

Nom:

LARIVÉ

Prénom:

Pierre

Numéro de Jury:

Numéros des sujets tirés:

214 - 239

Intitulé du sujet choisi:

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.
Exemple et application.

I - Exemple de fonctions définies par une intégrale à paramètre.

Exemple 1: La fonction

$$\Gamma:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

est bien définie.

Exemple 2: Toute primitive d'une fonction continue ^{sur $\mathbb{R}$} s'écrit sous la forme d'une intégrale à paramètre. Par exemple une primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ s'écrit:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Exemple 3: Soit $d \geq 1$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On définit la transformée de Fourier de f par $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i \langle t, x \rangle} dx$$

Exemple 4: Soit $f \in L^\infty([0, +\infty[)$. On définit sa transformée de Laplace

$$L(f): \Omega \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Exemple 5: Le produit de convolution de deux fonctions est une intégrale à paramètre. On étudiera les deux cas suivants:

- pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^d)$ où $m \geq 0$.

- pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ où $p, q \in [1, +\infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Le produit de convolution $f * g$ est alors la fonction $f * g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

II - Continuité d'une intégrale à paramètre.

Théorème 6: Soit (E, d) un espace métrique et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $f: E \times X \rightarrow \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.

On suppose:

- (i) pour chaque $u \in E$, la fonction $f(u, \cdot)$ est μ -mesurable
- (ii) pour presque tout $x \in X$, la fonction $f(\cdot, x)$ est continue sur E . positive
- (iii) il existe $g \in L^1(X)^+$ telle que pour tout $u \in E$ et presque tout $x \in X$, $|f(u, x)| \leq g(x)$.

Alors $F: u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est bien définie et continue sur E .

Exemple 7: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 8: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. La fonction

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et continue sur } \mathbb{R}.$$

$$u \mapsto \int_a^u f(x) dx$$

Remarque 9: La continuité d'une intégrale à paramètre ne découle pas toujours du théorème de continuité.

Par exemple, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $p, q \in [1, +\infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g$ est uniformément continue, mais $x \mapsto f(y)g(x-y)$ et $x \mapsto f(x-y)g(y)$ ne le sont pas en général.

III - Dérivabilité d'une intégrale à paramètre.

Théorème 10: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f: I \times X \rightarrow \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On suppose:

- (i) pour chaque $u \in I$, la fonction $f(u, \cdot)$ est intégrable
- (ii) pour presque tout $x \in X$, la fonction $f(\cdot, x)$ est dérivable sur I
- (iii) il existe $g \in L^1(X)$ positive telle que pour tout $u \in I$ et presque tout $x \in X$, $|\partial_u f(u, x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction $F: u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est bien définie,

dérivable sur I et pour tout $u \in I$, $F'(u) = \int_X \partial_u f(u, x) d\mu(x)$.

Remarque 11: Dans le théorème précédent, si $f(\cdot, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , alors on conclut que F l'est aussi.

Remarque 12: On peut généraliser ce théorème à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ au lieu de I , en travaillant avec les dérivées partielles de $f(\cdot, x)$.

Remarque 13: Il existe une version " $\mathcal{C}^k$ " de ce théorème, dans lequel on domine chaque fonction $\partial_u^k f$ pour $1 \leq k \leq k$.

Exemple 14: La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et:

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Remarque 15: Le caractère dérivable ou $\mathcal{C}^k$ d'une fonction étant une propriété locale, il suffit d'avoir la domination (iii) sur tout compact de I .

Exemple 16: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f'(t) = -i \int_{\mathbb{R}} xf(x) e^{-itx} dx$.

Exemple 17: La fonction $\mathcal{L}(f): \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $p \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt$ est
 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{L}(f): \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $p \mapsto -\int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t dt$.

$$\text{Application 18: } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Théorème 19: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose:

- (i) pour chaque $z \in \Omega$, $f(z, \cdot)$ est mesurable.
- (ii) pour presque tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est holomorphe sur Ω
- (iii) il existe $g \in L^1(X)$ positive telle que pour tout $z \in \Omega$ et presque tout $x \in X$, $|f(z, x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction $F: z \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x)$ est bien définie, holomorphe sur Ω et $F': z \mapsto \int_X \partial_z f(z, x) d\mu(x)$.

Exemple 20: La transformée de Laplace introduite dans l'exemple 4 est holomorphe sur Ω .

IV - Etude asymptotique.

Exemple 21: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f}(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$ (lemme de Riemann-Lebesgue).

Théorème 22 (méthode de Laplace 1). Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty]$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $f(a) \neq 0$, et que $\varphi'(x) > 0$ pour $x \in [a, b]$. On suppose enfin qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que: $\int_a^b f(x) e^{-\lambda_0 \varphi(x)} dx < +\infty$.

Alors $F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{-\lambda \varphi(x)} dx$ est bien définie sur $[b_0, +\infty[$ et $F(\lambda) \sim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(a)}{\lambda} e^{-\lambda \varphi(a)}$

Exemple 23: On étudie le reste de la gaussienne:

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt. \text{ Alors } F(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}$$

Théorème 24 (Méthode de Laplace 2). Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty]$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose $f(a) \neq 0$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) \neq 0$, $\varphi'(x) > 0$ pour $x \in]a, b[$. On suppose enfin qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f(x) e^{-\lambda_0 \varphi(x)} dx < +\infty$.

Alors $F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{-\lambda \varphi(x)} dx$ est bien définie sur $[\lambda_0, +\infty[$ et $F(\lambda) \sim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(a)\lambda}} f(a) e^{-\lambda \varphi(a)}$

Application 25: On étudie le comportement asymptotique de la fonction $\Gamma: \Gamma(x+1) \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$

On retrouve ainsi l'équivalent de Stirling:

$$n! \sim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$