Interprétations géométriques de représentations de GL_2

Perrine Jouteur

Représentation standard et dérivés

$GL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}^2$ de manière naturelle : $M \cdot \binom{x_1}{x_2} = M\binom{x_1}{x_2}$.

Plus généralement

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut considérer :

$$\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^2) = (\mathbb{C}^2)^{\otimes k} / \left(v_1 \otimes \dots \otimes v_k = v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)} \right)$$

avec l'action terme par terme :

$$g \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = (gv_1) \otimes \dots \otimes (gv_k)$$

Proposition

L'espace $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C}^2)$ est une représentation simple de GL_2, de dimension $k+1$.

Notion de fibré

Définition

Soit X une variété algébrique. Un fibré en droite sur X est la donnée d'un morphisme de variétés $\pi : L \longrightarrow X$, tel que :

- $\forall x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ est une droite vectorielle, la fibre ;
- $\forall x \in X$, $\exists U$ voisinage de x, tq $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{C}$.

Sections d'un fibré

Une section d'un fibré $\pi : L \longrightarrow X$ est un morphisme $s : X \longrightarrow L$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$.

L'ensemble des sections du fibré, $\Gamma(X, L)$ est un espace vectoriel.

Action de groupe sur un fibré

Fibré équivariant

Soit $\pi : L \longrightarrow X$ un fibré et G un groupe qui agit sur X et sur L. On dit que le fibré est G-équivariant lorsque

- G agit sur X et sur L par morphismes de variétés ;
- $\forall g \in G, \forall e \in L, \pi(g \cdot e) = g \cdot \pi(e)$.

Proposition

Si $L \longrightarrow X$ est G-équivariant, l'espace des sections $\Gamma(X, L)$ est muni d'une structure de représentation de G, via

$$\forall s \in \Gamma(X, L), \quad (g \cdot s)(x) := g(s(g^{-1}x))$$

Réalisations géométriques

$GL_2(\mathbb{C})$ agit sur la variété $\mathbb{P}^1 := \{\text{droites vectorielles de } \mathbb{C}^2\}$.

On construit deux fibrés sur $\mathbb{P}^1$ par :

$$L_1 = \{(W, w) \ : \ W \text{ droite de } \mathbb{C}^2,\ w \in W\}$$

$$L_2 = \{(W, w) \ : \ W \text{ droite de } \mathbb{C}^2,\ w \in \mathbb{C}^2/W\}$$

Proposition

Ce sont deux fibrés équivariants pour l'action de $GL_2(\mathbb{C})$.
De plus, on obtient la représentation standard grâce à L_2 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(\mathbb{P}^1, L_2) \\ v & \longmapsto & (W \mapsto [v]_W) \end{array}$$

Produit tensoriel de fibrés

Définition

Soient $\pi_1 : L_1 \longrightarrow X$, $\pi_2 : L_2 \longrightarrow X$ deux fibrés en droites sur une variété X.

Le produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$ de L_1 et L_2 est le fibré sur X où les fibres sont données par

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)^{-1}(x) = \pi_1^{-1}(x) \otimes \pi_2^{-1}(x)$$

Proposition

Si les deux fibrés $\pi_1 : L_1 \longrightarrow X$ et $\pi_2 : L_2 \longrightarrow X$ sont G-équivariants, alors pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, $\pi_1^{\otimes a} \otimes \pi_2^{\otimes b}$ est encore G-équivariant.

Application à $GL_2(\mathbb{C})$

Rappel : on a construit deux fibrés GL_2-équivariants sur $\mathbb{P}^1$:

$$L_1 = \{(W, w) \ : \ W \text{ droite de } \mathbb{C}^2, \ w \in W\}$$

$$L_2 = \{(W, w) \ : \ W \text{ droite de } \mathbb{C}^2, \ w \in \mathbb{C}^2/W\}$$

Définition

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on pose $\mathcal{L}(a, b) := L_1^{\otimes a} \otimes L_2^{\otimes b}$.

On obtient ainsi des représentations de $GL_2(\mathbb{C})$, données par les espaces de sections $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}(a, b))$.

Identification des représentations

Proposition

Pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, on a un isomorphisme de représentations

$$\mathrm{Sym}^b(\mathbb{C}^2) \simeq \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}(0, b))$$

Théorème

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, avec $b \geqslant a$. L'espace $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}(a, b))$ est une représentation simple de $GL_2(\mathbb{C})$.
De plus, les représentations obtenues ainsi sont deux à deux non isomorphes.

Merci !