

Analogues quantiques de nombres réels

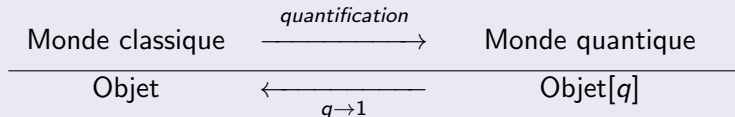
Comité de suivi individuel

Perrine Jouteur, dirigée par Sophie Morier-Genoud

09 juillet 2024

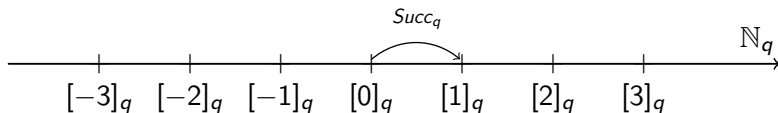
- 1 Quantification de nombres
- 2 Combinatoire et crible cyclique
- 3 Quantification du plan projectif rationnel
- 4 Références

Principe de quantification



Principe de quantification

Monde classique	<i>quantification</i> →	Monde quantique
Objet	← $q \rightarrow 1$	Objet $[q]$
Entiers naturels $n \in \mathbb{N}$		Entiers quantiques $[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} \in \mathbb{N}[q]$
Successeur $Succ(x) = x + 1$		Successeur quantique $Succ_q(x) = qx + 1$



Rationnels quantiques [MGO], [LMG21]

Action par homographie : $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Successesseur

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x) = x + 1$$

"Néginverse"

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(x) = -\frac{1}{x}$$

Successesseur quantique

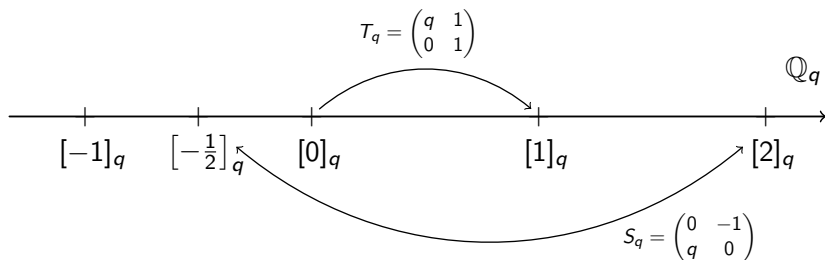
$$T_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_q(x) = qx + 1$$

"Néginverse" quantique

$$S_q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad S_q(x) = -\frac{1}{qx}$$

Groupe modulaire
 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \rangle$

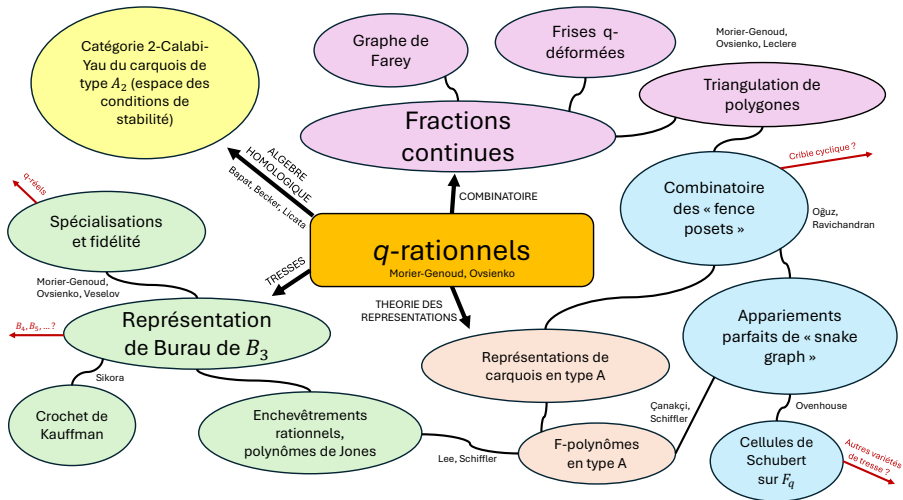
Groupe modulaire quantique
 $\mathrm{PSL}_{2,q}(\mathbb{Z}) = \langle T_q, S_q \rangle \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[q, q^{-1}])$



