Courbes $\mathbb{A}^1$-contractiles

Soutenance de stage

Perrine Jouteur

02 Septembre 2021

Objectif : la droite affine est la seule courbe lisse $\mathbb{A}^1$-contractile.

1. Schémas
   - Espaces annelés
   - Schémas
   - Morphismes de schémas
2. Courbes
   - Courbes abstraites, courbes concrètes
   - Régularité
   - Courbes projectives
3. Courbes $\mathbb{A}^1$-contractiles
   - $\mathbb{A}^1$-Homotopie
   - La seule courbe $\mathbb{A}^1$-contractile...

Spectre d'anneau

Soit R un anneau commutatif.

$$\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \text{ idéal premier de } R\}$$

Les fermés de $\mathrm{Spec}(R)$ sont de la forme

$$\boxed{V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R),\ I \subset \mathfrak{p}\}}$$

pour I un idéal de R.

Les ouverts de base sur $\mathrm{Spec}(R)$: pour $f \in R$,

$$\boxed{D(f) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R),\ f \notin \mathfrak{p}\} = V((f))^c}$$

Exemples

- Prenons $R = k$, un corps. Alors $\mathrm{Spec}(k)$ est un singleton.

- Prenons $R = \mathbb{C}[T]$. On note $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T])$.

Les idéaux premiers de $\mathbb{C}[T]$ sont :

- les idéaux maximaux, de la forme $(T - a)$, pour $a \in \mathbb{C}$;
- l'idéal premier $\{0\}$, que l'on notera ξ.

Donc $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \sqcup \{\xi\}$.
On appelle cet espace la droite affine complexe.

Espace annelé

Revenons à un anneau R quelconque, et notons $X = \mathrm{Spec}(R)$.
On construit un faisceau O_X sur X.

Pour tout $f \in R$, on pose

$$\boxed{O_X(D(f)) := R_f = (f)^{-1}R}$$

Et, si $D(f) \subset D(g)$, on construit un morphisme de restriction :

$$\boxed{\mathrm{Res}_{g,f} : R_g \longrightarrow R_f}$$

Un espace annelé $(X = \mathrm{Spec}(R), O_X)$ défini comme ci-dessus est un schéma affine.

Définition de schéma

Soit (X, O_X) un espace annelé. On dit que X est un schéma lorsqu'il existe un recouvrement ouvert

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

tel que pour tout λ, U_λ soit isomorphe à un schéma affine:

$$U_\lambda \cong \mathrm{Spec}(R_\lambda)$$

Morphisme de schémas

Un morphisme de X vers Y est la donnée de

- une application continue $f : X \longrightarrow Y$;
- une famille de morphismes $\hat{f}_V : O_Y(V) \longrightarrow O_X(f^{-1}(V))$

telle que pour tous ouverts $W \subset V$ de Y, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} O_Y(V) \arrow[r, "\hat{f}(V)"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_{V,W}"'] & O_X(f^{-1}(V)) \arrow[d, "\mathrm{Res}_{f^{-1}(V),f^{-1}(W)}"] \\ O_Y(W) \arrow[r, "\hat{f}(W)"] & O_X(f^{-1}(W)) \end{tikzcd}$$

Proposition

Tout morphisme d'anneaux $\phi : A \longrightarrow B$ induit un morphisme de schémas $f : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$.

Plus explicitement :

- Pour tout idéal $\mathfrak{p} \in B$, $f(\mathfrak{p}) = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$;
- Pour tout $a \in A$, $\hat{f}_{D(a)} : A_a \longrightarrow B_{\phi(a)}$ se déduit directement de ϕ.

Dans toute la suite, k désigne un corps algébriquement clos.

Schéma sur un corps

Soit X un schéma. On dit que X est un schéma sur k lorsqu'on se donne un morphisme de schémas

$$f_X : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$$

Par exemple, la droite affine $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ est un schéma sur $\mathbb{C}$. En effet, le morphisme d'anneaux $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ induit un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$.

Définition de variété

Une variété abstraite sur k est un schéma X sur k recouvert par un nombre fini de schémas affines

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Spec}(R_i)$$

tels que pour tout i, R_i est une k-algèbre intègre de type fini.

Courbes abstraites

Une courbe est une variété sur k de dimension 1.

