Une base pour les modules de Specht

Florian Tilliet et Perrine Jouteur

Novembre 2020

Pour toute la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Partition de n**. Exemple : $\lambda = (5, 3, 1)$

Pour toute la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Partition de n**. Exemple : $\lambda = (5, 3, 1)$
- **Tableau**. Exemple :

$$\begin{matrix} 5 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & & \\ 9 & & & & \end{matrix}$$

Pour toute la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Partition de n**. Exemple : $\lambda = (5, 3, 1)$
- **Tableau**. Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & & \\ 9 & & & & \end{array}$$

- **Tabloïde**. Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & & \\ 9 & & & & \end{array} \simeq \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & & \\ 9 & & & & \end{array} \in \begin{array}{|ccccc} \hline 1 & 2 & 5 & 7 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 6 & & \\ \hline 9 & & & & \\ \hline \end{array}$$

Pour toute la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Partition de n**. Exemple : $\lambda = (5, 3, 1)$
- **Tableau**. Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & & \\ 9 & & & & \end{array}$$

- **Tabloïde**. Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & & \\ 9 & & & & \end{array} \simeq \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & & \\ 9 & & & & \end{array} \in \begin{array}{ccccc} \hline 1 & 2 & 5 & 7 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 6 & & \\ \cline{1-3} 9 & & & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

- $e_t = \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}$

Exemple : si $t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}$ alors $e_t = \begin{array}{cc} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array} - \begin{array}{cc} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1} \end{array}$

Objectif de la présentation

Rappel : $S^\lambda = \mathbb{C}[\ \{e_t \mid t \text{ tableau de forme } \lambda\}\ ]$

On a vu que $S^\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]e_t$, pour n'importe quel tableau t de forme λ (on dit que S^λ est cyclique).

Objectif de la présentation

Rappel : $S^\lambda = \mathbb{C}[\ \{e_t \mid t \text{ tableau de forme } \lambda\}\ ]$

On a vu que $S^\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]e_t$, pour n'importe quel tableau t de forme λ (on dit que S^λ est cyclique).

Théorème

L'ensemble $\{e_t \mid t \text{ tableau standard}\}$ est une $\mathbb{C}$-base de S^λ.

Référence : Sagan, *The Symetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms and Symetric Functions*, Springer (2001).

1 Quelques définitions
- Où il est question de tri
- Après le tri, l'ordre
- Illustration

2 Une condition de domination
- Un petit lemme
- Le lien avec les tableaux standards

3 On recolle les morceaux
- Une condition d'indépendance
- Le résultat

Les tableaux standard

Définition

Soit $\lambda \vdash n$ et t un tableau de forme λ. On dit que t est standard lorsque les lignes et les colonnes de t sont triées par ordre croissant.

Les tableaux standard

Définition

Soit $\lambda \vdash n$ et t un tableau de forme λ. On dit que t est standard lorsque les lignes et les colonnes de t sont triées par ordre croissant.

Exemple : pour $n = 8$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & & \\ 6 & 8 & & \end{array}$$

Remarque : on considère que les espaces blancs valent $+\infty$.

Composition et partition

Définition

Une composition de n de taille k (pour $k \in [\![1, n]\!]$) est un k-uplet d'entiers positifs (possiblement nuls) $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$$

Exemple : pour $n = 10$

$$(4, 1, 2, 0, 2, 1) \text{ ou } (5, 4, 1)$$

Un ordre sur les compositions

Définition

Soient λ et μ deux compositions de n. On dit que μ domine λ (ou que λ est dominée par μ) lorsque pour tout $i \geqslant 1$,

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_i \leqslant \mu_1 + \ldots + \mu_i$$

On prend $\lambda_i = 0$ et $\mu_i = 0$ si i dépasse la taille des compositions.

