

Nom:

LARIVÉ

Prénom:

Pierre

Numéro de Jury:

2

Numéros des sujets tirés:

221 - 261

Intitulé du sujet choisi:

221- Equations différentielle linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemple et applications.

I - Existence et unicité de solution

Définition 1: On appelle équation différentielle linéaire une équation de la forme $y' = A(t)y + b(t)$ d'inconnue $y: I \rightarrow K^d$ où $d \geq 1$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_d(K))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, K^d)$.

Remarque 2: Une équation différentielle de la forme $y^{(d)} + a_{d-1}(t)y^{(d-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t)$, où $a_{d-1}, \dots, a_0 \in \mathcal{C}^0(I, K)$ se ramène à une équation ci-dessus en posant $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ et $\tilde{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$.

Définition 3: On appelle problème de Cauchy linéaire un problème de la forme $\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ où $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_d(K))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, K^d)$ et $(t_0, y_0) \in I \times K^d$.

Définition 4: On dit que $y: I \rightarrow K^d$ est solution globale de $y' = A(t)y + b(t)$ sur I si $y \in \mathcal{C}^1(I, K^d)$ et $\forall t \in I$, $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$. Elle est solution du problème de Cauchy si elle vérifie de plus $y(t_0) = y_0$.

1) Lemme de Gronwall et unicité.

Lemme 5: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $a \in \mathbb{R}_+$, $u, v \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_+)$. On suppose:

$$\forall t \in I, u(t) \leq a + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds.$$

Alors:

$$\forall t \in I, u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right).$$

Corollaire 6: Un problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet au plus une solution sur I .

Application 7: Soit y, z deux solutions de $y' = A(t)y + b(t)$ sur I telle que $\|y(t_0) - z(t_0)\| < \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$. Alors pour $t \in I$:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \exp\left(\left|\int_{t_0}^t A(s)ds\right|\right).$$

2) Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Théorème 8: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_d(K))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, K^d)$, et $(t_0, y_0) \in I \times K^d$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale sur I .

Exemple 9: $\sin$ est l'unique solution de $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

• L'équation $\begin{cases} y'' + ky = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique

solution sur $\mathbb{R}$ bien qu'on ne dispose pas d'expression explicite simple de celle-ci.

3) Structure de l'ensemble des solutions.

Théorème 10: Soit $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_d(K))$. On note S_H l'ensemble des solutions globales de $y' = A(t)y$.

• S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, K^d)$.

• Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\Phi_{t_0}: S_H \rightarrow K^d$

est un isomorphisme de K -espace vectoriel $y \mapsto y(t_0)$.

• $\dim_K S_H = d$.

Théorème 11: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A \in \mathcal{C}^0(I, \text{Mld}(K))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, K^d)$.
L'ensemble S des solutions de $y' = A(t)y + b(t)$ est un sous-espace affine de direction S_H .

Application 12: Soit $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors sa transformée de Fourier est $\hat{f}: t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Remarque 13: Le théorème 11 indique qu'il suffit de connaître les solutions de l'équation homogène et une solution particulière de l'équation non homogène pour exprimer ses solutions.

II - Expression théorique des solutions et résolutions pratiques.

1) Résolvante et formule de Duhamel

Remarque 14: La théorie développée en I s'adapte en remplaçant K^d par un espace vectoriel de dimension finie ou un espace de Banach.

Définition 15: Soit $A \in \mathcal{C}^0(I, \text{Mld}(K))$. On appelle résolvante associée à $y' = A(t)y$ l'application $R: I \times I \rightarrow \text{Mld}(K)$ telle que $\forall t_0 \in I$, $t \mapsto R(t, t_0)$ est l'unique solution globale de $\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = \text{Id} \end{cases}$.

Théorème 16: Sous les notations de la définition 15, $R \in \mathcal{C}^1(I \times I, \text{Mld}(K))$ et $\forall (t, s) \in I \times I$, $\partial_1 R(t, s) = A(t)R(t, s)$ et $\partial_2 R(t, s) = -R(t, s)A(s)$.

Corollaire 17 (formule de Duhamel): Soit $A \in \mathcal{C}^0(I, \text{Mld}(K))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, K^d)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^d$. L'unique solution de $\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ s'écrit en fonction de la résolvante: $y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$.

Lemme 18: Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. On munit $E = \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^d)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. L'application $F: \mathbb{R}^d \times E \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(\alpha, x) \mapsto x - \alpha - \int_0^\cdot v(x(s))ds$

$$\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times E, \partial_2 F(\alpha, x) \Big|_{\alpha=0} \xrightarrow{h \mapsto h - \int_0^\cdot v(x(s)) \cdot h(s)ds} E$$

Théorème 19: Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$ et $x_0: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ la solution maximale de $\begin{cases} x'(t) = v(x(t)) \\ x(0) = \alpha_0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $\varepsilon \in [0, T]$, il existe un voisinage ouvert V de α_0 dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\forall \alpha \in V$, la solution maximale de $\begin{cases} x'(t) = v(x(t)) \\ x(0) = \alpha \end{cases}$ soit définie au moins sur $[0, \varepsilon]$.