Un exemple

Quantifions $x = -\frac{5}{2}$. On a $x = T^{-2}ST^2 \cdot 0$, donc

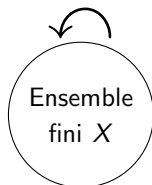
$$\begin{aligned} \left[-\frac{5}{2} \right]_q &= T_q^{-2} S_q T_q^2 \cdot [0]_q \\ &= \begin{pmatrix} -1 - q & -q^{-3} - q^{-2} - 2q^{-1} - 1 \\ q^2 & 1 + q \end{pmatrix} \cdot [0]_q \\ &= \frac{-q^3 - 2q^2 - q - 1}{q^3 + q^4} \in \mathbb{Z}(q). \end{aligned}$$



- 1 Quantification de nombres
- 2 Combinatoire et crible cyclique
- 3 Quantification du plan projectif rationnel
- 4 Références

Principe du crible cyclique [RSW04]

Groupe cyclique C

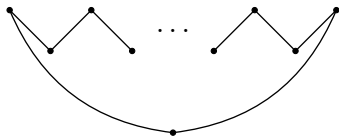


Polynôme
 $f(q)$ tq

$$\forall c \in C, \text{ d'ordre } d, \\ f(e^{\frac{2i\pi}{d}}) = |X^c|.$$

Ici, $f(q) = \text{Tr}(M_q(x_n))$, avec $x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$, pour $(F_n)_n$ la suite de Fibonacci.

Et $X = J(\overline{C}_n)$, les idéaux de la couronne à n sommets :



Quasi crible cyclique

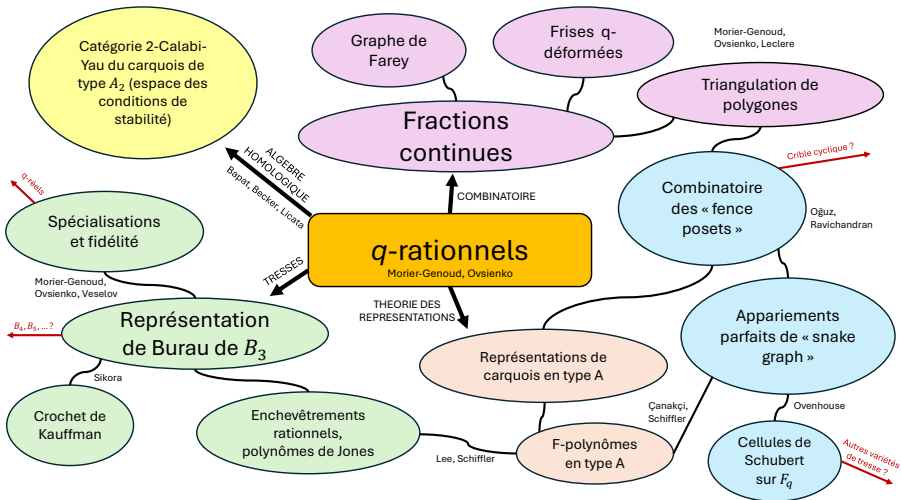
On définit deux involutions des idéaux de $\bar{\mathcal{C}}_n$, la symétrie Sym et le renversement Rv.

- Si $n \equiv 0 [6]$, il y a exactement deux idéaux fixés par Sym et Rv, et

$$|\mathrm{Tr}(M_q(x_n))(q = -1)| = 2.$$

- Sinon, il y a exactement un idéal fixé par Sym et Rv, et

$$|\mathrm{Tr}(M_q(x_n))(q = -1)| = 1.$$



- 1 Quantification de nombres
- 2 Combinatoire et crible cyclique
- 3 Quantification du plan projectif rationnel
- 4 Références

- Groupe de tresse

$$B_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \ (i=1,2), \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1 \rangle.$$

- Groupe de tresse

$$B_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \ (i=1,2), \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1 \rangle.$$

- Représentation réduite de Burau $\rho_q : B_4 \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}[q, q^{-1}])$,

$$\rho_q(\sigma_1) = \begin{pmatrix} q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_q(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -q & q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_q(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -q & q \end{pmatrix}.$$

- Groupe de tresse

$$B_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \ (i=1,2), \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1 \rangle.$$

- Représentation réduite de Burau $\rho_q : B_4 \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}[q, q^{-1}])$,

$$\rho_q(\sigma_1) = \begin{pmatrix} q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_q(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -q & q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_q(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -q & q \end{pmatrix}.$$

- Action de B_4 sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$, via la spécialisation $q = 1$:

$$\rho(\sigma_1) : [r : s : t] \mapsto [r + s : s : t],$$

$$\rho(\sigma_2) : [r : s : t] \mapsto [r : s + t - r : t],$$

$$\rho(\sigma_3) : [r : s : t] \mapsto [r : s : t - s].$$

Classification des orbites

Sous l'action de B_4 , le plan projectif rationnel se décompose en une infinité d'orbites.