Lien entre courbe abstraite et courbe classique :

Soit $F \in k[T_1, ..., T_n]$. Notons $V(F) = \{P \in k^n \mid F(P) = 0\}$. Par le Nullstellensatz, il y a correspondance bijective entre les points fermés de $\mathrm{Spec}(k[T_1, ..., T_n]/(F))$ et $V(F)$.

$$\mathrm{Specm}(k[T_1, ..., T_n]/(F)) \leftrightarrow V(F)$$

Courbes lisses

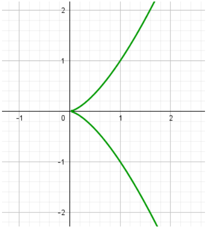
Critère jacobien

Soit $X = \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n]/(F_1, \ldots, F_r))$ une courbe affine.
Soit $P = (a_1, \ldots, a_n)$ un point fermé de X.
La courbe X est lisse en P si et seulement si la matrice jacobienne $\left(\frac{dF_i}{dx_j}(P)\right)_{i,j}$ est de rang $n-1$.

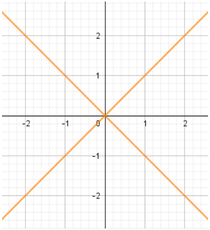
Exemples

- La droite affine $\mathbb{A}^1(k)$ est une courbe lisse.

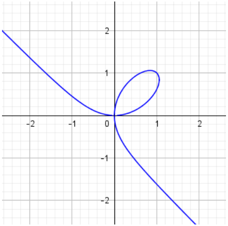
- Les trois courbes suivantes ne sont pas lisses :



(a) $y^2 - x^3 = 0$



(b) $x^2 - y^2 = 0$



(c) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$

Projectivisation

Proposition

Soit X une courbe affine sur k. Alors la projectivisation $\overline{X}$ de X est une courbe projective sur k, et on a

$$\overline{X} = X \sqcup \{x_1, ..., x_m\}$$

avec les x_i des points fermés de $\overline{X}$.
De plus, si X est lisse, alors $\overline{X}$ l'est aussi.

Par exemple, $\overline{\mathbb{A}^1(k)} = \mathbb{P}^1(k)$, la droite projective.

Théorème

Une courbe sur k est ou bien affine ou bien projective.

La seule courbe lisse $\mathbb{A}^1$-contractile est la droite affine $\mathbb{A}^1(k)$.

Equivalence homotopique de morphismes

Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux morphismes de schémas sur k. On a $f \sim_H g$ lorsqu'il existe

$$\boxed{H : X \times_k \mathbb{A}^1(k) \longrightarrow Y}$$

telle que $H_{|X \times_k \{0\}} = f$ et $H_{|X \times_k \{1\}} = g$.

Équivalence homotopique de schémas

Soient X et Y deux schémas sur k.

On dit que X est homotopiquement équivalent à Y, noté $X \sim Y$, lorsqu'il existe des morphismes $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ tels que $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$.

Schéma $\mathbb{A}^1$-contractile

On dit que X est $\mathbb{A}^1$-contractile lorsque

$$X \sim \mathrm{Spec}(k)$$

Exemple

La droite affine $\mathbb{A}^1(k)$ est $\mathbb{A}^1$-contractile. En effet, on a

$$f : \mathbb{A}^1(k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k) \text{ et } \sigma_0 : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$$

tels que $f \circ \sigma_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(k)}$ et $\sigma_0 \circ f \sim \mathrm{id}_{\mathbb{A}^1}$ via l'homotopie :

$$\begin{array}{rccc} H : & \mathbb{A}^1(k) \times_k \mathbb{A}^1(k) & \longrightarrow & \mathbb{A}^1(k) \\ & (x, t) & \longrightarrow & xt \end{array}$$

Théorème

Soit X une courbe $\mathbb{A}^1$-contractile lisse sur k. Alors

$$X \cong \mathbb{A}^1(k)$$

Idées de démonstration :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Soit } X \text{ une courbe lisse } \mathbb{A}^1\text{-contractile} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \text{ est projective} \arrow[d] & & X \text{ est affine} \arrow[d, "\text{projectivisation}"] \\
\text{Absurdité} & & \overline{X} \cong \mathbb{P}^1(k) \arrow[d] \\
 & & X \cong \mathbb{A}^1(k)
\end{tikzcd}$$

Annexes

Les schémas projectifs

Soit R un anneau gradué : $R = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} R_d$, avec $R_d R_e \subset R_{d+e}$. On définit le schéma projectif associé par

$$\mathrm{Proj}(R) := \left\{ \mathfrak{p} \text{ idéal premier homogène de } R, \text{ tel que } \bigoplus_{d>0} R_d \not\subseteq \mathfrak{p} \right\}.$$

On munit cet espace d'une topologie où les fermés sont donnés par les idéaux homogènes I de R :

$$V_+(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$$

Et à tout élément homogène $f \in R$ est associé un ouvert de base : $D_+(f) := V_+((f))^c$.

