# Développements et couplage

## Table des matières



## 1 Liste des développements

### 1.1 Algèbre et Géométrie

1. Partie génératrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ (101-108-(191))
2. Isométries du tétraèdre régulier ((101)-104-105-161-191)
3. Simplicité de $\mathfrak{A}_5$ et groupes simples d'ordre 60 (101-103-104-105)
4. Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$ (106-156)
5. Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$ (106-108-148-158-(161)-170)
6. Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$ (102-120-(121)-123-(125)-141-144)
7. Forme de Smith d'une matrice à coefficients dans un anneau euclidien (122-142-149)
8. Nombres de Carmichaël (120-121-127)
9. Algorithme de Berlekamp (122-123-142-148)
10. Théorème de l'élément primitif (125-(141))
11. Constructibilité des polygones réguliers (121-125-127-191)
12. Formes de Hankel (144-170-171)
13. Matrices de Gram et application à l'inégalité de Hadamard (149-161)
14. Endomorphismes semi-simples (141-150-151)
15. Réduction de Frobenius ((150)-151-159)
16. Dénombrement des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$ ((101)-103-152-190)
17. Surjectivité de exp : $M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ (150-152-155-(156))
18. exp : $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme ((152)-155-157)
19. Enveloppe convexe de $O(E)$ (157-158-159-181)
20. Par 5 points (...) passe une unique conique (162-171-181-191)
21. Dénombrement des permutations zigzagantes (190)

## 1.2 Analyse et Probabilités

1. Théorème du point fixe compact et application à une suite (203-223-226)
2. Théorème de Cauchy-Peano ((201)-203-209-241)
3. Théorème des extrema liés (206-214-215-219)
4. Théorème de l'application ouverte (205-208)
5. Représentation des fonctions lipschitziennes (201-205-208-213-234)
6. Théorème de Fejer (201-(209)-234-(241)-246)
7. Théorème d'échantillonnage de Shannon ((201)-(205)-213-250)
8. Domaine de définition et différentiabilité du flot d'une EDO autonome ((208)-214-215-220-221)
9. Calcul de $\zeta(2k)$ (230-246)
10. Théorème de Bernstein-Valiron (218-228-(230)-241-243)
11. Equivalent du nombre de zéros d'une EDO linéaire d'ordre 2 (220-221-223-224)
12. Méthode de Newton (218-(219)-(226)-228-(229)-253)
13. Théorème de Runge (204-209-(241))
14. Disques de Gershgörin - Composantes connexes (204)
15. Méthode du gradient à pas optimal (219-226-229-253)
16. Théorème de Lyapounov ((220)-(228)-229)
17. Transformée de Fourier d'une gaussienne ((235)-236-(239)-245-250)
18. Intégrale de Dirichlet (235-236-239)
19. Méthode de Laplace (224-239)
20. Indécomposabilité des lois de Poisson (243-245-261-264-(266))
21. Théorème de Cochran et application au test du $\chi^2$ d'adéquation (206-261-262-266)
22. Nombre moyen de sites visités par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ ((224)-230-235-(243)-264-266)

## 1.3 Les deux

1. Rayon spectral et méthodes itératives (153-156-162-(226))
2. Théorème de Perron-Frobenius (version simple) et application aux chaines de Markov (153-(206)-(261)-262-(264))

# 2 Couplage

## 2.1 Algèbre et Géométrie

**101 – Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.**

Partie génératrice de $SL_2(\mathbb{Z})$
Simplicité de $\mathfrak{A}_5$ et groupes simples d'ordre 60
(Dénombrement des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$)
(Isométries du tétraèdre régulier)

**102 – Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.**

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$

**103 – Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.**

Simplicité de $\mathfrak{A}_5$ et groupes simples d'ordre 60
Dénombrement des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$

**104 – Groupes finis. Exemples et applications.**

Isométries du tétraèdre régulier
Simplicité de $\mathfrak{A}_5$ et groupes simples d'ordre 60

**105 – Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.**

Isométries du tétraèdre régulier
Simplicité de $\mathfrak{A}_5$ et groupes simples d'ordre 60

**106 – Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.**

Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$
Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$
(Probabilité que deux éléments de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ commutent)

**108 – Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.**

Partie génératrice de $SL_2(\mathbb{Z})$
Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$

**120 – Anneaux Z/nZ. Applications.**

Nombres de Carmichaël
Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$

**121 – Nombres premiers. Applications.**

Nombres de Carmichaël
Constructibilité des polygones réguliers
(Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$)

**122 – Anneaux principaux. Exemples et applications.**

Forme de Smith d'une matrice à coefficients dans un anneau euclidien
Algorithme de Berlekamp

