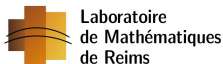


Étude des q -analogues de nombres réels : aspects combinatoires et géométriques, extensions, généralisation en dimension supérieure

Perrine Jouteur
dirigée par Sophie Morier-Genoud

10 juillet 2026



Introduction

Qu'est-ce qu'un q -analogue de nombre ?

Introduction

Qu'est-ce qu'un q -analogue de nombre ?

► q -Entiers (Euler, Gauss) : $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;

Introduction

Qu'est-ce qu'un q -analogue de nombre ?

- ▶ q -Entiers (Euler, Gauss) : $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- ▶ q -Factorielles : $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q$;

Introduction

Qu'est-ce qu'un q -analogue de nombre ?

- ▶ q -Entiers (Euler, Gauss) : $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- ▶ q -Factorielles : $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q$;
- ▶ q -Binomiaux :
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}.$$

Introduction

Qu'est-ce qu'un q -analogue de nombre ?

- ▶ q -Entiers (Euler, Gauss) : $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$;
- ▶ q -Factorielles : $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q$;
- ▶ q -Binomiaux : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}$.

Qu'en est-il des nombres rationnels ?

Introduction

Idée naïve : $\left[\frac{a}{b}\right]_q = \frac{[a]_q}{[b]_q}$. Mais...

Introduction

Idée naïve : $\left[\frac{a}{b}\right]_q = \frac{[a]_q}{[b]_q}$. Mais...

- pas d'invariance par changement d'échelle : $\frac{[2a]_q}{[2b]_q} \neq \frac{[a]_q}{[b]_q}$;

Introduction

Idée naïve : $\left[\frac{a}{b}\right]_q = \frac{[a]_q}{[b]_q}$. Mais...

- pas d'invariance par changement d'échelle : $\frac{[2a]_q}{[2b]_q} \neq \frac{[a]_q}{[b]_q}$;
- pas de relation de récurrence : $[x+1]_q \neq q[x]_q + 1$;

Introduction

Idée naïve : $\left[\frac{a}{b}\right]_q = \frac{[a]_q}{[b]_q}$. Mais...

- pas d'invariance par changement d'échelle : $\frac{[2a]_q}{[2b]_q} \neq \frac{[a]_q}{[b]_q}$;
- pas de relation de récurrence : $[x+1]_q \neq q[x]_q + 1$;
- l'ordre n'est pas préservé : si $x < y$, en général $[x]_q \not\leq [y]_q$
(pour $q \in \mathbb{R}_+$).

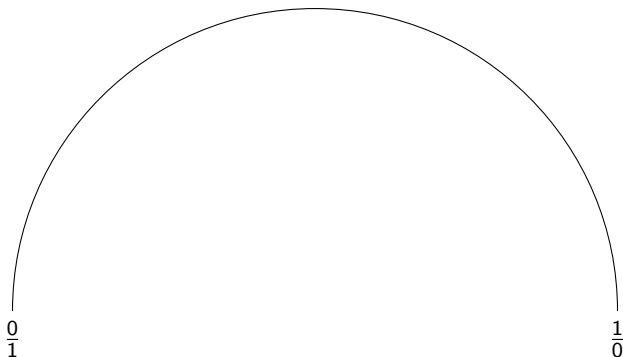
Introduction

Idée naïve : $\left[\frac{a}{b}\right]_q = \frac{[a]_q}{[b]_q}$. Mais...

- pas d'invariance par changement d'échelle : $\frac{[2a]_q}{[2b]_q} \neq \frac{[a]_q}{[b]_q}$;
- pas de relation de récurrence : $[x+1]_q \neq q[x]_q + 1$;
- l'ordre n'est pas préservé : si $x < y$, en général $[x]_q \not\leq [y]_q$
(pour $q \in \mathbb{R}_+$).

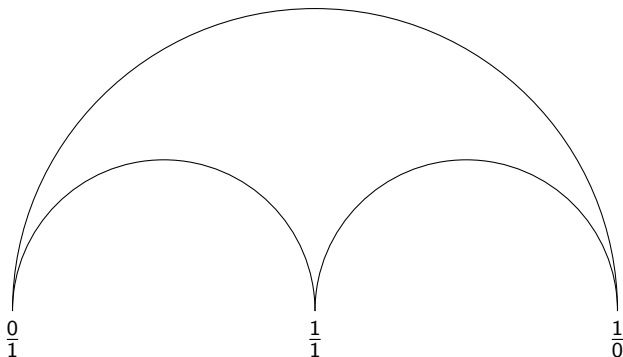
Meilleure idée : la théorie des q -rationnels de Morier-Genoud et Ovsienko [?].

Introduction



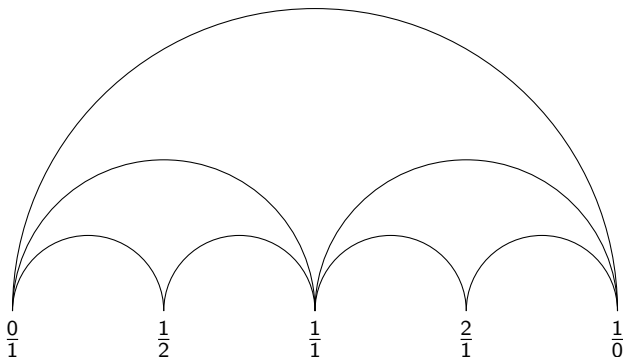
Processus récursif de construction des rationnels positifs : le graphe de Farey.

