

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes.

Exemples et applications.

Soit I un intervalle d'intérieur non vide.

I Définitions et caractérisations

I.1 Fonctions monotones

Définition 1 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si $\forall x, y \in I$ tels que $x < y$, $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$). On dit que f est (strictement) décroissante si $-f$ est (strictement) croissante. On dit que f est (strictement) monotone sur I si f est (strictement) croissante ou décroissante sur I .

Exemple 2 : La fonction $x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 3 : La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est croissante.

Proposition 4 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si et seulement si f' est croissante (resp. strictement croissante) sur I .

Exemple 5 : La fonction $f : x \mapsto (1+x)/(1-x)$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Remarque 6 : La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ définie sur $]0, 2[$ est dérivable sur $]0, 2[\setminus \{1\}$, de dérivée positive, mais n'est pas croissante sur $]0, 2[$.

I.2 Fonctions convexes

Définition 7 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe (resp. strictement convexe) sur I si pour tous $x \neq y$ dans I , $\forall t \in]0, 1[$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ (resp. $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$). On dit que f est (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Remarque 8 : Graphiquement, cette définition signifie qu'une fonction convexe se situe sous ses cordes.

Exemple 9 : Une fonction est affine sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est convexe et concave sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 10 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I ;
2. pour tous $x < y < z$ dans I , $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$;
3. pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur I .

Proposition 11 : On suppose I ouvert. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est (strictement) convexe sur I ;
2. f' est (strictement) croissante sur I ;
3. pour tous $x \neq a \in I$, $f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$ (resp. $f(x) > f(a) + (x-a)f'(a)$).

Remarque 12 : Graphiquement, le dernier point signifie qu'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes.

Exemple 13 : Les fonctions $\exp$, $x \mapsto x^2$ sont strictement convexes sur $\mathbb{R}$. La fonction $\sin$ est strictement concave sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Proposition 14 : On suppose I ouvert. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I .

1. f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.
2. Si $f'' > 0$, alors f est strictement convexe.

Exemple 15 : La fonction $x \mapsto (1+x)/(1-x)$ est strictement concave sur I .

Remarque 16 : La réciproque du deuxième point est fausse : la fonction $x \mapsto x^4$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée seconde s'annule en 0.

Définition 17 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $C \subset E$ un ensemble convexe. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur C si pour tous $x, y \in C$, la fonction $g : t \in [0, 1] \mapsto f(tx + (1-t)y)$ est convexe.

Remarque 18 : On adapte de même la définition de strictement convexe, de concave...

Exemple 19 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. La norme $\|\cdot\|$ est une fonction convexe.

Remarque 20 : Si f est de classe $\mathcal{D}^1$ ou $\mathcal{D}^2$ sur son domaine de définition, on retrouve des caractérisations analogues de la convexité sur $\mathbb{R}$. La condition de croissance de f' est remplacée par $\forall x, y \in U$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ et la condition $f'' \geq 0$ est remplacée par la positivité de la matrice hessienne de f .

Exemple 21 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ est convexe si et seulement si A est positive, et f est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.

II Stabilités et régularité

II.1 Stabilités

Proposition 22 : La croissance et la convexité sont des propriétés stables par multiplication par un scalaire positif, par somme et par limite simple.

Remarque 23 : Les fonctions convexes et les fonctions croissantes forment des semi-cônes convexes de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Exemple 24 : Pour $n \geq 1$, on définit la suite décroissante $(A_n)_{n \geq 1}$ de boréliens de $[0, 1]$ par $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ et $\forall n \geq 1$, $A_{n+1} = \frac{A_n}{3} + \frac{2+A_n}{3}$. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on définit $f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbf{1}_{A_n}(t) dt$. Alors la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction croissante f appelée escalier de Cantor-Lebesgue.

Proposition 25 : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow J$ une fonction convexe et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et convexe. Alors $g \circ f$ est une fonction convexe.

II.2 Régularité

Proposition 26 : Une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite à gauche et à droite en tout point.

Proposition 27 : Le nombre de discontinuités d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Proposition 28 : Une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue, dérivable à gauche et à droite sur I .

Théorème 29 : (Théorème de Lebesgue (admis)) Une fonction monotone est dérivable presque partout.

Exemple 30 : L'escalier de Cantor-Lebesgue est une fonction croissante, continue, valant 0 en 0 et 1 en 1, dérivable presque partout et de dérivée nulle.

III Applications

III.1 Inégalités de convexité

Proposition 31 : Pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exemple 32 : Soit $\alpha > 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha \sin^2(x)}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

Proposition 33 : (Inégalité de Jensen) Si f est μ -intégrable à valeurs dans I avec μ une mesure de probabilité, pour toute fonction convexe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu$$

Exemple 34 : (Inégalité de Young) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(1/p) + (1/q) = 1$. Alors $ab \leq (a^p/p) + (b^q/q)$.