Remarque : c'est une généralisation de la relation d'ordre sur les partitions

Définition

Soit $\{t\}$ un tabloïde, de forme λ. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note :

- $\{t^i\}$ le tabloïde formé par les éléments de $\{t\}$ inférieurs à i.
- λ^i la composition associée à $\{t^i\}$

Définition

Soit $\{t\}$ un tabloïde, de forme λ. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note :

- $\{t^i\}$ le tabloïde formé par les éléments de $\{t\}$ inférieurs à i.
- λ^i la composition associée à $\{t^i\}$

Exemple : On prend $\{t\} = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 4 & & \\ 2 & & \end{array}$

$$\{t^i\} = \quad \begin{array}{c} 1 \\ . \\ . \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ . \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ . & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 4 & & \\ 2 & & \end{array}$$

$$\lambda^i = \quad (1,0,0) \qquad (1,0,1) \qquad (2,0,1) \qquad (2,1,1) \qquad (3,1,1)$$

Un ordre sur les tabloïdes

Définition

Soient $\{t\}$ et $\{s\}$ deux tabloïdes de formes λ et μ respectivement. On dit que $\{s\}$ domine $\{t\}$ lorsque pour tout $j \geqslant 1$, μ^j domine λ^j.

En déroulant la définition, on a : $\{s\}$ domine $\{t\}$ lorsque pour tout $i \geqslant 1$ et tout $j \geqslant 1$, on a

$$\lambda_1^j + \ldots + \lambda_i^j \leqslant \mu_1^j + \ldots + \mu_i^j$$

Exemple

On considère

$$\{t\} = \begin{array}{|cc} \hline 1 & 3 \\ \hline 4 & \\ \cline{1-1} 2 & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \text{et} \quad \{s\} = \begin{array}{|ccc} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

<u>Remarque</u> : les tableaux dominants sont ceux qui sont compacts, et les tableaux dominés sont ceux qui sont étirés en hauteur.

1 Quelques définitions
- Où il est question de tri
- Après le tri, l'ordre
- Illustration

2 Une condition de domination
- Un petit lemme
- Le lien avec les tableaux standards

3 On recolle les morceaux
- Une condition d'indépendance
- Le résultat

Lemme de domination

Soient $\lambda \vdash n$, et $\{t\}$ un tabloïde de forme λ. Soient $k, \ell \in [\![1, m]\!]$ tels que $k < \ell$.
On suppose que le numéro k apparaît dans une ligne plus basse que celle du numéro ℓ.

Alors $(\ell\ k) \cdot \{t\}$ domine $\{t\}$.

Lemme de domination

Soient $\lambda \vdash n$, et $\{t\}$ un tabloïde de forme λ. Soient $k, \ell \in [\![1, m]\!]$ tels que $k < \ell$.
On suppose que le numéro k apparaît dans une ligne plus basse que celle du numéro ℓ.

Alors $(\ell\ k) \cdot \{t\}$ domine $\{t\}$.

Exemple : $\{t\} = \begin{array}{cc} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}$

On a $1 < 2$ et 1 est plus bas que 2, donc $\begin{array}{cc} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$ domine $\{t\}$.

Démonstration du lemme de domination

On note :

- $\{s\} := (k\ \ell) \cdot \{t\}$
- $(\mu^i)_i$ la suite de compositions associées à $\{s\}$
- $(\lambda^i)_i$ la suite de compositions associées à $\{t\}$
- r_k (resp. r_ℓ) la ligne de k (resp. ℓ) dans $\{t\}$

$$\{t\} = \begin{array}{c} \hline .\ \ .\ \ . \\ \hline \ell\ \ .\ \ . \\ \hline .\ \ .\ \ . \\ \hline k\ \ .\ \ . \\ \hline .\ \ .\ \ . \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ r_\ell \\ \\ r_k \\ \\ \end{array} \qquad \{s\} = \begin{array}{c} \hline .\ \ .\ \ . \\ \hline k\ \ .\ \ . \\ \hline .\ \ .\ \ . \\ \hline \ell\ \ .\ \ . \\ \hline .\ \ .\ \ . \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ r_\ell \\ \\ r_k \\ \\ \end{array}$$

- Pour $i < k$, les entiers entre 1 et i sont aux mêmes places dans $\{t\}$ et dans $\{s\}$, donc $\lambda^i = \mu^i$.

- De même, pour $i \geq \ell$, on prend en compte k et ℓ donc $\lambda^i = \mu^i$.

- Soit $i \in [\![k, \ell - 1]\!]$.