Introduction



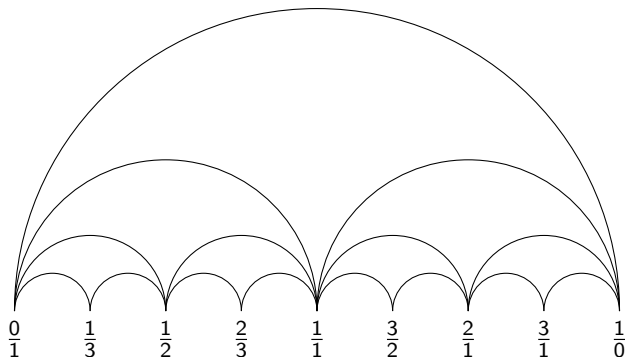
Processus récursif de construction des rationnels positifs : le graphe de Farey.

Introduction



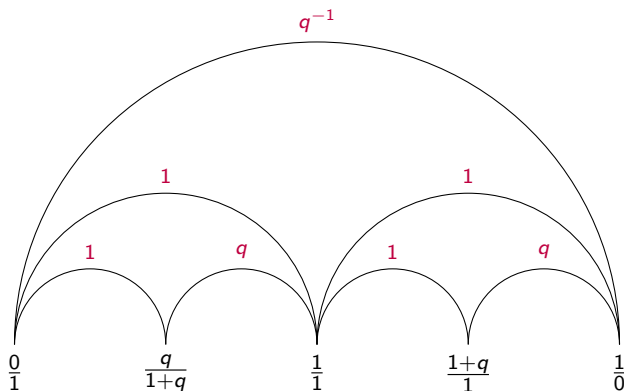
Processus récursif de construction des rationnels positifs : le graphe de Farey.

Introduction

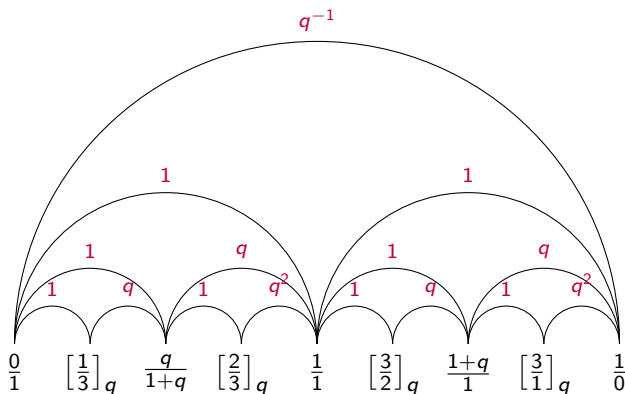


Processus récursif de construction des rationnels positifs : le graphe de Farey.

Déformation du graphe de Farey [?]



Déformation du graphe de Farey [?]



Plan de la présentation

Partie I : Symétries modulaires

Action modulaire sur les rationnels

Homographies

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \text{ via } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Action modulaire sur les rationnels

Homographies

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \text{ via } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Exemples

- la translation $x \mapsto x + 1$ est réalisée par $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Action modulaire sur les rationnels

Homographies

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \text{ via } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Exemples

- ▶ la translation $x \mapsto x + 1$ est réalisée par $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- ▶ l'inversion-négation $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est réalisée par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Action modulaire sur les rationnels

Homographies

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \text{ via } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Exemples

- ▶ la translation $x \mapsto x + 1$ est réalisée par $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- ▶ l'inversion-négation $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est réalisée par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette action est transitive.

Le groupe modulaire est présenté par

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \mid S^2 = (TS)^3 = 1 \rangle,$$

$$\text{avec } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe modulaire est présenté par

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \mid S^2 = (TS)^3 = 1 \rangle,$$

avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Version déformée [?, ?]

Posons $T_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$.

Le groupe modulaire est présenté par

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \mid S^2 = (TS)^3 = 1 \rangle,$$

avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Version déformée [?, ?]

Posons $T_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\simeq} & \langle T_q, S_q \rangle \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \\ M & \longmapsto & M_q \end{array}$$

Le groupe modulaire est présenté par

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S \mid S^2 = (TS)^3 = 1 \rangle,$$

avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Version déformée [?, ?]

Posons $T_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\simeq} & \langle T_q, S_q \rangle \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \\ M & \longmapsto & M_q \end{array}$$

On note $\mathrm{PSL}_{2,q}(\mathbb{Z}) := \langle T_q, S_q \rangle$.

q -Rationnels [?]

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Soit $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $M \cdot \frac{1}{0} = x$. On pose

$$[x]_q := M_q \cdot \frac{1}{0}.$$

q -Rationnels [?]

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Soit $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $M \cdot \frac{1}{0} = x$. On pose

$$[x]_q := M_q \cdot \frac{1}{0}.$$

Ceci est bien défini car $\frac{1}{0}$ est fixé par $T_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

q -Rationnels [?]

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Soit $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $M \cdot \frac{1}{0} = x$. On pose

$$[x]_q := M_q \cdot \frac{1}{0}.$$

Ceci est bien défini car $\frac{1}{0}$ est fixé par $T_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il y en a un autre : $\frac{1}{1-q}$.

q -Rationnels version droite [?]

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Soit $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $M \cdot \infty = x$. On pose

$$[x]_q^\sharp := M_q \cdot \frac{1}{0}.$$

Ceci est bien défini car $\frac{1}{0}$ est fixé par $T_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il y a un autre point fixe : $\frac{1}{1-q}$.

q -Rationnels version gauche [?]

