]$ tendent vers 0 quand R tend vers $+\infty$. C'est le cas, grâce à $(*)$, qui permet de majorer f indépendamment de y sur les segments voulus :

$$\forall y \in [-\epsilon_0, -\epsilon] \cup [\epsilon, \epsilon_0],\ |f(R+iy)| \leqslant \frac{(R+\epsilon_0)^\alpha}{e^R - 1}.$$

Ainsi on a bien :

$$\forall \epsilon \leqslant \epsilon_0,\ \int_{\gamma_\epsilon} f = \int_{\gamma_{\epsilon_0}} f.$$

À présent, on va faire tendre ϵ vers 0 dans l'intégrale de droite. Traitons les morceaux du chemins γ_ϵ séparément.

Cas du demi-cercle. Comme $\dfrac{e^z-1}{z} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} 1$, il existe $A>0$ tel que, dans un voisinage de 0, on ait $|e^z-1| \geqslant A\,|z|$. Alors :

$$\left|\int_{C_\epsilon} f(z)dz\right| \leqslant \frac{\epsilon^{\alpha-1}}{A}\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Cas de la demi-droite I_-. Par notre choix de la détermination du logarithme, on a $(x-i\epsilon)^\alpha \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} x^\alpha e^{2i\pi\alpha}$. Donc par théorème de convergence dominée,

$$\int_{I_-} f(z))dz \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{2i\pi\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x-1}dx.$$

Cas de la demi-droite I_+. De même, on a

$$\int_{I_+} f(z)dz \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x-1}dx.$$

D'où, en recollant les morceaux, l'égalité voulue.

• Étape 3 : On peut alors conclure que

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \frac{1}{e^{2i\pi(s-1)}-1}\int_{\Gamma_{\epsilon_0}}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz\\ &= \frac{e^{-i\pi s}}{2i\sin(\pi s)}\int_{\Gamma_{\epsilon_0}}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz\\ &= \frac{e^{-i\pi s}}{2i\pi}\Gamma(s)\Gamma(1-s)\int_{\Gamma_{\epsilon_0}}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz \text{ (formule des compléments)}\end{aligned}$$

D'où on tire une expression pour ζ, car la fonction Γ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$:

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\epsilon_0}}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz.$$

Il reste maintenant à vérifier que la fonction définie par l'intégrale à paramètre est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et que le tout est méromorphe avec un seul pôle en 1.
Comme on a choisit une bonne détermination du logarithme, la fonction $s\mapsto z^{s-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, pour tout $|s|\leqslant M$ avec $M>0$, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, on a

$$\left|\frac{z^{s-1}}{e^z-1}\right| \leqslant \frac{z^{M-1}}{e^z-1}$$

et la fonction $z\mapsto \frac{z^{M-1}}{e^z-1}$ est intégrable sur Γ_{ϵ_0}. Par théorème d'holomorphie sous l'intégrale, l'intégrale à paramètre dans la formule (*) est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Ainsi les éventuels pôles de ζ sont parmi les pôles de $s\mapsto\Gamma(1-s)$, c'est-à-dire parmi les entiers strictement positifs. Or il n'y a pas de problème en les entiers supérieurs à 2 (séries de Riemann). Donc le seul pôle possible est en 1. Il se trouve qu'en effet, 1 est un pôle simple de ζ. Montrons le :
Par le théorème des résidus, on calcule que l'intégrale vaut $2i\pi$ quand $s=1$. Calculons le résidus de $s\mapsto\Gamma(1-s)$ en 1 : on a

$$(s-1)\Gamma(1-s) = -\Gamma(-s) \underset{s\to 1}{\longrightarrow} -1.$$

Ainsi $(s-1)\zeta(s)\underset{s\to 1}{\longrightarrow} 1$, et donc $\mathrm{Res}(\zeta,1)=1$. ■