

Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

Théorème 1. (Propriété de Borel-Lebesgue) Soit (E, d_E) un espace métrique, $K \subset E$ une partie compacte, et $(U_i)_{i \in I}$ des ouverts de E tels que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Alors il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Théorème 2. (Propriété de Bolzano-Weierstrass) Soit (E, d_E) un espace métrique, $K \subset E$ une partie compacte, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans K .

1 Fonctions continues et compacité [4] [7] [1]

Théorème 3. (des bornes atteintes) Soit (E, d) un espace métrique, X un compact de E . Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 4. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue coercive, i.e. $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$. Alors f admet un minimum global.

Application 5. Ces propriétés permettent de montrer l'existence d'extrema.

Théorème 6. (Rolle) Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Proposition 7. (Égalité des accroissements finis) Sous les mêmes hypothèses, il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque 8. Le théorème de Rolle est faux pour des fonctions à valeurs complexes. La fonction $f : t \rightarrow e^{it}$ est un contre-exemple.

Théorème 9. (DEV1) Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f admet un unique point fixe α . De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite d'itérés $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 1$ converge vers α .

Exemple 10. (DEV1) Soit $d \geq 1$. En notant $a = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{\frac{1}{d}}$, la fonction

$$f : \begin{cases} [0, a] & \rightarrow & [0, a] \\ x & \mapsto & x - x^{d+1} \end{cases}$$

admet un unique point fixe 0, et pour toute suite d'itérés $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_0 \neq 0$, on a $x_n \sim \frac{1}{(dn)^{\frac{1}{d}}}$.

Définition 11. Soit (E, d_E) et (F, d_F) , $f : E \rightarrow F$. On dit que f est uniformément continue sur E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, (d_E(x, y) < \eta \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Exemple 12. Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.

Exemple 13. La fonction : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas uniformément continue.

Théorème 14. (Heine) Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques avec E compact. Alors si $f : E \rightarrow F$ est continue, alors f est uniformément continue.

Théorème 15. (Weierstrass) Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Toute fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Application 16. Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $T > 0$. On note $E = \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^d)$. L'application

$$F : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \left(t \mapsto \int_0^t v(x(s)) ds \right) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in E$, pour tout $h \in E$:

$$dF(x) \cdot h : t \mapsto \int_0^t dv(x(s)) \cdot h(s) ds.$$

Remarque 17. Cela permet de calculer la différentielle du flot d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point d'équilibre.

Exemple 18. Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, E un espace de Banach et $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. Alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier. Cela permet de définir son intégrale de Riemann.

Théorème 19. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

- (i) pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \mapsto f(z, x)$ est intégrable,
- (ii) pour presque tout $x \in X$, la fonction $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω ,

(iii) pour tout K compact de Ω , il existe $g \in L^1(X)$ positive intégrable telle que pour tout $z \in K$ et presque tout $x \in X$: $|f(z, x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction $F : z \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x)$ est bien définie, holomorphe sur Ω et :

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) d\mu(x).$$

Exemple 20. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable bornée. On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$. La transformée de Laplace de f

$$L(f) : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \end{cases}$$

est bien définie et holomorphe sur Ω .

Exemple 21. La fonction $\mathcal{T} : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{in^2 z}$ est holomorphe sur $\mathbb{H}$.

2 Compacité dans les espaces vectoriels normés

2.1 Espaces vectoriels de dimension finie [6] [2]

Lemme 22. Soit E un espace vectoriel de dimension finie d et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E . Alors $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} : x = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \mapsto \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$ est une norme sur E et les parties compactes de $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ sont les parties fermées bornées.

Théorème 23. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Et de plus, pour toute norme $\|\cdot\|$, les compacts de $(E, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés.

Proposition 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Théorème 25. (Décomposition polaire) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la multiplication matricielle induit un homéomorphisme :

$$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cong GL_n(\mathbb{R}).$$

Et de plus, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$.