On pose

$$[x]_q^b := M_q \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Exemples

Les q -entiers droits sont les q -entiers usuels :

$$[n]_q^\# = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

Exemples

Les q -entiers droits sont les q -entiers usuels :

$$[n]_q^\# = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

Les q -entiers gauches sont nouveaux :

$$[n]_q^\flat = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^n.$$

Exemples

Les q -entiers droits sont les q -entiers usuels :

$$[n]_q^\# = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

Les q -entiers gauches sont nouveaux :

$$[n]_q^\flat = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^n.$$

$$\left[\frac{5}{3}\right]_q^\flat = \frac{1 + q + q^2 + q^3 + q^4}{1 + q + q^3} \text{ et } \left[\frac{5}{3}\right]_q^\# = \frac{1 + q + 2q^2 + q^3}{1 + q + q^2}.$$

Exemples

Les q -entiers droits sont les q -entiers usuels :

$$[n]_q^\# = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

Les q -entiers gauches sont nouveaux :

$$[n]_q^\flat = 1 + q + \cdots + q^{n-2} + q^n.$$

$$\left[\frac{5}{3}\right]_q^\flat = \frac{1 + q + q^2 + q^3 + q^4}{1 + q + q^3} \text{ et } \left[\frac{5}{3}\right]_q^\# = \frac{1 + q + 2q^2 + q^3}{1 + q + q^2}.$$

Ces polynômes ont de nombreuses propriétés

$[?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?] \dots$

Extension des symétries [?]

Soit $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Par définition, pour tout $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$,

$$[M \cdot x]_q^\sharp = M_q \cdot [x]_q^\sharp \quad , \quad [M \cdot x]_q^\flat = M_q \cdot [x]_q^\flat .$$

Extension des symétries [?]

Soit $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Par définition, pour tout $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$,

$$[M \cdot x]_q^\sharp = M_q \cdot [x]_q^\sharp \quad , \quad [M \cdot x]_q^\flat = M_q \cdot [x]_q^\flat .$$

Extension à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det(M) = \pm 1\} / \pm \mathrm{Id}$.

Extension des symétries [?]

Soit $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Par définition, pour tout $M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$,

$$[M \cdot x]_q^\sharp = M_q \cdot [x]_q^\sharp \quad , \quad [M \cdot x]_q^\flat = M_q \cdot [x]_q^\flat .$$

Extension à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det(M) = \pm 1\} / \pm \mathrm{Id}$.

Posons

$$\Lambda_q := \mathbb{Z}[q, q^{-1}][(q^2 - q + 1)^{-1}] .$$

Extension des symétries [?]

On définit

$$J_q := \begin{pmatrix} q-1 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\Lambda_q).$$

Extension des symétries [?]

On définit

$$J_q := \begin{pmatrix} q-1 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\Lambda_q).$$

Théorème [?]

(i) Alors J_q est l'unique déformation de l'inversion $J : x \mapsto 1/x$ telle que

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \langle T_q, S_q, J_q \rangle \subset \mathrm{PGL}_2(\Lambda_q).$$

Extension des symétries [?]

On définit

$$J_q := \begin{pmatrix} q-1 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\Lambda_q).$$

Théorème [?]

(i) Alors J_q est l'unique déformation de l'inversion $J : x \mapsto 1/x$ telle que

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \langle T_q, S_q, J_q \rangle \subset \mathrm{PGL}_2(\Lambda_q).$$

(ii) Pour toute $M \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det(M) = -1$,

$$[M \cdot x]_q^\# = M_q \cdot [x]_q^{\flat} \quad , \quad [M \cdot x]_q^{\flat} = M_q \cdot [x]_q^\#.$$

Corollaire

Pour $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$,

$$\left[\frac{1}{x} \right]_q^{\sharp} = \frac{(q-1)[x]_q^{\flat} + 1}{q[x]_q^{\flat} + 1 - q} ; \quad [-x]_q^{\sharp} = \frac{-[x]_q^{\flat} + 1 - q^{-1}}{(q-1)[x]_q^{\flat} + 1}.$$

et de même en échangeant $\sharp$ et $\flat$.

Partie II : Propriétés géométriques

Motivations

Pour cette partie, $q \in]0, 1[$.

Motivations

Pour cette partie, $q \in]0, 1[$.

Croissance [?]

Soient $x < y \in \mathbb{Q}$. Alors $[x]_q^{\flat} < [y]_q^{\flat}$ et $[x]_q^{\sharp} < [y]_q^{\sharp}$.

Motivations

Pour cette partie, $q \in]0, 1[$.

Croissance [?]

Soient $x < y \in \mathbb{Q}$. Alors $[x]_q^{\text{b}} < [y]_q^{\text{b}}$ et $[x]_q^{\text{\#}} < [y]_q^{\text{\#}}$.

Convergence [?, ?]

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{Q}$.

Si pour tout n , $x_n < x$, alors

Motivations

Pour cette partie, $q \in]0, 1[$.

Croissance [?]

Soient $x < y \in \mathbb{Q}$. Alors $[x]_q^{\flat} < [y]_q^{\flat}$ et $[x]_q^{\sharp} < [y]_q^{\sharp}$.

Convergence [?, ?]

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{Q}$.

Si pour tout n , $x_n < x$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n]_q^{\flat} = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n]_q^{\sharp} = [x]_q^{\flat}.$$

Motivations

Pour cette partie, $q \in]0, 1[$.

Croissance [?]

Soient $x < y \in \mathbb{Q}$. Alors $[x]_q^{\flat} < [y]_q^{\flat}$ et $[x]_q^{\sharp} < [y]_q^{\sharp}$.