Exemple : les schémas projectifs

Le faisceau d'anneaux sur $\mathrm{Proj}(R)$ est définit sur les ouverts de base par

$$O_{\mathrm{Proj}(R)}(D_+(f)) = R_{(f)} = \left\{ \frac{g}{f^r} \mid r \in \mathbb{N}, g \in R_{r\,\deg(f)} \right\}$$

Montrons que l'espace $(\mathrm{Proj}(R), O_{\mathrm{Proj}(R)})$ ainsi construit est un schéma :

Soit f un élément homogène de R. Alors $D_+(f) \cong \mathrm{Spec}(R_{(f)})$.

Projectivisation

Soit $X = \mathrm{Spec}(R)$ une variété sur k, avec $R = k[T_1, ..., T_n]/I$.

La projectivisation de X est la variété projective suivante :

$$\overline{X} = \mathrm{Proj}(k[T_0, ..., T_n]/\overline{I})$$

où l'idéal $\overline{I}$ est engendré par les polynômes $T_0^d F\left(\frac{T_1}{T_0}, ..., \frac{T_n}{T_0}\right)$ pour $F \in I$ de degré d.

Par exemple, $\overline{\mathbb{A}^n(k)} = \mathbb{P}^n(k)$

Exemple

Soit $X := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T_1, T_2]/(T_2 - T_1^2))$, une variété affine de dimension 1. INSERER FIGURE.
Sa projectivisation consiste à ajouter un point à l'infini. En effet,

$$\overline{X} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]/(T_2 T_0 - T_1^2))$$

Et les points fermés de cette variété sont de deux sortes :

- les points de la forme $[1 : x_1 : x_2]$ avec $x_1^2 = x_2$ (qui sont les points de X) ;
- un point "à l'infini" $[0 : 1 : 1]$.

Proposition

Soit X une courbe affine sur k. Alors la projectivisation $\overline{X}$ de X est une courbe projective sur k, et on a

$$\overline{X} = X \sqcup \{x_1, ..., x_m\}$$

avec les x_i des points fermés de $\overline{X}$.
De plus, si X est lisse, alors $\overline{X}$ l'est aussi.

Produit fibré

Soient X et Y deux schémas sur k.

Le produit fibré $X \times_k Y$ est l'unique schéma, muni de projections

$$\pi_X : X \times_k Y \longrightarrow X \text{ et } \pi_Y : X \times_k Y \longrightarrow Y$$

qui respectent :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\exists!"] \arrow[rr, bend left, "\phi_X"] \arrow[dr, bend right, "\phi_Y"'] & X \times_k Y \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\pi_Y"] & X \arrow[d, "f_X"] \\
& Y \arrow[r, "f_Y"] & \mathrm{Spec}(k)
\end{tikzcd}$$

Proposition

Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ deux schémas sur k.
Alors $X \times_k Y = \mathrm{Spec}(A \otimes_k B)$.

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^1(k) \times_k \mathbb{A}^1(k) &= \mathrm{Spec}(k[T]) \times_k \mathrm{Spec}(k[T]) \\
&= \mathrm{Spec}(k[T] \otimes_k k[T]) \\
&= \mathrm{Spec}(k[T_1, T_2]) \\
&= \mathbb{A}^2(k)
\end{aligned}$$

Dimension de schéma

Dimension

Soit X un schéma. La dimension de X est le maximum des longueurs des chaînes de fermés irréductibles de X :

$$Z_0 \subset \ldots \subset Z_n \subset X$$

Par exemple, l'espace affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n])$ est de dimension n.

De même, l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[T_0, \ldots, T_n])$ est de dimension n.

Schémas intègres

Soit X un schéma. On dit que X est intègre lorsque

- X est irréductible (on ne peut pas l'écrire comme union de deux fermés propres);
- toutes les fibres $O_X(x)$ sont des anneaux réduits (le seul élément nilpotent est 0).

Proposition

Soit $X = \mathrm{Spec}(R)$ un schéma affine.
Alors X est intègre si et seulement si R est intègre.