**123 – Corps finis. Applications.**

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$
Algorithme de Berlekamp

**125 – Extensions de corps. Exemples et applications**

Constructibilité des polygones réguliers
Théorème de l'élément primitif
(Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$)

**127 – Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.**

Nombres de Carmichaël
Constructibilité des polygones réguliers

**141 – Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$
Endomorphismes semi-simples

**142 – PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**

Forme de Smith d'une matrice à coefficients dans un anneau euclidien
Algorithme de Berlekamp

**144 – Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$
Formes de Hankel

**148 – Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.**

Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$
Algorithme de Berlekamp

**149 – Déterminant. Exemples et applications.**

Forme de Smith d'une matrice à coefficients dans un anneau euclidien
Matrices de Gram et application à l'inégalité de Hadamard

**150 – Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**

Endomorphismes semi-simples
Surjectivité de exp : $M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$
(Réduction de Frobenius)

**151 – Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**

Endomorphismes semi-simples
Réduction de Frobenius

**152 – Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**

Surjectivité de exp : $M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$
Dénombrement des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$
(exp : $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme)

**153 – Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.**

Rayon spectral et méthodes itératives
Théorème de Perron-Frobenius (version simple) et application aux chaines de Markov

**155 – Exponentielle de matrices. Applications.**

Surjectivité de exp : $M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$
exp : $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme

**156 – Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**

Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$
Rayon spectral et méthodes itératives
(Surjectivité de exp : $M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$)

**157 – Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**

exp : $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme
Enveloppe convexe de $O(E)$

**158 – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).**

Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$
Enveloppe convexe de $O(E)$

**159 – Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.**

Réduction de Frobenius
Enveloppe convexe de $O(E)$

**161 – Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.**

Isométries du tétraèdre régulier
Matrices de Gram et application à l'inégalité de Hadamard
(Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$)

**162 – Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**

Par 5 points (...) passe une unique conique
Rayon spectral et méthodes itératives

**170 – Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.**

Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$
Formes de Hankel

**171 – Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**

Formes de Hankel
Par 5 points (...) passe une unique conique

**181 – Convexité dans Rn. Applications en algèbre et en géométrie.**

Enveloppe convexe de $O(E)$
Par 5 points (...) passe une unique conique

**190 – Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**

Dénombrement des permutations zigzagantes
Dénombrement des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$

**191 – Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.**

Constructibilité des polygones réguliers
Par 5 points (...) passe une unique conique
(Isométries du tétraèdre régulier)
(Partie génératrice de $SL_2(\mathbb{Z})$)

## 2.2 Analyse et Probabilités

**201 – Espaces de fonctions. Exemples et applications.**

Représentation des fonctions lipschitziennes
Théorème de Fejer
(Théorème de Cauchy-Peano)
(Théorème d'échantillonnage de Shannon)
(Théorème de Runge)

**203 – Utilisation de la notion de compacité.**

Théorème du point fixe compact et application à une suite
Théorème de Cauchy-Peano

**204 – Connexité. Exemples d'applications.**

Théorème de Runge
Disques de Gershgörin - Composantes connexes

**205 – Espaces complets. Exemples et applications.**

Théorème de l'application ouverte
Représentation des fonctions lipschitziennes
(Théorème d'échantillonnage de Shannon)

**206 – Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.**

Théorème des extrema liés
Théorème de Cochran et application au test du $\chi^2$ d'adéquation
(Théorème de Perron-Frobenius (version simple) et application aux chaines de Markov)

**208 – Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.**

Théorème de l'application ouverte
Représentation des fonctions lipschitziennes
(Domaine de définition et différentiabilité du flot d'une EDO autonome)

**209 – Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.**

Théorème de Cauchy-Peano
Théorème de Runge
(Théorème de Fejer)

**213 – Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.**

Représentation des fonctions lipschitziennes
Théorème d'échantillonnage de Shannon

**214 – Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.**

Théorème des extrema liés
Domaine de définition et différentiabilité du flot d'une EDO autonome

**215 – Applications différentiables définies sur un ouvert de Rn. Exemples et applications.**

Théorème des extrema liés
Domaine de définition et différentiabilité du flot d'une EDO autonome

**218 – Formules de Taylor. Exemples et applications.**

Théorème de Bernstein-Valiron
Méthode de Newton

**219 – Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**

Théorème des extrema liés
Méthode du gradient à pas optimal
(Méthode de Newton)

**220 – Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.**

Domaine de définition et différentiabilité du flot d'une EDO autonome
Equivalent du nombre de zéros d'une EDO linéaire d'ordre 2
(Théorème de Lyapounov)