Si on écrit $\lambda^i = (a_1, ..., a_{r_\ell}, ..., a_{r_k}, ..., a_m)$, alors on a

$$\mu^i = (a_1, ..., a_{r_\ell} + 1, ..., a_{r_k} - 1, ..., a_m)$$

Donc μ^i domine λ^i.

Vocabulaire

Soit $\lambda \vdash n$. Soit $v \in M^\lambda$, décomposé en $\sum c_i\{t_i\}$. On dit que $\{t_i\}$ apparaît dans v lorsque $c_i \neq 0$.

Vocabulaire

Soit $\lambda \vdash n$. Soit $v \in M^\lambda$, décomposé en $\sum c_i\{t_i\}$. On dit que $\{t_i\}$ apparaît dans v lorsque $c_i \neq 0$.

Corollaire du lemme de domination

Soit s un tableau standard, et $\{t\}$ un tabloïde qui apparaît dans e_s. Alors $\{s\}$ domine $\{t\}$.

Démonstration du corollaire

- Puisque $\{t\}$ apparaît dans e_s, il existe $\sigma \in C_s$ telle que $\{t\} = \sigma \cdot \{s\}$, ou encore $\{s\} = \sigma^{-1} \cdot \{t\}$.

- Comme s est standard, σ^{-1} peut se décomposer en produit de transpositions de la forme $(k\ \ell)$ avec $k < \ell$ et k appartient à une ligne plus basse que ℓ dans $\{t\}$.

- Soit (k, ℓ) un tel couple. D'après le lemme de domination, $(\ell\ k) \cdot \{t\}$ domine $\{t\}$. Par récurrence finie, on conclut que $\sigma^{-1} \cdot \{t\}$ domine $\{t\}$, c'est-à-dire que $\{s\}$ domine $\{t\}$.

Différence entre maximum et maximal

Soit $(A, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

Élément maximum

On dit que $a \in A$ est un élément maximum de A lorsque pour tout $b \in A$, on a $b \leq a$.

Élément maximal

On dit que $a \in A$ est un élément maximal de A lorsqu'il n'existe pas d'éléments $b \in A$ tel que $a < b$.

Lemme

Soit $\lambda \vdash n$. Considérons une famille $(v_1, \ldots, v_m)$ d'éléments de M^λ, et supposons qu'il existe une famille $(\{t_1\}, \ldots, \{t_m\})$ de tabloïdes, telle que :

1. $\{t_i\}$ apparaît dans v_i pour tout i
2. $\{t_i\}$ est maximum dans v_i pour tout i
3. les $\{t_i\}$ sont distincts deux à deux

Alors la famille $(v_1, \ldots, v_m)$ est $\mathbb{C}$-libre.

Démonstration

On suppose $\{t_1\}$ maximal.

Puisque les $\{t_i\}$ sont des maximums des v_i, $\{t_1\}$ n'apparaît que dans v_1.

Soient $(c_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ tels que :

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$$

En décomposant les v_i, le coefficient devant $\{t_1\}$ est c_1 et doit être nul.

On finit par récurrence.

Une famille indépendante dans S^λ

Théorème

Soit $\lambda \vdash n$.
La famille $\{e_s \mid s \text{ est un tableau standard de forme } \lambda\}$ est $\mathbb{C}$-libre.

Démonstration

1 Soit s un tableau standard.

$$e_s := \sum_{C_s} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\{s\}$$

D'après le corollaire :

Corollaire du lemme de domination

Soit s un tableau standard, et $\{t\}$ un tabloïde qui apparaît dans e_s. Alors $\{s\}$ domine $\{t\}$.

$\{s\}$ est maximal dans e_s.

Il n'y a plus qu'à appliquer le lemme pour conclure :

Lemme

Soit $\lambda \vdash n$. Considérons une famille $(v_1, \dots, v_m)$ d'éléments de M^λ, et supposons qu'il existe une famille $(\{t_1\}, \dots, \{t_m\})$ de tabloïdes, telle que :

1. $\{t_i\}$ apparaît dans v_i pour tout i
2. $\{t_i\}$ est maximum dans v_i pour tout i
3. les $\{t_i\}$ sont distincts deux à deux

Alors la famille $(v_1, \dots, v_m)$ est $\mathbb{C}$-libre.