Remarque 35 : L'inégalité de Young permet de montrer les inégalités de Hölder et de Minkowski, et ainsi d'établir que pour $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur $L^p(X)$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

III.2 Étude de suites et de séries

Proposition 36 : Soit F un segment de $\mathbb{R}$ stable par une fonction continue f . On prend $u_0 \in F$ et on définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante sur F , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et elle converge vers un point fixe de f . Si f est décroissante sur F , les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires et convergent vers des points fixes de $f \circ f$.

Exemple 37 : Sans l'hypothèse de continuité, la suite ne converge pas forcément vers un point fixe de f : Si f est définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$, et si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f .

Théorème 38 : (Comparaison série-intégrale) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante. Alors la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exemple 39 : On détermine un développement asymptotique à l'ordre 3 de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème 40 : (Théorème de Dini) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues croissantes sur $[a, b]$ qui converge simplement vers f continue sur $[a, b]$. Alors, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

III.3 Optimisation

Théorème 41 : Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable. Si f admet un point critique a dans l'intérieur de C , alors f admet un minimum global en a . Si de plus f est strictement convexe, ce minimum est strict.

Exemple 42 : Dans l'exemple 21, f admet un minimum en $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $Ax = b$.

Théorème 43 : (Développement 1) (Méthode de Newton) Soit $f \in \mathcal{C}^2([c, d], \mathbb{R})$. On suppose que $f' > 0$ sur $[c, d]$ et que $f(c) < 0 < f(d)$.

1. f s'annule en un unique point $a \in]c, d[$.
2. Il existe $\alpha, C > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence à partir de x_0 par la relation $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ converge vers a , avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$.

3. Si de plus $f'' > 0$ sur $[c, d]$, pour tout $x_0 \in]a, b]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessus est bien définie et converge vers a , avec :

$$x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Exemple 44 : (Développement 1) Dans le dernier point, si $f'(a) = 0$, on perd la convergence quadratique.

III.4 Équations différentielles : fonctions de Lyapounov

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On étudie l'équation différentielle :

$$x'(t) = f(x(t)). \quad (1)$$

Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = 0$.

Définition 45 : Soit $L \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On dit que L est une fonction de Lyapounov (resp. stricte) en x^* pour (1) s'il existe un voisinage ouvert V de x^* tel que :

1. L admet un minimum strict en x^* sur V ;
2. la fonction $\ell : x \mapsto \langle \nabla L(x), f(x) \rangle$ est négative sur V (resp. strictement négative sur $V \setminus \{x^*\}$).

Lemme 46 : (Développement 2) Soit L une fonction de Lyapounov en x^* et V un voisinage ouvert sur lequel ℓ est négative. Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (1) à valeurs dans V . Alors la fonction $L \circ x$ est décroissante sur I .

Théorème 47 : (Développement 2) On suppose qu'il existe une fonction de Lyapounov L en x^* pour (1). Alors x^* est stable. Si L est de plus stricte, alors x^* est asymptotiquement stable.

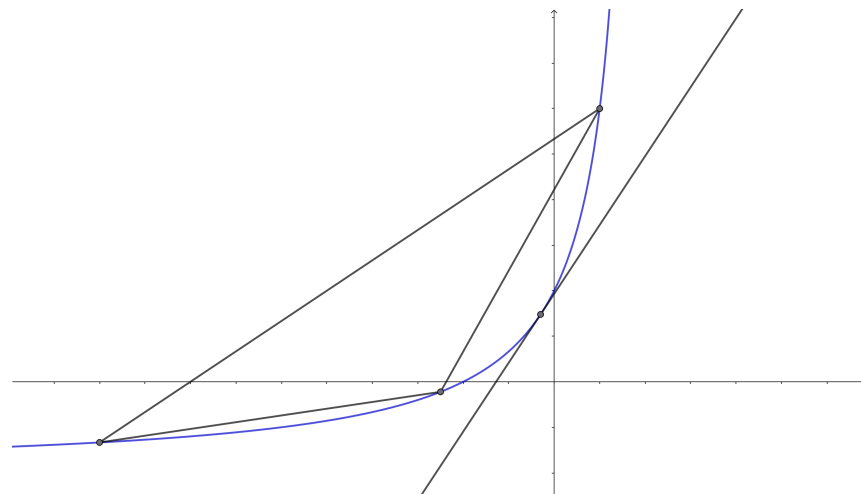
Exemple 48 : On considère le système différentiel associé au pendule simple ou amorti