**221 – Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.**

Domaine de définition et différentiabilité du flot d'une EDO autonome
Equivalent du nombre de zéros d'une EDO linéaire d'ordre 2

**223 – Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**

Théorème du point fixe compact et application à une suite
Equivalent du nombre de zéros d'une EDO linéaire d'ordre 2

**224 – Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.**

Equivalent du nombre de zéros d'une EDO linéaire d'ordre 2
Méthode de Laplace

**226 – Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.**

Théorème du point fixe compact et application à une suite
Méthode du gradient à pas optimal
(Méthode de Newton)
(Rayon spectral et méthodes itératives)

**228 – Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.**

Théorème de Bernstein-Valiron
Méthode de Newton
(Théorème de Lyapounov)

**229 – Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**

Méthode du gradient à pas optimal
Théorème de Lyapounov
(Méthode de Newton)

**230 – Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**

Calcul de $\zeta(2k)$
Nombre moyen de sites visités par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$
(Théorème de Bernstein-Valiron)

**234 – Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**

Représentation des fonctions lipschitziennes
Théorème de Fejer

**235 – Problèmes d'interversion de symboles en analyse**

Intégrale de Dirichlet
Nombre moyen de sites visités par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$
(Transformée de Fourier d'une gaussienne)

**236 – Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.**

Transformée de Fourier d'une gaussienne
Intégrale de Dirichlet

**239 – Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**

Intégrale de Dirichlet
Méthode de Laplace
(Transformée de Fourier d'une gaussienne)

**241 – Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**

Théorème de Cauchy-Peano
Théorème de Bernstein-Valiron
(Théorème de Fejer)
(Théorème de Runge)

**243 – Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**

Théorème de Bernstein-Valiron
Indécomposabilité des lois de Poisson
(Nombre moyen de sites visités par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$)

**245 – Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.**

Transformée de Fourier d'une gaussienne
Indécomposabilité des lois de Poisson

**246 – Séries de Fourier. Exemples et applications.**

Théorème de Fejer
Calcul de $\zeta(2k)$

**250 – Transformation de Fourier. Applications.**

Théorème d'échantillonnage de Shannon
Transformée de Fourier d'une gaussienne

**253 – Utilisation de la notion de convexité en analyse.**

Méthode de Newton
Méthode du gradient à pas optimal

**261 – Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.**

Indécomposabilité des lois de Poisson
Théorème de Cochran et application au test du $\chi^2$ d'adéquation

**262 – Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.**

Théorème de Cochran et application au test du $\chi^2$ d'adéquation
Théorème de Perron-Frobenius (version simple) et application aux chaines de Markov

**264 – Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

Indécomposabilité des lois de Poisson
Nombre moyen de sites visités par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$
(Théorème de Perron-Frobenius (version simple) et application aux chaines de Markov)

**266 – Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.**

Théorème de Cochran et application au test du $\chi^2$ d'adéquation
Nombre moyen de sites visités par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$
(Indécomposabilité des lois de Poisson)

# 3 Description des développements et références

### Partie génératrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ (101-108-(191))

**Référence :** Aviva Szpirglas. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [29]
Je montre que $SL_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S\rangle$ où $T = \begin{bmatrix}1 & 1//0 & 1\end{bmatrix}$ et $S = \begin{bmatrix}0 & -1//1 & 0\end{bmatrix}$. Je note $\Gamma = \langle T, S\rangle$.

1. On a d'abord $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$
2. On fait agir $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ par homographie. J'admets que c'est une action de groupe, et je vérifie seulement que le demi-plan de Poincaré est conservé par cette action en calculant $\mathrm{Im}(A \cdot z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ où $A = \begin{bmatrix}a & b//c & d\end{bmatrix}$.
3. On définit ensuite $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1/2 \text{ et } |z| \geq 1\}$ (je fais un dessin). J'annonce qu'on va montrer deux lemmes (ceux des points suivants) et je les utilise pour conclure.
4. Je montre le premier lemme : si $z \in \mathbb{H}$, alors il existe $B \in \Gamma$ tel que $B \cdot z \in \mathcal{D}$. Pour cela, on fait d'abord monter le point le plus possible en montrant que $\{\mathrm{Im}(A \cdot z) \mid A \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ et } \mathrm{Im}(A \cdot z) \geq \mathrm{Im}(z)\}$ est un ensemble fini. Puis on le ramène dans $\mathcal{D}$ par translations avec $T$.
5. Je montre le deuxième lemme : si $z \in \mathcal{D}$ et $A \cdot z \in \mathcal{D}$ avec $z$ ou $A \cdot z$ dans l'intérieur de $\mathcal{D}$, alors $A = \pm I_2$. Par symétrie, on se ramène au cas où $\mathrm{Im}(A \cdot z) \geq \mathrm{Im}(z)$ quitte à travailler avec $A^{-1}$ plutôt que $A$. En utilisant le calcul du premier lemme on obtient que $c \in \{-1, 0, 1\}$. On traite ensuite au cas par cas.