Convergence [?, ?]

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{Q}$.

Si pour tout n , $x_n < x$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n]_q^{\flat} = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n]_q^{\sharp} = [x]_q^{\flat}.$$

Si pour tout n , $x_n > x$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n]_q^{\flat} = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n]_q^{\sharp} = [x]_q^{\sharp}.$$

Changement de point de vue [?]

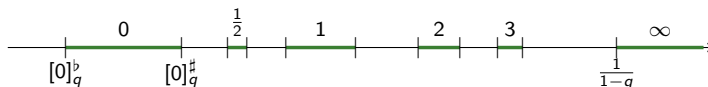
Ainsi, pour tous rationnels $y < x < z$,

$$[y]_q^{\#} < [x]_q^{\flat} < [x]_q^{\#} < [z]_q^{\flat}.$$

Changement de point de vue [?]

Ainsi, pour tous rationnels $y < x < z$,

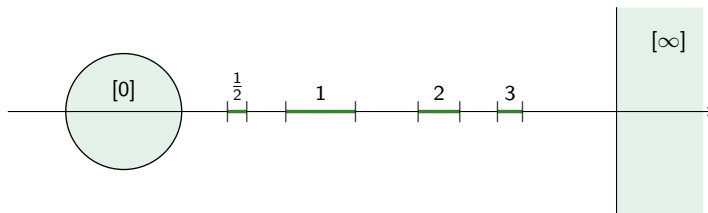
$$[y]_q^\# < [x]_q^\flat < [x]_q^\# < [z]_q^\flat.$$



Changement de point de vue [?]

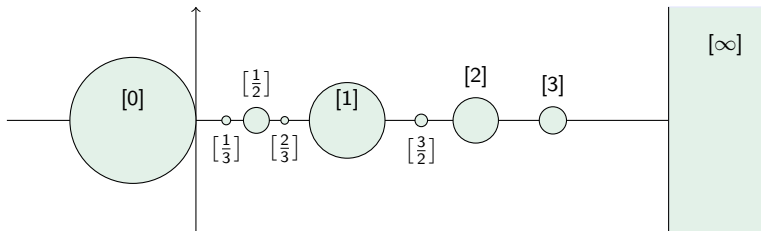
Ainsi, pour deux rationnels $x < y$,

$$[x]_q^b < [x]_q^\sharp < [y]_q^b < [y]_q^\sharp.$$

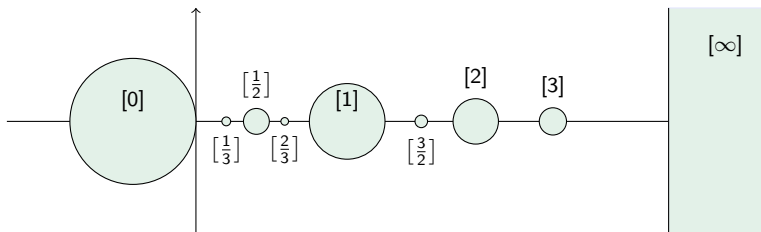


Notation : $[x]$ est le disque passant par $[x]_q^\sharp$ et $[x]_q^b$, orthogonal à l'axe réel.

L'union de tous les disques $[x]$, pour $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, est notée $\mathcal{Q}$.



L'union de tous les disques $[x]$, pour $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, est notée $\mathcal{Q}$.



Les isométries du plan qui préservent $\mathcal{Q}$ sont les $M_q \in \mathrm{PGL}_{2,q}(\mathbb{Z})$, agissant par transformations de Möbius.

Centres homothétiques

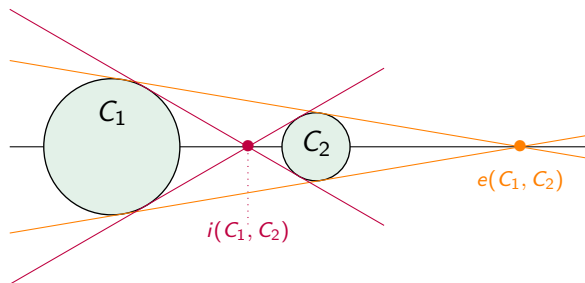
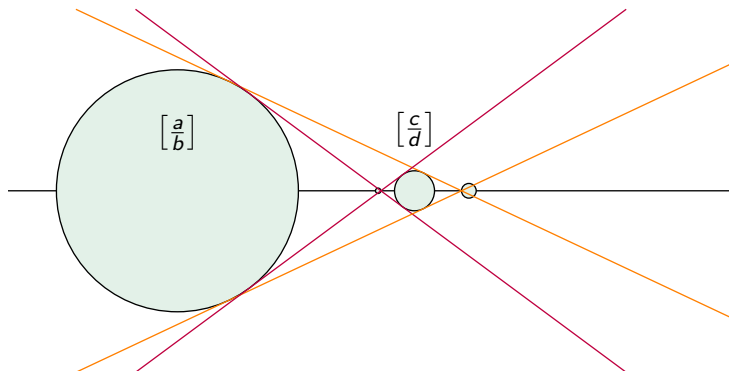


Figure: Centres homothétiques intérieur (en rose) et extérieur (en orange) de C_1 et C_2 .