Exemple 20: Domaine de définition des solutions maximales de $x'(t) = x(t)^2$.
2) Cas des coefficients constants.

Proposition 21: Soit $A \in \text{Mld}(K)$. La résolvante de $y' = Ay$ est $R: (t, s) \mapsto e^{(t-s)A}$.

Pour trouver les solutions de $y' = Ay$, on est amené à calculer e^{tA} , et donc à réduire $A \in \text{Mld}(K)$ diagonalisable.

Théorème 22: Soit $A \in \text{Mld}(\mathbb{C})$ et $\chi_A = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ son polynôme caractéristique, où $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sont $2d$ à $2d+1$ et $\alpha_i \geq 1$. Une base de l'espace S des solutions de $x' = Ax(t)$ est donnée par:

$$\forall j \in [1, r], \forall h \in [1, \alpha_j], z_{j,h}: t \mapsto e^{\lambda_j t} \sum$$

Théorème 22: Soit $A \in \text{Mld}(\mathbb{C})$ diagonalisable et $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $\mathbb{C}^d$ ass. de vecteurs propres de A , associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$. Une base de l'espace S_H des solutions de $x' = Ax$ est donnée par:

$$(t \mapsto e^{\lambda_j t} e_j)_{1 \leq j \leq d}$$

Exemple 23: L'équation $x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x$ admet comme base de solutions $\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$.

DVT 1

3) Outils de résolution linéaires.

Exemple 24: En utilisant la méthode de variation de la constante, l'unique solution de $\begin{cases} y' + y = e^{-t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ est $y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Application 25: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière et en 0 et:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Définition 26:

III - Etude qualitative des solutions.

1) Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

Lemme 26: Soit $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et x une solution non nulle de $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. Alors les zéros de x sont isolés et x admet un nb fini de zéros sur tout compact inclus dans I .

Théorème 27 (entrelacement de Sturm): Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $r, s \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ tels que $r \leq s$ sur I . Soit x, y des solutions non nulles de $x'' + r(t)x = 0$, $y'' + s(t)y = 0$. Soit $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de x . Alors: ou bien x et y sont proportionnels et $r = s$ ou bien y s'annule dans $]t_1, t_2[$.

Application 28: Soit $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une solution non nulle de $x'' + tx = 0$. Alors x s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$, et en notant $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite croissante des zéros de x :

$$t_n \sim \left(\frac{3\pi n}{2}\right)^{2/3}.$$

2) Stabilité des points d'équilibre.

Soit $A \in \text{M}_d(\mathbb{R})$. On étudie la stabilité du point d'équilibre Ode l'équation $x' = Ax$ (E) sur, définie sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 29: On dit que 0 est un point d'équilibre

• stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\forall x_0 \in B(0, \eta)$, la solution x de (E) avec $x(0) = x_0$ reste dans $B(0, \varepsilon)$ (sur $\mathbb{R}_+$).

• asymptotiquement stable si 0 est stable et s'il existe $\eta > 0$ tq $\forall x_0 \in B(0, \eta)$, la solution x de (E) avec $x(0) = x_0$ tend vers 0 en $+\infty$.

• instable sinon
Lemme 30: Soit f On suppose que $\text{Re}(Sp(A)) \subset \mathbb{R}^*$. Alors il existe $\alpha, C > 0$ tq $\forall t \geq 0, \|e^{tA}\| \leq Ce^{-\alpha t}$.

Théorème 30: 0 est un point d'équilibre...

• stable ssi $\text{Re } Sp(A) \subset \mathbb{R}^*$ et pour tout $\lambda \in Sp(A)$ tq $\text{Re } \lambda = 0$, λ est non défective.

• asymptotiquement stable ssi $\text{Re } Sp(A) \subset \mathbb{R}^*$.

Exemple 31: Pour $d=2$, on représente quelques portraits de phase en annexe selon les valeurs propres de A .

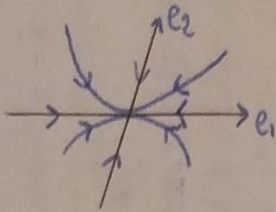
Remarque 32: On peut utiliser le théorème 30 pour montrer le théorème de linéarisation de Lyapunov et étudier la stabilité dans le cas non linéaire.

DVT 2

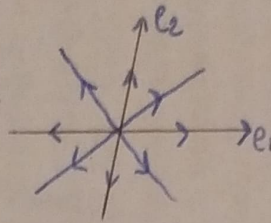
Intercalaire N°

Annexe : exemple 31

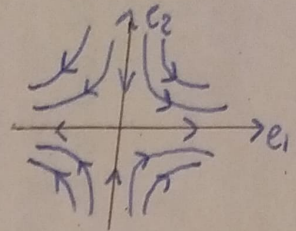
$Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, (e_1, e_2) base de vecteurs propres de A .



$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$$



$$\lambda_2 = \lambda_1 > 0$$



$$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$$