### Isométries du tétraèdre régulier ((101)-104-105-161-191)

**Référence :** Philippe Caldero and Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie*. Calvage et Mounet, 2022 [9]
Je définis le tétraèdre $\mathcal{T}$ comme l'enveloppe convexe de ses sommets $\mathcal{S}$, puis je suis les étapes :

1. $\mathrm{Is}(\mathcal{T}) = \mathrm{Is}(\mathcal{S})$ en utilisant des points extrémaux ;
2. $\mathrm{Is}(\mathcal{S}) = \mathfrak{S}(\mathcal{S}) \simeq \mathfrak{S}_4$ en vérifiant l'injectivité et la surjectivité du morphisme.

### Simplicité de $\mathfrak{A}_5$ et groupes simples d'ordre 60 (101-103-104-105)

**Référence :** Aviva Szpirglas. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [29]
Ce développement en cache en fait deux. Pour les leçons 101, 103 et 104, j'admets la simplicité de $\mathfrak{A}_5$ et je montre que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$. Pour cela :

1. expliquer que cela revient à faire agir non trivialement $G$ sur un ensemble à 5 éléments, par exemple sur $G/H$ où $H$ est un sous-groupe d'indice 5 ;
2. supposer par l'absurde que $G/H$ n'admet pas de sous-groupe d'indice 5 et observer qu'il n'admet pas non plus de sous-groupes d'indice $2, 3, 4$ ;
3. compter les $5-$Sylow et les $2-$Sylow de $G$ et montrer qu'il y en a beaucoup, et qu'ils sont tous d'intersection triviale. $G$ contient alors trop d'éléments.

Dans la leçon 105, je montre la simplicité de $\mathfrak{A}_5$ par dénombrement des classes de conjugaison, puis la simplicité de $\mathfrak{A}_n$ en me ramenant à celle de $\mathfrak{A}_5$.

### Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$ (106-156)

**Référence :** Aviva Szpirglas. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [29]
Soit $E$ un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On montre qu'un sous-groupe de $GL(E)$ est fini ssi il est d'exposant fini. L'implication directe est vraie en général. Pour l'implication réciproque, étant donné $G$ un sous-groupe de $GL(E)$ :

1. prendre une base $(v_1, \cdots v_r)$ de l'espace vectoriel engendré par $G$ et considérer l'application $T : u \in G \mapsto (\mathrm{Tr}(u \circ v_j))_{j \in [\![1,r]\!]} \in \mathbb{C}^r$ ;
2. montrer son injectivité en montrant que si $T(u) = T(w)$, alors $n = u \circ w^{-1} - \mathrm{id}$ est diagonalisable et nilpotent donc nul. Pour le caractère nilpotent, on établit la caractérisation par la trace nulle des puissances qui utilise un déterminant de Vandermonde ;
3. montrer que $T(G)$ est un ensemble fini en utilisant que $X^e - 1$ est un polynôme annulateur de tout élément de $G$.

Je prépare quelques exemples pour les questions : groupe infini d'exposant fini $\to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, sous-groupes finis de $GL(E) \to$ tout groupe fini par Cayley linéaire, groupes d'isométries d'un polyèdre régulier, $\mu_k(\mathbb{C})I_n$. Le résultat reste vrai si on prend $E$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, car $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

## Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$ (106-108-148-158-(161)-170)

**Référence :** Aviva Szpirglas. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [29] (il me semble que c'est mieux fait dans le Perrin)

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Je montre les résultats suivants :

1. Soit $u \in O(E)$ et $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{id}_E)$. Alors $u$ s'écrit comme produit d'au plus $r$ réflexions (récurrence sur $r$) ;
2. $r$ est aussi minimal (intersection d'hyperplans) ;
3. Soit $u \in O(E)$ et $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{id}_E)$. Si $n \geq 3$, $u$ s'écrit comme produit d'au plus $r$ retournements.

Le dernier point est faux en dimension 2 car le seul retournement est l'identité. $r$ n'est plus optimal dans le dernier point, considérer un retournement en dimension 3.

## Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$ (102-120-(121)-123-(125)-141-144)

**Référence :** Ivan Gozard. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [21]

Je montre en application le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$, et si j'ai le temps, je commence à expliquer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\omega)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

## Forme de Smith d'une matrice à coefficients dans un anneau euclidien (122-142-149)

**Référence :** Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005 [3]

Ce développement est long, je me prépare bien à devoir résumer les arguments de l'unicité si je manque de temps. Je commence par l'unicité pour la leçon 149. Je suis les étapes suivantes :

1. Écrire l'algorithme en expliquant le but de chaque étape
2. Prouver que l'algorithme termine. Je fais un petit schéma et j'explique que le stathme du coefficient $u_{1,1}$ décroit au long de l'algorithme, strictement à chaque retour en arrière, donc qu'on finit par appeler l'algorithme sur une matrice de taille strictement inférieure.
3. Pour l'unicité, je caractérise les éléments diagonaux $d_1 | \cdots | d_s$ et $s$ en posant $D_k = d_1 \cdots d_k$ (ou 0 si $k > s$) et $\Lambda_k(U)$ le pgcd des mineurs de taille $k$ de $U$, puis je montre d'abord que $D_k$ et $\Lambda_k(D)$ sont associés, puis que si $U, U'$ sont équivalentes, $\Lambda_k(U)$ et $\Lambda_k(U')$ sont associés (multilinéarité du déterminant et CL de lignes ou colonnes).

## Nombres de Carmichaël (120-121-127)

**Référence :** Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie.* Deboeck, 2021 [27]

Je montre le théorème de Korselt qui permet de caractériser les nombres de Carmichaël : $n$ est de Carmichaël ssi il existe $r \geq 3$ et $3 \leq p_1 < \cdots < p_r$ tels que $n = p_1 \cdots p_r$ et $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $p_j - 1 | n - 1$. Je suis les étapes suivantes :

1. implication réciproque par le théorème d'isomorphisme chinois ;
2. un nombre pair ou avec un facteur carré n'est pas de Carmichaël ;
3. implication directe, en montrant d'abord la propriété de divisibilité, puis en l'utilisant pour montrer que $r = 2$ est impossible.

S'il me reste du temps à la fin, j'utilise le résultat pour montrer que 561 est de Carmichaël. On m'a dit qu'on peut s'en servir pour faire un test de primalité mais je n'ai pas travaillé plus loin. Je crois qu'il y a des choses en ce sens dans Michel Demazure. *Cours d'algèbre.* Cassini, 2009 [10].

## Algorithme de Berlekamp (122-123-142-148)

**Référence :** Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K, 2005 [3]

Soit $P \in \mathbb{F}_q[X]$ unitaire non constant sans facteurs carrés et $P = P_1 \cdots P_r$ sa décomposition en irréductibles. Je montre :

1. comment obtenir algorithmiquement $r$, ce qui fournit un test d'irréductibilité. Pour cela, on montre que $r = \dim \ker(S_P - \mathrm{id})$ où $S_P : u \in \mathbb{F}_q[X]/\langle P \rangle \mapsto u^q \in \mathbb{F}_q[X]/\langle P \rangle$. On utilise le théorème d'isomorphisme chinois pour se placer sur un anneau plus pratique : $\prod \mathbb{F}_q[X]/\langle P_i \rangle$.
2. si $r > 1$, comment écrire $P$ comme produit de diviseurs stricts. Pour cela, on fixe $V \in \mathbb{F}_q[X]$ dans $\ker(S_P - \mathrm{id})$ non constant modulo $P$ (qu'on peut calculer algorithmiquement), puis on calcule, pour $\alpha \in \mathbb{F}_q$, $D_\alpha = \mathrm{pgcd}(P, V - \alpha)$. On montre que $P = \prod D_\alpha$.
3. comment combiner ces deux étapes pour conclure.

J'ai en tête ce qu'il faut faire pour généraliser l'algorithme au cas où $P$ n'est pas sans facteurs carrés. C'est bien expliqué dans la référence.

## Théorème de l'élément primitif (125-(141))

**Référence :** Ivan Gozard. *Théorie de Galois.* Ellipses, 2009 [21] ou Xavier Gourdon. *Algèbre et probabilités.* Ellipses, 2021 [19]

Je montre le cas rapide des corps finis, puis le cas de la caractéristique nulle par récurrence, en commençant par une extension $L = K(x, y)$. Pour cette étape :

1. expliquer qu'on cherche $z$ sous la forme $z = x + ty$ pour que $L = K(z)$ ssi $y \in K(z)$ ssi $\mu_{y,K(z)} = X - y$ ;
2. donner deux polynômes annulateurs sur $K(z)$ de $y$, et calculer leur pgcd dans une extension en choisissant bien $t$.

J'ai en tête la notion de corps parfait et leur caractérisation (caractéristique nulle, ou première avec surjectivité du Frobenius) et un exemple d'extension non primitive : $\mathbb{F}_p(X, Y)/\mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ (utilise le critère d'Eisenstein). J'ai aussi en tête pourquoi le groupe des inversibles d'un corps fini est cyclique.