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) - 2\gamma y \end{cases}$$

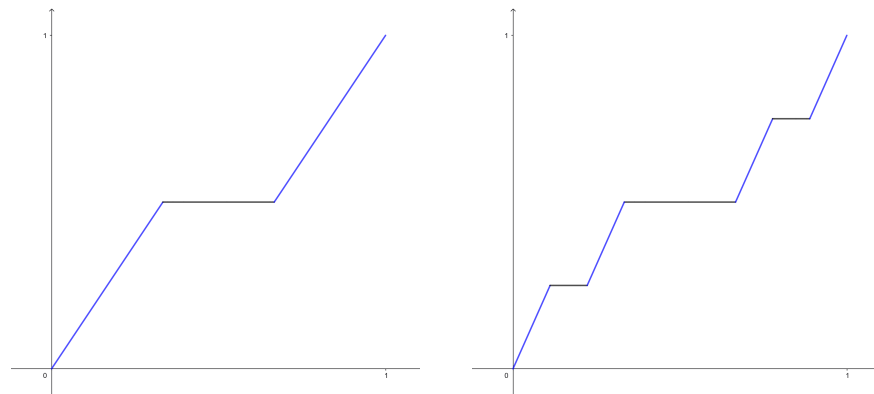
où $\gamma \in \{0, 1\}$. On travaille sur le voisinage $V =]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ du point d'équilibre $x^* = (0, 0)$. La fonction $L_1(x, y) = -\cos(x) + \frac{1}{2}y^2$ est une fonction de Lyapounov non stricte, donc x^* est un point d'équilibre stable.

Si $\gamma = 1$, la fonction $L_2(x, y) = L_1(x, y) + xy + x^2$ est une fonction de Lyapounov stricte, donc x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

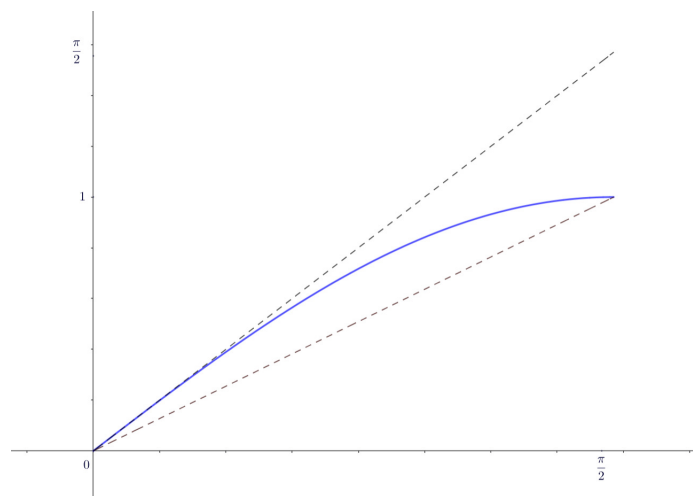
Annexe :



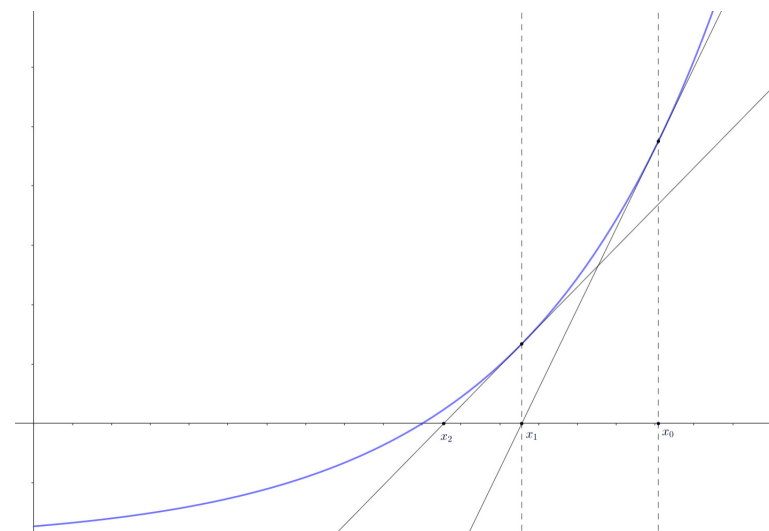
Inégalité des pentes, f convexe implique f au dessus de ses tangentes et sous ses cordes.



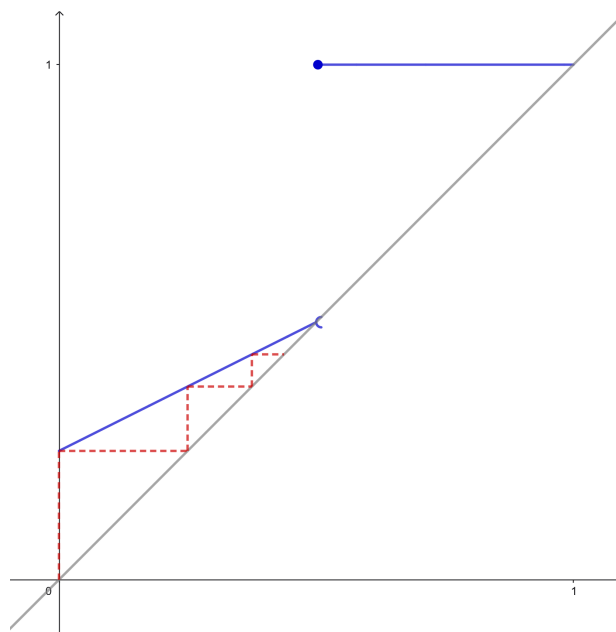
Étapes 1 et 2 de la construction de l'escalier de Cantor-Lebesgue.



Inégalité de convexité du sinus sur $[0, \pi/2]$.



Méthode de Newton (convergence quadratique).



Exemple 37 du plan.