Théorème 26. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Si A est une partie compacte de $\mathbb{R}^d$, alors l'enveloppe convexe de A , notée $\text{Conv}(A)$, est compacte.

Théorème 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Alors : $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \bar{B}(0, 1)$.

Théorème 28. (Riesz) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie si et seulement si $\bar{B}(0, 1)$ est compacte.

2.2 Espaces de Hilbert [5]

Dans cette partie, on note $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert.

Définition 29. Soit $u \in H$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ converge fortement vers u si $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u si pour tout $v \in H$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n - u, v \rangle = 0$.

Proposition 30. La convergence forte implique la convergence faible. De plus, si H est de dimension finie, la convergence faible implique la convergence forte.

Exemple 31. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de H . Alors $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement, mais pas fortement, vers 0.

Proposition 32. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers $u \in H$. Alors $\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$. De plus, si $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers u .

Théorème 33. (Banach-Alaoglu) De toute suite bornée de H , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

3 Applications [5] [8]

3.1 Théorème d'Ascoli

Définition 34. Soit (E, d_E) un espace métrique et (F, d_F) un espace métrique. On dit que $A \subset C^0(E, F)$ est ponctuellement relativement compacte si pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f(x) \mid f \in A\}$ est relativement compact dans F .

Définition 35. Soit deux espaces métriques (E, d_E) et (F, d_F) . On dit que $A \subset C^0(E, F)$ est équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, (d_E(x, y) < \eta \implies (\forall f \in A, d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon))$$

Théorème 36. (Ascoli) Soit (E, d_E) un espace métrique compact et (F, d_F) un espace métrique. Soit $A \subset C^0(E, F)$. Alors A est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si A est ponctuellement relativement compacte et équicontinue.

Définition 37. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est compact si $u(\bar{B}_E(0, 1))$ est relativement compacte dans F .

Exemple 38. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{C})$ muni de la norme infinie. Soit $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $u(f) = \int_0^1 K(\cdot, y)f(y)dy$ pour tout $f \in E$. Alors u est un opérateur compact de E .

Remarque 39. On peut ensuite développer une théorie spectrale des opérateurs compacts.

3.2 Équations différentielles [3]

Lemme 40. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0, $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $f \in C^0(I \times U, \mathbb{R}^d)$. Pour tout $x_0 \in U$, il existe $T > 0$ et $R > 0$ tels que :

- (i) $C = [-T, T] \times \bar{B}(x_0, R) \subset I \times U$,
- (ii) $T\|f\|_{L^\infty(C)} \leq R$.

Théorème 41. (Cauchy-Peano) (DEV2) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0, $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $f \in C^0(I \times U, \mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $x_0 \in U$, il existe une solution locale au problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$.

Exemple 42. Il n'y a pas unicité en général. Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ admet une infinité de solutions.

Lemme 43. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$. Alors il y a équivalence entre :

- (i) f est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable,
- (ii) pour tout compact $K \subset U$, f est lipschitzienne sur K par rapport à sa deuxième variable.

Théorème 44. (Sortie de tout compact) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Pour $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, on considère $x :]T_1, T_2[\rightarrow \mathbb{R}^d$ la solution maximale du problème $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$. Alors :

- (i) ou bien $T_2 = +\infty$,
- (ii) ou bien $T_2 < +\infty$ et $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T_2$.

Exemple 45. Toute solution maximale de l'équation différentielle $x'(t) = \sin(x(t))$ est une solution globale.

Références

- [1] Bernis L. Bernis, J. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*. Ellipses, 2024.
- [2] Germoni J. Caldero, P. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*. 2018.
- [3] J.P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. 2016.
- [4] X. Gourdon. *Analyse*. 2021.
- [5] Lacombe G. Hirsch, F. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009.
- [6] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. 1995.
- [7] Zuily C. Queffélec, H. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2013.
- [8] C. Wagschal. *Topologie et analyse fonctionnelle*. 2003.