## Constructibilité des polygones réguliers (121-125-127-191)

**Référence :** Ivan Gozard. *Théorie de Galois.* Ellipses, 2009 [21]

Soit $p \geq 3$ et $\alpha \geq 1$. Je montre que le polygone régulier à $p^\alpha$ côtés est constructible ssi $\alpha = 1$ et $p$ est un nombre premier de Fermat, i.e. $p = 2^N + 1$ où $N \geq 1$.

Pour cela, je m'appuie sur le théorème de Wantzel, cela nécessite donc d'avoir un ensemble d'items consacrés aux nombres constructibles. Les étapes du raisonnement :

1. Sens direct : on utilise le corollaire de Wantzel et, en notant $c = \cos\left(\frac{2\pi}{p^\alpha}\right)$, on montre que $[\mathbb{Q}(c) : \mathbb{Q}] = \frac{\varphi(p^\alpha)}{2}$ en utilisant une formule d'Euler et l'irréductibilité de $\phi_{p^\alpha}$.
2. Réciproque : on note $c = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. On dit qu'on va construire une tour d'extension quadratique entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\omega)$, et que pour revenir à $\mathbb{Q}(c)$ le raisonnement ressemble à ce qu'on a fait juste avant. On justifie que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\omega))$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ (être concis sur ce point). On prend un générateur $\sigma$, et on note $K_i$ les sous-corps laissés fixes par les $\sigma^{2^i}$. On calcule leur dimension en travaillant dans la base $(\omega, \sigma(\omega), \cdots, \sigma^{p-2}(\omega))$.

## Formes de Hankel (144-170-171)

**Référence :** Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1.* Calvage et Mounet, 2017 [8]

Le but de ce développement est d'associer à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ des formes quadratiques dont le rang et la signature vont renseigner sur le nombre de racines distinctes de $P$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$. Pour cela :

1. On commence par numéroter judicieusement les racines $x_1, \cdots, x_t$ de $P$ en regroupant les racines complexes non réelles avec leur conjugué. On note $m_1, \cdots, m_t$ les multiplicités associées.
2. On introduit $s_k = m_1 x_1^k + \cdots + m_t x_t^k$ (les coefficients de notre forme quadratique) et on montre que $s_k \in \mathbb{R}$ en utilisant le théorème de structure et les relations coefficients-racines (cela nous indique au passage comment calculer les $s_k$ sans connaitre les racines).
3. On définit $\sigma = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} e_i^* e_j^*$ où $(e_0, \cdots, e_{n-1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$).
4. On calcule le rang sur $\mathbb{C}^n$ de la forme quadratique en l'écrivant comme somme de $t$ formes linéaires indépendantes : les $\varphi_k = x_k^0 e_0^* + \cdots + x_k^{n-1} e_{n-1}^*$. La liberté de la famille se voit par un déterminant de Vandermonde.
5. On calcule ensuite la signature sur $\mathbb{R}^n$ en regroupant les formes linéaires $\varphi_k$ et leurs conjugués. La famille de formes linéaires réelles obtenue est libre (car elle l'est sur $\mathbb{C}$, ce qui nous permet de lire la signature.

## Matrices de Gram et application à l'inégalité de Hadamard (149-161)

**Référence :** Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* Cépaduès, 2024 [22] ou Xavier Gourdon. *Algèbre et probabilités.* Ellipses, 2021 [19]

Soit $(v_1, \cdots, v_p)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien $E$. On note $G(v_1, \cdots, v_p) = [\langle v_i, v_j \rangle]_{i,j} \in M_p(\mathbb{R})$ et $g(v_1, \cdots, v_p) = \det G(v_1, \cdots, v_p)$. Je suis les étapes :

1. soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$ et $B = (e_1, \cdots, e_r)$ une BON de $F$. En notant $A$ la matrice de $(v_1, \cdots, v_p)$ dans la base $B$, on a $G(v_1, \cdots, v_p) = A^T A$. On en déduit que la matrice de Gram est symétrique positive, définie positive ssi $(v_1 \cdots, v_p)$ est libre.
2. On suppose $(v_1, \cdots, v_p)$ libre et, étant donné $x \in E$, on relie $d(x, F)$ aux déterminants $g(x, v_1, \cdots, v_p)$ et $g(v_1, \cdots, v_p)$.