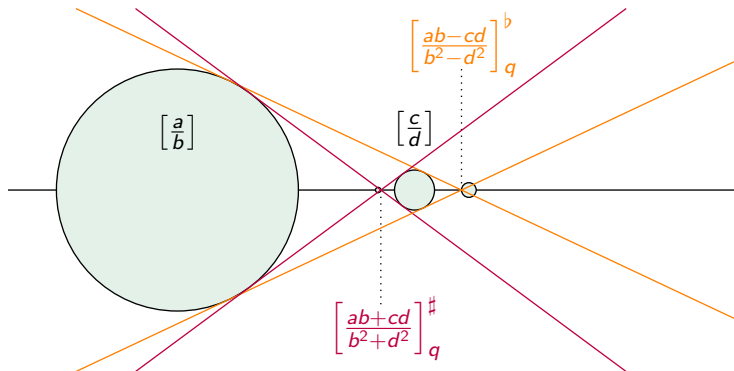
Observation [?]

Pour certaines paires de rationnels $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$, les centres homothétiques des q -disques associés sont des q -rationnels.



Observation [?]

Pour certaines paires de rationnels $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$, les centres homothétiques des q -disques associés sont des q -rationnels.



Compatibilité des centres homothétiques avec $\mathcal{Q}$

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels sous forme réduite. Notons $d_F = |bc - ad|$.

Compatibilité des centres homothétiques avec $\mathcal{Q}$

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels sous forme réduite. Notons $d_F = |bc - ad|$.

Théorème [?]

Supposons que $\text{pgcd}(ab + cd, b^2 + d^2, a^2 + c^2) = d_F$. Alors

$$i\left(\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{c}{d}\right]\right) = \left[\frac{ab + cd}{b^2 + d^2}\right]_q^\#.$$

Compatibilité des centres homothétiques avec $\mathcal{Q}$

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux rationnels sous forme réduite. Notons $d_F = |bc - ad|$.

Théorème [?]

Supposons que $\text{pgcd}(ab + cd, b^2 + d^2, a^2 + c^2) = d_F$. Alors

$$i\left(\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{c}{d}\right]\right) = \left[\frac{ab + cd}{b^2 + d^2}\right]_q^{\#}.$$

Supposons que $\text{pgcd}(ab - cd, b^2 - d^2, a^2 - c^2) = d_F$. Alors

$$e\left(\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{c}{d}\right]\right) = \left[\frac{ab - cd}{b^2 - d^2}\right]_q^{\flat}.$$

Application : formule de la moyenne

Soient $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ tels que $|bc - ad| = 1$. Alors on peut calculer $k \in \mathbb{N}$ tel que

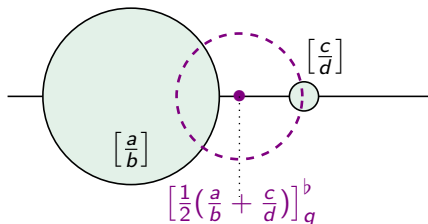
$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \right]_q^{\flat} = \frac{A^{\sharp} D^{\flat} + q^k B^{\flat} C^{\sharp}}{B^{\sharp} D^{\flat} + q^k B^{\flat} D^{\sharp}}.$$

Application : formule de la moyenne

Soient $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ tels que $|bc - ad| = 1$. Alors on peut calculer $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \right]_q^b = \frac{A^\sharp D^b + q^k B^b C^\sharp}{B^\sharp D^b + q^k B^b D^\sharp}.$$

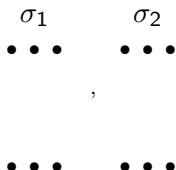
Le centre de l'inversion
 stabilisant $\left[\frac{a}{b} \right]$ et $\left[\frac{c}{d} \right]$ est
 $e\left(\left[\frac{a+c}{b+d}\right], \left[\frac{a-c}{b-d}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\right]_q^b.$



Partie III : Généralisation en dimension supérieure

Groupe de tresses et groupe modulaire

Groupe de tresses $B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle$



Groupe de tresses et groupe modulaire

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Groupe de tresses } B_3 & \longrightarrow & \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\
 \begin{array}{ccc}
 \sigma_1 & & \sigma_2 \\
 \bullet \bullet \bullet & & \bullet \bullet \bullet \\
 & & \vdots \\
 \bullet \bullet \bullet & & \bullet \bullet \bullet
 \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 T \quad \quad T^{-1}ST^{-1}
 \end{array}
 \end{array}$$

Groupe de tresses et groupe modulaire

$$\begin{array}{ccc} \text{Groupe de tresses } B_3 & \longrightarrow & \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\ \begin{array}{cc} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ & \bullet \bullet \bullet \end{array} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \\ & & T \quad T^{-1}ST^{-1} \end{array}$$

- Cette application est surjective ;

Groupe de tresses et groupe modulaire

$$\begin{array}{ccc} \text{Groupe de tresses } B_3 & \longrightarrow & \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\ \begin{array}{cc} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ & \bullet \bullet \bullet \end{array} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \\ & & T \quad T^{-1}ST^{-1} \end{array}$$

- ▶ Cette application est surjective ;
- ▶ Son noyau est $Z(B_3) = \langle \Delta_3^2 \rangle$, avec $\Delta_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$.

Groupe de tresses et groupe modulaire

$$\begin{array}{ccc} \text{Groupe de tresses } B_3 & \longrightarrow & \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\ \begin{array}{cc} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ & , \\ \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \\ T & T^{-1}ST^{-1} \end{array} \end{array}$$

- ▶ Cette application est surjective ;
- ▶ Son noyau est $Z(B_3) = \langle \Delta_3^2 \rangle$, avec $\Delta_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$.

Ainsi $B_3/Z(B_3) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Représentation de Burau [?]

Reprenons q une variable formelle.

Représentation de Burau [?]