Théorème

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) = \{[1 : 0 : 1]\} \sqcup \text{Orb}_{B_4}([0 : 1 : 0]) \sqcup \bigsqcup_{\substack{n \geq 2, 0 < m < n/2 \\ m \wedge n = 1}} \text{Orb}_{B_4}([m : n : m]).$$

Classification des orbites

Sous l'action de B_4 , le plan projectif rationnel se décompose en une infinité d'orbites.

Théorème

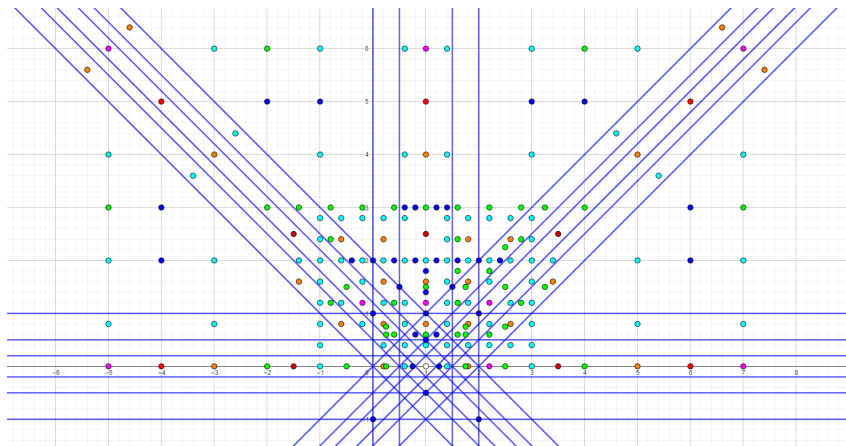
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) = \{[1 : 0 : 1]\} \sqcup \text{Orb}_{B_4}([0 : 1 : 0]) \sqcup \bigsqcup_{\substack{n \geq 2, 0 < m < n/2 \\ m \wedge n = 1}} \text{Orb}_{B_4}([m : n : m]).$$

Chaque orbite est décrite par

$$\text{Orb}_{B_4}([m : n : m]) = \left\{ [r : s : t] \mid \left\{ \begin{array}{l} \gcd(r - t, s) = n; \\ r, t \equiv \pm m \pmod{n}. \end{array} \right. \right\},$$

et

$$\text{Orb}_{B_4}([0 : 1 : 0]) = \{[r : s : t] \mid \gcd(r - t, s) = 1\}.$$



Esquisse des orbites du plan rationnel identifié à $\{[r : s : 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})\}$.
Chaque couleur représente une orbite, l'orbite principale est en bleu foncé.

Quantification

Soit $p_0 := [0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$.

L'application de quantification est une fonction multivaluée

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \text{Orb}_{B_4}(p_0) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}^2(\bar{\Lambda})) \\ p &\longmapsto \{ \text{quantifications de } p \} . \end{aligned}$$

Plus précisément,

$$\mathcal{Q}(p) = \{ \rho_q(\beta)(p_0) \mid \beta \text{ s.t. } \rho(\beta)(p_0) = p \}.$$

Compatibilité avec les q -rationnels

La droite projective se plonge dans le plan projectif par

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}), \quad [r : s] \mapsto [r : s : 0],$$





et de même en version quantique

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}(q)) \xhookrightarrow{\iota_q} \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}(q)), \quad [R(q) : S(q)] \mapsto [R(q) : S(q) : 0].$$

Pour tout $[r : s] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$,

$$\iota_q(\mathcal{Q}([r : s])) \in \mathcal{Q}(\iota([r : s])).$$

- 1 Quantification de nombres
- 2 Combinatoire et crible cyclique
- 3 Quantification du plan projectif rationnel
- 4 Références

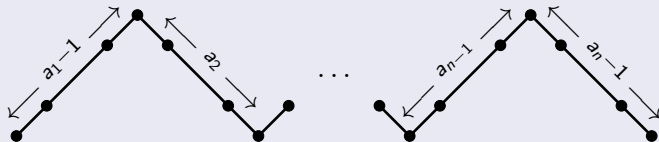
-  Ludivine Leclere and Sophie Morier-Genoud.
 q -deformations of the modular group and of the real quadratic irrational numbers.
2021.
-  Sophie Morier-Genoud and Valentin Ovsienko.
 q -deformed rationals and q -continued fractions.
Continued Fractions.
-  Ezgi Kantarci Oguz and Mohan Ravichandran.
Rank polynomials of fence posets are unimodal.
Discret. Math., 346:113218, 2021.
-  V. Reiner, D. Stanton, and D. White.
The cyclic sieving phenomenon.
Journal of combinatorial theory, 2004.