3. Application : soit $A = [C_1|\cdots|C_n] \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $|\det(A)| \leq \|C_1\|\cdots\|C_n\|$ avec égalité ssi $A \in O_n(\mathbb{R})$. Pour cela, on remarque que $\det(A)^2 = \det(A^TA) = g(C_1, \cdots, C_n)$ et on effectue une récurrence en utilisant le résultat d'au-dessus.

### Endomorphismes semi-simples (141-150-151)

**Référence :** Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie.* Deboeck, 2021 [27]

Un endomorphisme semi-simple est un endomorphisme dont tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable. Dans ce développement, on montre que ce sont les endomorphisme dont le polynôme minimal est sans facteurs carrés dans sa décomposition en irréductibles. Pour cela :

1. On montre que si $\mu_u = P^2Q$, alors $\ker P(u)$ n'admet pas de supplémentaire stable.
2. On montre que si $\mu_u$ est irréductible, alors $u$ est semi-simple. Pour cela, on munit $E$ d'une structure de $K[u]-$espace vectoriel ($K[u]$ étant alors un corps) et on montre qu'être un sev du $K-$ev $E$ stable par $u$ équivaut à être un sev du $K[u]-$ev $E$.
3. On généralise à l'aide du lemme de décomposition des noyaux.

Les endomorphismes semi-simples sur un corps algébriquement clos coïncident avec les endomorphismes diagonalisables. Dans $M_3(\mathbb{R})$, une rotation d'angle différent de $0, \pi/2, ...$ est semi-simple non diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Les endomorphismes semi-simples apparaissent dans une généralisation de la décomposition de Dunford.

### Réduction de Frobenius ((150)-151-159)

**Référence :** Roger Mansuy and Rached Mneimné. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes.* Deboeck, 2022 [24]

On montre l'existence dans le théorème de réduction de Frobenius. Pour cela :

1. On procède par récurrence forte sur la dimension $n \geq 1$ de $E$. Les deux questions qu'on se pose sont donc : trouver un sous-espace cyclique associé au polynôme minimal, et trouver ensuite un supplémentaire stable à ce sous-espace.
2. Pour trouver un sous-espace cyclique associé au polynôme minimal $\mu_u$, on décompose $\mu_u = P_1^{\alpha_1}\cdots P_r^{\alpha_r}$ en produit d'irréductibles, on applique le lemme de décomposition des noyaux, et dans chaque morceau on peut choisir $x \in \ker P_1^{\alpha_1} \setminus \ker P_1^{\alpha_1-1}$ par minimalité du polynôme minimal. Alors $x = x_1 + \cdots x_r$ vérifie $\mu_{u,x} = \mu_u$, ce qui fournit le sous-espace cyclique $E_{u,x}$ recherché.
3. On trouve un supplémentaire par dualité. On note $(e_1, \cdots, e_p) = (x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$ avec $p = \deg \mu_u$ et on complète en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ pour pouvoir travailler avec la base duale. On pose $F = \bigcap_{j=0}^{p-1} \ker(e_p^* \circ u^j)$. On montre que $F$ est stable par $u$, que $F \cap E_{u,x} = \{0\}$, puis on vérifie que $\dim F = n - p$ en montrant la liberté des formes linéaires.
4. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $F$.

J'ai en tête la preuve de l'unicité. Je sais aussi comment calculer algorithmiquement les invariants de similitude.

### Dénombrement des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$ ((101)-103-152-190)

**Référence :** Philippe Caldero and Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie.* Calvage et Mounet, 2022 [9]

On utilise la formule des classes sur l'action de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur $D_n(\mathbb{F}_q)$ par conjugaison.

1. On commence par déterminer un système de représentants des orbites (matrices diagonales où l'on a fixé une énumération de $\mathbb{F}_q$).

2. On calcule le stabilisateur d'un représentant, puis son cardinal.
3. On applique l'équation aux classes.
4. Comme la formule obtenue n'est pas très lisible, on va en trouver un équivalent simple lorsque $q \to +\infty$ pour avoir une idée de ce qu'elle dit. Pour cela, on rend les sommes indépendantes de $q$ pour travailler sur une somme d'un nombre fixé de fractions rationnelles en $q$. On trouve un équivalent en cherchant un équivalent de chaque terme.

### Surjectivité de $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ (150-152-155-(156))

**Référence :** Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie.* Deboeck, 2021 [27]

On montre que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(A)) = A$. Pour cela, on commence par établir le résultat pour les matrices diagonalisables, par interpolation de Lagrange et surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. On généralise ensuite par la décomposition de Dunford.