Reprenons q une variable formelle.

$$\begin{aligned} \rho_3 : B_3 &\longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \\ \sigma_1, \sigma_2 &\longmapsto \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & q \end{pmatrix} . \\ &T_q \quad T_q^{-1} S_q T_q^{-1} \end{aligned}$$

Représentation de Burau [?]

Reprenons q une variable formelle.

$$\begin{aligned} \rho_3 : B_3 &\longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[q, q^{-1}]) \\ \sigma_1, \sigma_2 &\longmapsto \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & q \end{pmatrix} . \\ &T_q \quad T_q^{-1} S_q T_q^{-1} \end{aligned}$$

Le q -groupe modulaire est l'image de ρ_3 .

$$\mathrm{Im}(\rho_3) = \mathrm{PSL}_{2,q}(\mathbb{Z}).$$

Cas de B_4 : représentation entière

Cas de B_4 : représentation entière

Considérons $\rho_4|_{q=1} : B_4 \longrightarrow \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z})$,

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cas de B_4 : représentation entière

Considérons $\rho_4|_{q=1} : B_4 \longrightarrow \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z})$,

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Cette application n'est pas surjective: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \rho_4|_{q=1}(B_4)$;

Cas de B_4 : représentation entière

Considérons $\rho_4|_{q=1} : B_4 \longrightarrow \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z})$,

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Cette application n'est pas surjective: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \rho_4|_{q=1}(B_4)$;
- ▶ $\mathrm{Ker}(\rho_4|_{q=1}) = \langle \langle \tau_1^2, \tau_3^2, \Delta_4^2 \rangle \rangle$ [?],

Cas de B_4 : représentation entière

Considérons $\rho_4|_{q=1} : B_4 \longrightarrow \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z})$,

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Cette application n'est pas surjective: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \rho_4|_{q=1}(B_4)$;
- ▶ $\mathrm{Ker}(\rho_4|_{q=1}) = \langle \langle \tau_1^2, \tau_3^2, \Delta_4^2 \rangle \rangle$ [?], avec $\tau_i = (\sigma_i \sigma_2 \sigma_i)^2$ and $\Delta_4 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$.

Classification des orbites

Ceci définit une action $B_4 \curvearrowright \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$, donnée par

$$\rho_4|_{q=1}(\sigma_1) : [r : s : t] \mapsto [r + s : s : t],$$

$$\rho_4|_{q=1}(\sigma_2) : [r : s : t] \mapsto [r : s + t - r : t],$$

$$\rho_4|_{q=1}(\sigma_3) : [r : s : t] \mapsto [r : s : t - s].$$

Classification des orbites

Ceci définit une action $B_4 \curvearrowright \mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$, donnée par

$$\rho_4|_{q=1}(\sigma_1) : [r : s : t] \mapsto [r + s : s : t],$$

$$\rho_4|_{q=1}(\sigma_2) : [r : s : t] \mapsto [r : s + t - r : t],$$

$$\rho_4|_{q=1}(\sigma_3) : [r : s : t] \mapsto [r : s : t - s].$$

Remarque

Le point $[1 : 0 : 1]$ est fixé par cette action.

Classification des orbites

Théorème [?]

(i) Il y a une infinité d'orbites:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) = \{[1 : 0 : 1]\} \sqcup \bigsqcup_{\substack{1 \leq n \\ 0 \leq m < n/2 \\ \text{pgcd}(m,n)=1}} \text{Orb}([m : n : m]).$$

Classification des orbites

Théorème [?]

(i) Il y a une infinité d'orbites:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) = \{[1 : 0 : 1]\} \sqcup \bigsqcup_{\substack{1 \leq n \\ 0 \leq m < n/2 \\ \text{pgcd}(m,n)=1}} \text{Orb}([m : n : m]).$$

(ii) Pour tout couple d'entiers (m, n) premiers entre eux,

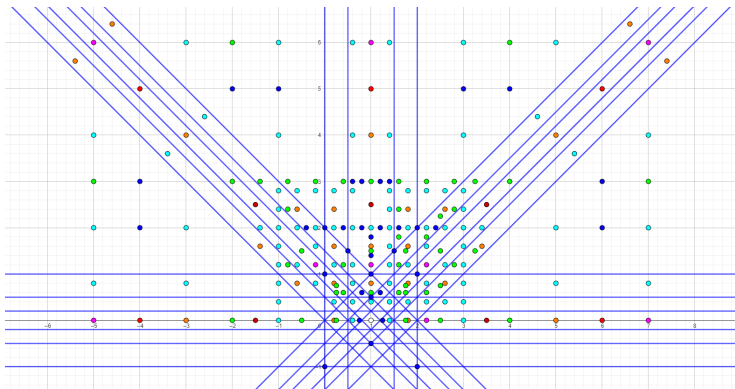
$$\text{Orb}([m : n : m]) = \left\{ [r : s : t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) \mid \begin{array}{l} \text{pgcd}(r - t, s) = n \\ r, t \equiv \pm m \pmod{n} \end{array} \right\}.$$

Répartition des orbites

On se place dans la carte affine $[x : y : 1]$.