Exemple d'espace annelé

Reprenons le cas de la droite affine $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[T])$.

Soit F un polynôme dans $\mathbb{C}[T]$, $F = \prod_{i=1}^{d}(T - \alpha_i)^{m_i}$.
Alors

$$D(F) \simeq (\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_d\}) \sqcup \{\xi\}$$

Et l'anneau associé est

$$O_{\mathbb{A}^1(\mathbb{C})}(D(F)) = \mathbb{C}[T]_F = \left\{ \frac{G}{F^r} \mid G \in \mathbb{C}[T], r \in \mathbb{N} \right\}$$

C'est l'ensemble des fractions rationnelles qui sont régulières partout sauf peut-être sur les racines de F.

Ainsi à tout ouvert U de X, on associe un anneau $O_X(U)$, et à chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$, on associe un morphisme d'anneau $\mathrm{Res}_{U,V} : O_X(U) \longrightarrow O_X(V)$, tels que :

- $\mathrm{Res}_{U,U} = \mathrm{id}_U$;
- Si $W \subset V$ et $V \subset U$, alors $\mathrm{Res}_{U,W} = \mathrm{Res}_{V,W} \circ \mathrm{Res}_{U,V}$.
- De plus, pour $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, et $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \prod O_X(U_\lambda)$ telle que

$$\mathrm{Res}_{U_\lambda, U_\lambda \cap U_\mu}(s_\lambda) = \mathrm{Res}_{U_\mu, U_\lambda \cap U_\mu}(s_\mu) \text{ pour tout } \lambda, \mu \in \Lambda$$

il existe une unique section $s \in O_X(U)$ telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\mathrm{Res}_{U,U_\lambda}(s) = s_\lambda$.

Exemple : les immersions ouvertes

Soit X un schéma et U un ouvert de X.
On peut munir U d'une structure de schéma : pour tout ouvert V de X, on pose juste

$$O_U(U \cap V) = O_X(U \cap V)$$

Alors l'inclusion $i : U \longrightarrow X$ et les applications de restrictions $\mathrm{Res}_{V,U\cap V} : O_X(V) \longrightarrow O_X(U \cap V)$ définissent un morphisme de schémas de U dans X.

De manière générale, une immersion ouverte est la composition d'une inclusion et d'un isomorphisme.

Équivalence homotopique naïve

Deux morphismes $f, g : X \longrightarrow Y$ de schémas sur k sont homotopiquement équivalent, noté $f \sim g$, lorsqu'il existe un nombre fini de morphismes $h_i : X \longrightarrow Y$ tels que

- $h_0 = f$;
- $h_n = g$;
- $h_i \sim_H h_{i+1}$ pour tout i.

Construction de la catégorie $\mathbb{A}^1$-homotopique

• On considère la catégorie des préfaisceaux simpliciaux. Un schéma peut être vu comme un préfaisceau simplicial via

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{X}: & \mathrm{Sm}_k & \longrightarrow & sSET \\ & Z & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & SET \\ [n] & \longmapsto & [Z, X] \end{array} \right) \end{array}$$

• On localise cette catégorie, en inversant les projections $X \times_k \mathbb{A}^1(k) \longrightarrow X$.

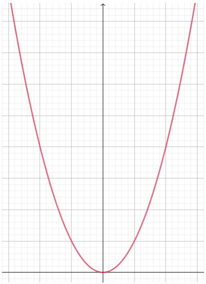
• On obtient la catégorie $\mathbb{A}^1$-homotopique $H_{\mathbb{A}^1(k)}$. Une flèche bijective de cette catégorie est appelée une équivalence faible.

Ceci définit bien une topologie :

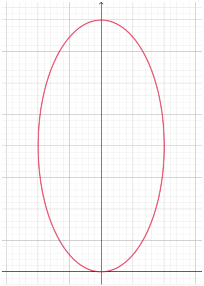
- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$
- $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$
- $V(\mathrm{Spec}(R)) = \emptyset$ and $V(\{0\}) = \mathrm{Spec}(R)$

Exemple

Soit $X := \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T_1, T_2]/(T_2 - T_1^2))$, une variété affine de dimension 1.



(d) $y - x^2 = 0$



(e) $yz - x^2 = 0$

Sa projectivisation consiste à ajouter un point à l'infini.

Nullstellensatz

Théorème

Soit k un corps algébriquement clos. Soit I un idéal de $k[T_1, ..., T_n]$. Alors

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$