- 1 Quantification de nombres
- 2 Combinatoire et crible cyclique
- 3 Quantification du plan projectif rationnel
- 4 Références

Poset d'un rationnel

Soit $x = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_{>1}$, en fraction continue : $x = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, avec $n = 2m$ pair.

Le fence poset associé à x est $F(x) =$



Par exemple pour $x = 5/2 = [2, 2]$, on a $F(x) =$ 

Rationnels quantiques et posets

Soit $[x]_q = \left[\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} \right]_q = \frac{R(q)}{S(q)}$ le q -analogue de x .

Proposition

Le numérateur $R(q)$ est la fonction génératrice des idéaux du fence poset $F(x)$.

Exemple : les idéaux de $F(5/2) = 1 \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} 3$ sont

$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\},$$

et $\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]_q = \frac{1+2q+q^2+q^3}{1+q}$.

Traces quantiques

On considère $x = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, avec $n = 2m$ pair.

On associe à x une matrice $M_+(x)$, qui se déforme en

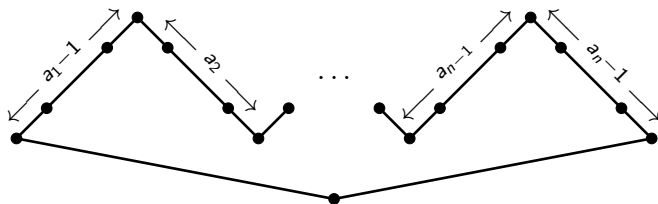
$$M_{+,q}(x) = \begin{pmatrix} R(q) & R'(q) \\ S(q) & S'(q) \end{pmatrix} \text{ tq } [x]_q = \frac{R(q)}{S(q)}.$$

Rotondus quantique

On pose $\text{Rot}_{+,q}(x) = q^m \text{Tr}(M_{+,q}(x)) = q^m(R(q) + S'(q))$.

Posets circulaires [OR21]

Le fence poset circulaire associé à x est $\bar{F}(x) =$



Le rotondus quantique $\text{Rot}_{+,q}(x)$ est la fonction génératrice des idéaux du fence poset circulaire $\bar{F}(x)$.

Suite de Fibonacci et trace quantique

On considère les rationnels $x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$, avec $(F_n)_n$ la suite de Fibonacci, pour $n \geq 2$.

Suite de Fibonacci et trace quantique

On considère les rationnels $x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$, avec $(F_n)_n$ la suite de Fibonacci, pour $n \geq 2$.

Pour quantifier, on associe à x_n une matrice

$$M_{+,q}(x_n) = \begin{pmatrix} qF_n(q) & \tilde{F}_{n-1}(q) \\ qF_{n-1}(q) & \tilde{F}_{n-2}(q) \end{pmatrix} \text{ tq } [x_n]_q = \frac{F_n(q)}{F_{n-1}(q)}.$$

Suite de Fibonacci et trace quantique

On considère les rationnels $x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$, avec $(F_n)_n$ la suite de Fibonacci, pour $n \geq 2$.

Pour quantifier, on associe à x_n une matrice

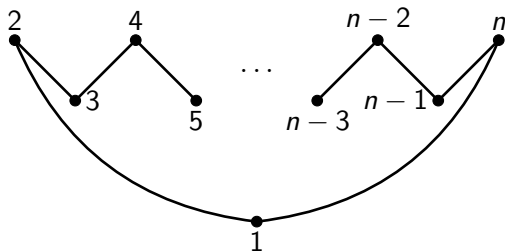
$$M_{+,q}(x_n) = \begin{pmatrix} qF_n(q) & \tilde{F}_{n-1}(q) \\ qF_{n-1}(q) & \tilde{F}_{n-2}(q) \end{pmatrix} \text{ tq } [x_n]_q = \frac{F_n(q)}{F_{n-1}(q)}.$$

Rotondus quantique

On pose $\text{Rot}_{+,q}(x_n) = \text{Tr}(M_{+,q}(x_n)) = qF_n(q) + \tilde{F}_{n-2}(q)$.