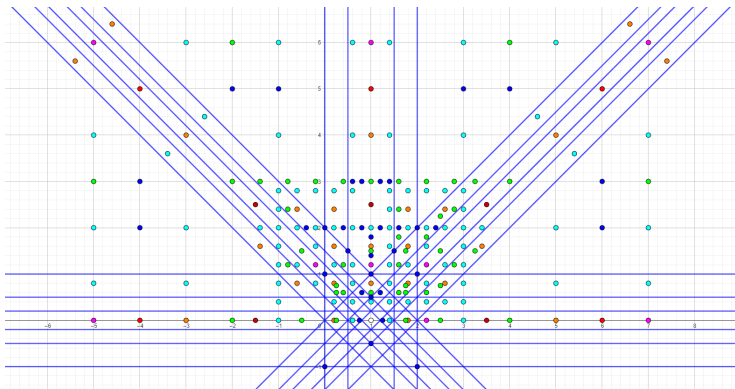
Répartition des orbites

On se place dans la carte affine $[x : y : 1]$.



Répartition des orbites

On se place dans la carte affine $[x : y : 1]$.



Orbite principale $\text{Orb}([0 : 1 : 0])$ (en bleu foncé).

Déformation de l'orbite principale

Déformation de l'orbite principale

On utilise la représentation de Burau $\rho_4 : B_4 \longrightarrow \mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z}[q, q^{-1}])$,

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -q & q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -q & q \end{pmatrix} .$$

Déformation de l'orbite principale

On pose $[0 : 1 : 0]_q = [0 : 1 : 0]$.

Déformation de l'orbite principale

On pose $[0 : 1 : 0]_q = [0 : 1 : 0]$.

Problème :

$$\text{Stab}_q([0 : 1 : 0]_q) \subsetneq \text{Stab}_{q=1}([0 : 1 : 0]).$$

Déformation de l'orbite principale

On pose $[0 : 1 : 0]_q = [0 : 1 : 0]$.

Problème :

$$\text{Stab}_q([0 : 1 : 0]_q) \subsetneq \text{Stab}_{q=1}([0 : 1 : 0]).$$

Par exemple, avec $\tau_1 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^2$,

$$\rho_4(\sigma_3 \tau_1^2 \sigma_3^{-1}) \cdot [0 : 1 : 0] = [q(1+q)(q^3-1) : q^4+q^3-1 : (1+q)(q^3-1)].$$

Déformation de l'orbite principale

On pose $[0 : 1 : 0]_q = [0 : 1 : 0]$.

Problème :

$$\text{Stab}_q([0 : 1 : 0]_q) \subsetneq \text{Stab}_{q=1}([0 : 1 : 0]).$$

Par exemple, avec $\tau_1 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^2$,

$$\rho_4(\sigma_3 \tau_1^2 \sigma_3^{-1}) \cdot [0 : 1 : 0] = [q(1+q)(q^3-1) : q^4+q^3-1 : (1+q)(q^3-1)].$$

Conséquence : il n'y aura pas unicité de la déformation.

Déformation de l'orbite principale

Définition [?]

Soit $[r : s : t] \in \text{Orb}([0 : 1 : 0])$. On pose

$$[r : s : t]_q := \left\{ \rho_4(\beta) \cdot [0 : 1 : 0] \mid \begin{array}{l} \beta \in B_4 \text{ t.q.} \\ \rho_4|_{q=1}(\beta) \cdot [0 : 1 : 0] = [r : s : t] \end{array} \right\}.$$

Déformation de l'orbite principale

Définition [?]

Soit $[r : s : t] \in \text{Orb}([0 : 1 : 0])$. On pose

$$[r : s : t]_q := \left\{ \rho_4(\beta) \cdot [0 : 1 : 0] \mid \begin{array}{l} \beta \in B_4 \text{ t.q.} \\ \rho_4|_{q=1}(\beta) \cdot [0 : 1 : 0] = [r : s : t] \end{array} \right\}.$$

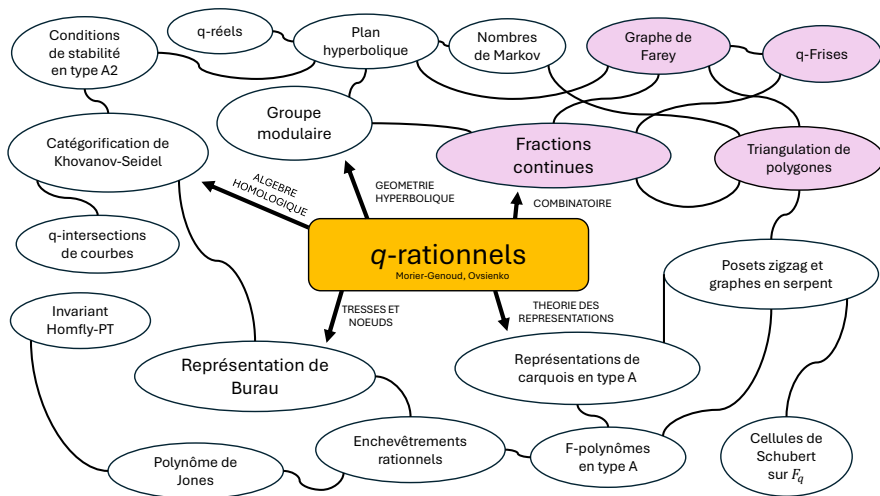
Compatibilité avec les q -rationnels

Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Soit $[\frac{a}{b}]_q^\# = \frac{A}{B}$.

