

Analyse BKW : équation de Schrödinger linéaire

Justification et estimation d'erreur

Léa BODEREAU & Pierre LARIVÉ

27 novembre 2024

Cadre de l'étude

On s'intéresse à l'équation de Schrödinger linéaire :

$$\begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u^\varepsilon = V u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x) e^{i \frac{\varphi_0(x)}{\varepsilon}} \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes :

- ▶ $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et V est sous-quadratique (i.e. ses dérivées d'ordre plus grand que 2 sont bornées) ;
- ▶ $\varphi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et φ_0 est sous-quadratique ;
- ▶ $a_0^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dans ce cadre, on a existence et unicité d'une solution $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))$.

Hypothèses de l'analyse BKW

On fait les hypothèses suivantes :

- ▶ $a_0^\varepsilon(x) = a_0(x) + o(1)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$;
- ▶ $a_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ où $s \geq 2$;
- ▶ $\|a_0^\varepsilon - a_0\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^\beta)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Construction de la solution approchée

On construit une solution approchée $v^\varepsilon = ae^{i\frac{\varphi_{eik}}{\varepsilon}}$ où a et φ_{eik} vérifient :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_{eik} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi_{eik}|^2 + V = 0 \\ \varphi_{eik}(0, x) = \varphi_0(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t a + \nabla \varphi_{eik} \cdot \nabla a + \frac{1}{2} a \nabla \varphi_{eik} = 0 \\ a(0, x) = a_0(x) \end{cases}$$

Sous nos hypothèses :

- Il existe $T > 0$ et une unique solution $\varphi_{eik} \in \mathcal{C}^\infty([-T, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, et φ_{eik} est sous-quadratique ;
- Il existe une unique solution $a \in \mathcal{C}^0([-T, T]; H^s(\mathbb{R}^n))$.

On a fait une hypothèse de contrôle initial :

$$\|u^\varepsilon(0) - v^\varepsilon(0)\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^n)} = \|a_0^\varepsilon - a_0\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^\beta)$$

🔗 Propriété 1 *Estimation d'erreur*

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $\varepsilon \in]0, 1]$:

$$\sup_{t \in [-T, T]} \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\varepsilon^{\min(1, \beta)}.$$

Si de plus $s - 2 > \frac{n}{2}$:

$$\sup_{t \in [-T, T]} \|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\varepsilon^{\min(1, \beta)}.$$

Lemme 1 *Lemme de Gronwall*

Soit $T > 0$, et $u, a, b \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}_+)$.

On suppose : $\forall t \in [0, T], u(t) \leq u(0) + \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t b(\tau)d\tau$.

Alors en posant $A(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$, on a :

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq u(0)e^{A(t)} + \int_0^t b(\tau)e^{A(t)-A(\tau)}d\tau$$

Lemme 2 *Estimation d'énergie*

Soit $\varepsilon > 0$, et F^ε à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que u^ε est solution sur un intervalle I de

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = F^\varepsilon u^\varepsilon + R^\varepsilon.$$

Alors :

$$\sup_{t \in I} \|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|u^\varepsilon(0, \cdot)\|_{L^2} + \frac{1}{\varepsilon} \int_I \|R^\varepsilon(\tau, \cdot)\|_{L^2} d\tau.$$

Estimation dans L^∞

Lemme 3 *Plongement de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$*

Lorsque $s > \frac{n}{2}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ se plonge de façon continue dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, i.e. il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^n), \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.

Lemme 4 *Norme de l'espace de Sobolev*

Soit $s \in \mathbb{N}$. Les deux normes suivantes sont équivalentes sur $H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{H_s(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

≡ Méthode *Obtenir une estimation dans $H^s(\mathbb{R}^n)$*

- ▶ Partir d'une EDP vérifiée par la fonction f à estimer ;
- ▶ Appliquer ∂_x^α à cette équation pour $|\alpha| \leq s$;
- ▶ Prendre le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ contre $\partial_x^\alpha \bar{f}$;
- ▶ Faire apparaître $\|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$;
- ▶ Sommer sur $|\alpha| \leq s$ pour faire apparaître $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.

Et l'ordre supérieur ?

On renforce nos hypothèses :

- ▶ $a_0^\varepsilon(x) = a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \cdots + \varepsilon^k a_k(x) + o(\varepsilon^k)$;
- ▶ $a_0 \in H^s, a_1 \in H^{s-2}, \dots, a_k \in H^{s-2k}$;
- ▶ $\|a_0^\varepsilon - a_0 - \varepsilon a_1 - \cdots - \varepsilon^k a_k\|_{H^{s-2k-2}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{k+\beta})$.

🔗 Propriété 2 *Estimation d'énergie*

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\varepsilon \in]0, 1]$:

$$\sup_{t \in [-T, T]} \|[u^\varepsilon(t) - v_{k+1}^\varepsilon(t)]e^{-i\frac{\varphi_{eik}(t)}{\varepsilon}}\|_{H^{s-2k-2}} \leq C\varepsilon^{\min(k+1, k+\beta)}.$$

Bonus : un autre lemme d'estimation d'énergie

Lemme 5 *Lemme de Gronwall bis*

Soit $T > 0, u, b \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{R}_+), f \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$.

On suppose : $\forall t \in [0, T], u(t) \leq u(0) + \int_0^t f(u(\tau))u(\tau)d\tau + \int_0^t b(\tau)d\tau$.

Alors en posant $M = \sup_{v \in [0, 2u(0)]} f(v)$, il existe $t^* \in]0, T]$ tel que :

$$\forall t \in [0, t^*], u(t) \leq u(0)e^{Mt} + \int_0^t b(\tau)e^{M(t-\tau)}d\tau.$$