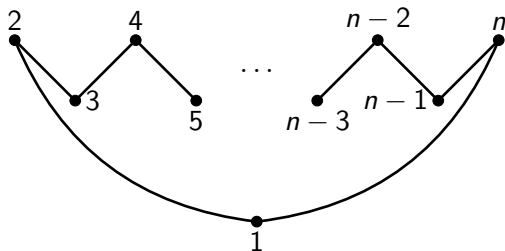
Couronne et idéaux [OR21]

La couronne associée à x_n est le poset circulaire $\bar{C}_n =$



Couronne et idéaux [OR21]

La couronne associée à x_n est le poset circulaire $\bar{\mathcal{C}}_n =$



$$\text{Rot}_{+,q}(x_n) = \sum_{I \text{ idéal de } \bar{\mathcal{C}}_n} q^{|I|}.$$

Spécialisation $q = -1$

On définit deux involutions des idéaux de $\bar{\mathcal{C}}_n$, la symétrie Sym et le renversement Rv.

- Si $n \equiv 0 [6]$, il y a exactement deux idéaux fixés par Sym et Rv, et

$$|\text{Rot}_{+,q}(x)(-1)| = 2.$$

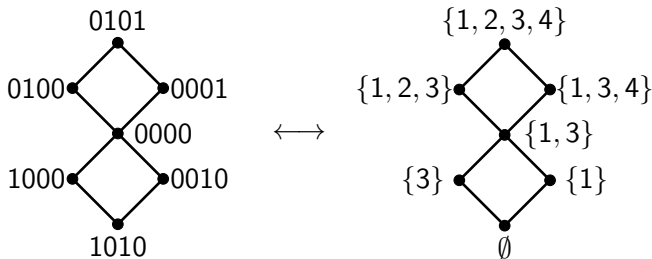
- Sinon, il y a exactement un idéal fixé par Sym et Rv, et

$$|\text{Rot}_{+,q}(x)(-1)| = 1.$$

Reformulation : mots de Lucas

\mathcal{L}_n := ensemble des mots de longueur n sur $\{0, 1\}$ qui n'ont pas de 1 consécutifs (la première et la dernière lettre sont consécutives).

On a une bijection équivariée $\mathcal{L}_n \simeq J(\bar{F}(x))$.

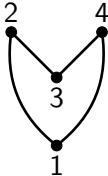


Exemple, pour $n = 4$, $x = 5/3$,

	Tailles	Idéaux	Nombres
$\bar{c}_4 =$	0	\emptyset	1
	1	$\{1\}, \{3\}$	2
	2	$\{1, 3\}$	1
	3	$\{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}$	2
	4	$\{1, 2, 3, 4\}$	1



Exemple, pour $n = 4$, $x = 5/3$,

$\bar{c}_4 =$		Tailles	Idéaux	Nombres
		0	\emptyset	1
		1	$\{1\}, \{3\}$	2
		2	$\{1, 3\}$	1
		3	$\{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}$	2
	4	$\{1, 2, 3, 4\}$	1	

On a $M_{+,q}(x) = \begin{pmatrix} q^{-1} + 1 + 2q + q^2 & q^{-2} + q^{-1} + 1 \\ q^{-1} + 1 + q & q^{-1} + q^{-2} \end{pmatrix}$, donc

$$\text{Rot}_{+,q}(x) = 1 + 2q + q^2 + 2q^3 + q^4.$$

Quantification

Soit $p_0 := [0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$.

L'application de quantification est une fonction multivaluée

$$\begin{array}{rcl}
 \mathcal{Q} : \text{Orb}_{B_4}(p_0) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{P}^2(\bar{\Lambda})) \\
 p & \longmapsto & \{\rho_q(\beta)(p_0) \mid \beta \text{ s.t. } \rho(\beta)(p_0) = p\} .
 \end{array}$$

Quantification

Soit $p_0 := [0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$.

L'application de quantification est une fonction multivaluée

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q} : \text{Orb}_{B_4}(p_0) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P}^2(\bar{\Lambda})) \\
 p &\longmapsto \{ \rho_q(\beta)(p_0) \mid \beta \text{ s.t. } \rho(\beta)(p_0) = p \} .
 \end{aligned}$$

Par exemple, pour $p = [3 : 1 : 5] = \rho(\sigma_1^3 \sigma_3^{-5})(p_0)$, on a

$$\rho_q(\sigma_1^3 \sigma_3^{-5})(p) = [q^6 + q^5 + q^4 : q^4 : q^4 + q^3 + q^2 + q + 1].$$