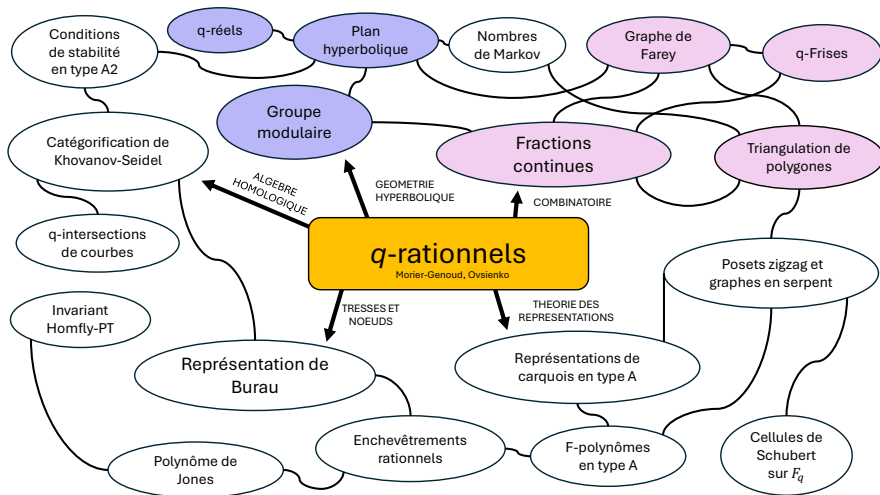
Alors $[A : B : 0] \in [a : b : 0]_q$ et $[0 : B : A] \in [0 : b : a]_q$.

Conclusion

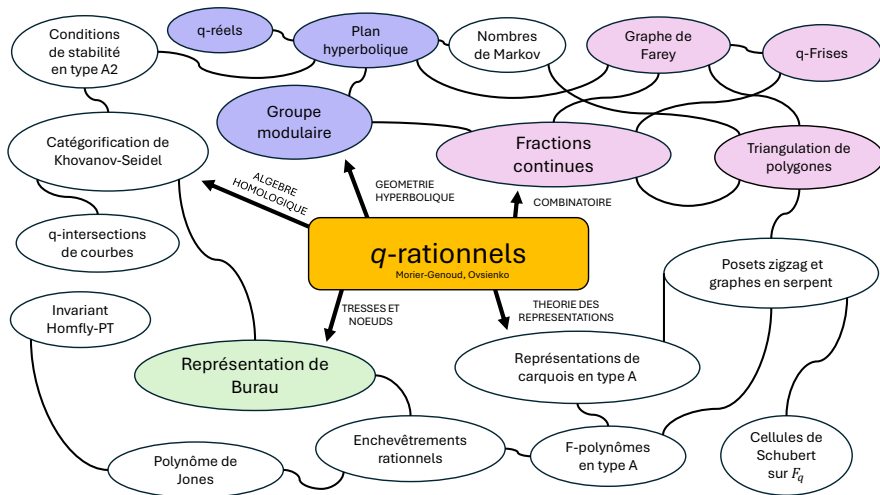
Carte du domaine



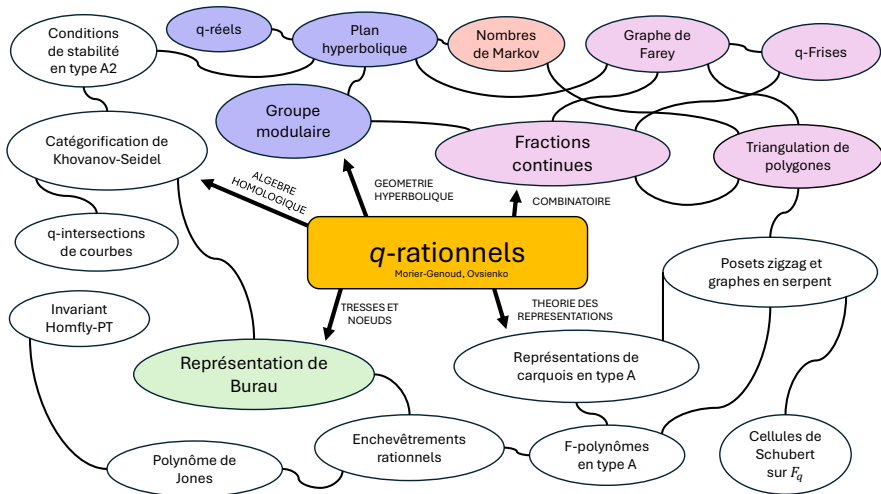
Carte du domaine



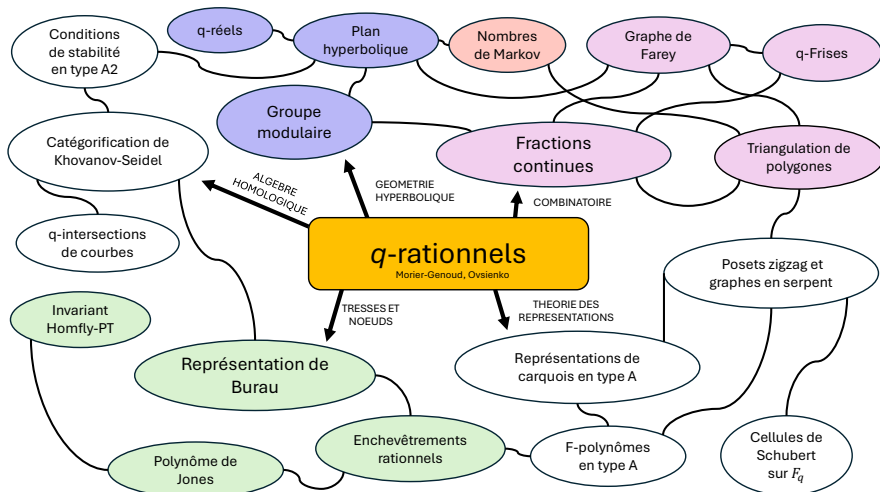
Carte du domaine



Carte du domaine



Carte du domaine



Carte du domaine

