

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Définition 1 : On appelle série entière associée à une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum a_n z^n$. On appelle somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ définie en tout point z où cela a un sens.

Exemple 2 : La série $\sum z^n$ est une série entière. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ vaut $\frac{1}{1-z}$.

Exemple 3 : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X , et on note G_X la somme de la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n) z^n$.

I Rayon de convergence

Définition 4 : On appelle rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ l'élément $R \in \bar{\mathbb{R}}_+$ défini par $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$ et disque de convergence le disque $\mathbb{D}(0, R)$.

Exemple 5 : Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est égal à 1.

Exemple 6 : Le rayon de convergence de la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est au moins 1.

Proposition 7 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

- si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement ;
- si $|z| = R$, alors on ne peut rien dire a priori.

Exemple 8 : La série entière $\sum z^n/n$ a pour rayon de convergence 1, diverge en $z = 1$, mais converge en $z = -1$ (série alternée).

Exemple 9 : La fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire discrète X est bien définie pour $|z| \leq 1$ et $G_X(1) = 1$.

Théorème 10 : (Formule de Hadamard) Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Théorème 11 : (Théorème radial d'Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Alors la série entière réelle $x \mapsto \sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$. En particulier,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Exemple 12 : On a $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ en utilisant le DSE en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ établi plus loin.

Proposition 13 : Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b .

Le rayon de convergence R de leur somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a < R_b$, et pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Proposition 14 : Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b .

Le rayon de convergence R de leur produit de Cauchy $\sum c_n z^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$, vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

Exemple 15 : On peut avoir des inégalités strictes dans les deux résultats précédents : la somme des séries $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ est de rayon de convergence infini alors que les deux séries sont de rayon de convergence 1. De même, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2, b_0 = -1$ et pour $n \geq 1$, $a_n = 2^n$ et $b_n = 1$. Alors $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence 1, mais leur produit de Cauchy est nul, donc de rayon de convergence infini.

Application 16 : Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Exemple 17 : Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètre respectif $\lambda, \mu > 0$. Alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exemple 18 : On ne peut piper deux dés indépendants de sorte que leur somme suive une loi uniforme.

Application 19 : (Nombre de partitions à parts fixées d'un entier) Soit $k \geq 1$ et $a_1, \dots, a_k$ des entiers non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \geq 1$, on note u_n le nombre de k -uplets $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n$. Alors, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n \sim \frac{1}{a_1 \cdots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

II Propriétés de la somme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $S : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ sa somme sur le disque de convergence

Proposition 20 : La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

Corollaire 21 : La somme S est continue sur $\mathbb{D}(0, R)$.

Théorème 22 : La somme S est holomorphe sur $D(0, R)$ et sa dérivée correspond à la dérivée terme à terme :

$$\forall z \in D(0, R), S'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Plus précisément, la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a encore R pour rayon de convergence.

Remarque 23 : Lorsqu'on travaille avec une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$.

Exemple 24 : On peut obtenir le développement de $\frac{1}{(1-x)^k}$ par dérivation de $\frac{1}{1-x}$.

Proposition 25 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X . Alors G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$. De plus, X admet une espérance si et seulement si G_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et dans ce cas, $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$.

Théorème 26 : Soit $[a, b] \subset]-R, R[$. Alors $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Application 27 : On obtient le développement en série entière en 0 de $\ln(1+x)$, $\arctan$ en intégrant le développement déjà connu de leur dérivée.

Proposition 28 : (Formule de Cauchy pour les coefficients) Soit $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

Application 29 : (Égalité de Parseval) Pour tout $r \in]0, R[$, la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

III Fonctions développables en série entière

Définition 30 : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie sur un voisinage de z_0 dans $\mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Remarque 31 : On adapte la définition pour les fonctions de la variable réelle en utilisant des séries entières de la variable réelle.

Proposition 32 : Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0, développable en une série entière $\sum a_n z^n$ en 0. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire 33 : Le développement en série entière d'une fonction f en un point, lorsqu'il existe, est donc unique.

Exemple 34 : ($\mathcal{C}^\infty$ n'implique pas développable en série entière) L'application $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Application 35 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors $X_n \rightarrow X$ en loi si et seulement si G_{X_n} converge simplement vers G_X sur $[0, 1[$.

Exemple 36 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{n}$. Alors X_n converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1.

Théorème 37 : Soit f une fonction de la variable réelle définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Alors f est développable en série entière en 0 si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que :

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$;
- La suite de fonctions $R_n : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ converge simplement vers 0 sur $] -r, r[$.

Théorème 38 : (Bernstein-Valiron, Développement 1) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)}$ est positive. Alors f est développable en série entière au voisinage de tout point $x_0 \in I$.

Exemple 39 : La fonction $\tan$ est développable en série entière en tout point de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Remarque 40 : Une façon d'obtenir un développement en série entière est d'utiliser une équation différentielle vérifiée par la fonction que l'on étudie. Cette technique est illustrée par les deux exemples suivants.

Exemple 41 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et pour tout $x \in] -1, 1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Application 42 : (Développement 2) Soit l'équation différentielle (E) :

$(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0$. Sur chaque intervalle $] -\infty, -1[,] -1, 0[$ et $] 0, +\infty[$, l'ensemble des solutions de (E) forme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{\ln(|t|)}{1+t}$.

IV Fonctions analytiques

Définition 43 : Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de U .

Exemple 44 : La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ et pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n$.

Théorème 45 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f : \mathbb{D}(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$. Alors f est analytique sur $\mathbb{D}(0, R)$.

Théorème 46 : Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est analytique.

Théorème 47 : (Principe des zéros isolés) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors les zéros de f sont isolés.

Exemple 48 : Il n'existe aucune fonction analytique f définie sur un ouvert contenant 0 telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Corollaire 49 : (Principe du prolongement analytique) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$. Si f et g coïncident sur un ensemble admettant un point d'accumulation, alors f et g coïncident sur U .

Application 50 : Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et la transformée de Fourier de f , notée $\hat{f}$, est $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Théorème 51 : (Principe du maximum) Soit U un ouvert connexe borné et f une fonction continue sur $\bar{U}$, analytique sur U . Alors f atteint son maximum sur ∂U .

Exemple 52 : Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(0, 1))$. Alors on ne peut avoir $\lim_{|z| \rightarrow 1^-} |f(z)| = +\infty$.

Références :

- Mohammed El Amrani, *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*
- Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la Licence 3*
- Hervé et Martine Queffélec, *Analyse complexe et applications*
- Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Oraux X-ENS* (partie sur les séries entières)
- Xavier Gourdon, *Analyse* (notamment pour le développement 1)
- Florent Berthelin, *Équations différentielles* (développement 2)