1. On cherche $X = \Delta + Y$ tel que $e^X = A = D + N$. Par unicité de la décomposition de Dunford, on obtient deux équations sur $\Delta$ et $Y$.
2. La première se résout par l'étape 1.
3. La deuxième demande de poser $Y$ comme un logarithme matriciel. Pour vérifier que la formule qu'on veut vraie l'est effectivement, on introduit une dépendance temporelle et on dérive deux fois. Pour la deuxième dérivation, multiplier par l'inverse pour que les calculs soient simples.

A chaque étape, on justifie bien que les matrices sont dans $\mathbb{C}[A]$ ce qui permet d'avoir le résultat et aussi de calculer facilement la dérivée de l'exponentielle ($Y(t)$ et $Y'(t)$ vont commuter).

On prépare quelques applications de ce résultat ($A$ diagonalisable ssi $e^A$ diagonalisable, racine $p-$ième).

### $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme ((152)-155-157)

**Référence :** Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie.* Deboeck, 2021 [27]

Les étapes :

1. Bonne définition et continuité (série de fonctions normalement convergente sur tout compact)
2. Injectivité (montrer que si $e^A = e^B$, alors $A$ et $B$ commutent car $A = Q(e^A)$ + injectivité de l'exponentielle) et surjectivité (interpolation de Lagrange et surjectivité de l'exponentielle)
3. Continuité de l'inverse : soit $B_k = e^{A_k}$ convergeant vers $B = e^A$ avec $B_k, B \in H_n^{++}(\mathbb{C})$. On montre que $(A_k)_k$ est une suite bornée admettant $A$ comme unique valeur d'adhérence. Pour le caractère borné, on utilise que $\rho(A_k) = \|A_k\|_2$ et $\mathrm{Sp}(A_k) = \ln(\mathrm{Sp}(B_k))$. On contrôle le spectre de $B_k$ par le haut et par le bas en utilisant que $(\rho(B_k))_k$ et $(\rho(B_k^{-1}))_k$ sont deux suites convergentes donc bornées.

### Enveloppe convexe de $O(E)$ (157-158-159-181)

**Référence :** Aviva Szpirglas. *Mathématiques L3 Algèbre.* Pearson Education, 2009 [29]

On montre que $C = \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \bar{B}(0,1)$ où la norme utilisée est la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela :

1. $C \subset B$ est claire ;
2. compacité de $C$ (théorème de Carathéodory).

3. $C = \bigcap_{\varphi \in M_n(\mathbb{R})^*} \{\varphi(M) \leq \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} \varphi(U)\}$ (inclusion directe claire, réciproque par projection de $M \notin C$ sur le convexe fermé $C$ et condition de l'angle obtus).
4. $M_n(\mathbb{R})^* = \{\mathrm{tr}(A\cdot) \mid A \in M_n(\mathbb{R})\}$ par le théorème de Riesz.
5. On prend $M \in B$. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on écrit sa décomposition polaire $A = OS$ et on calcule $\mathrm{tr}(AM)$ dans une BON $(e_1, \cdots, e_n)$ de vecteurs propres de $S$.

### Par 5 points (...) passe une unique conique (162-171-181-191)

**Référence :** Jean-Denis Eiden. *Géométrie analytique classique.* Calvage et Mounet, 2009 [11]

On montre que par 5 points distincts $A, B, C, D, E$ dont quatre quelconques ne sont pas alignés passe une unique conique.

1. On peut supposer $A, B, C$ non alignés car il existe trois points non alignés parmi les cinq. On travaille dans le repère affine $(A, B, C)$ et on note $M(U, V)$ en coordonnées cartésiennes où $M(x, y, z)$ en coordonnées barycentriques
2. On écrit l'équation générique d'une conique $\mathscr{C}$ en coordonnées cartésiennes. On la fait passer par $A, B, C$ en ajustant ses paramètres, puis on écrit son équation barycentrique.
3. On écrit $D, E \in \mathscr{C}$ ssi un système linéaire sur les trois paramètres restant de $\mathscr{C}$, faisant intervenir les coordonnées barycentriques de $D, E$.
4. On montre que le système est de rang 2 en utilisant le fait que les points sont distincts et vérifient la condition de non alignement.

Dans le plan, il faut avoir défini les coordonnées barycentriques, le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques et la caractérisation de l'alignement en coordonnées barycentriques.

### Dénombrement des permutations zigzagantes (190)

**Référence :** Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS mathématiques volume 6.* Cassini, 2022 [16]

Je note $Z_n \subset \mathfrak{S}_n$ les permutations zigzagantes et $A_n, D_n \subset Z_n$ les permutations zigzagantes ascendantes, descendantes. Les étapes :

1. $|Z_n| = |A_n| + |D_n| = 2|A_n| : Z_n = A_n \sqcup D_n$ et on met en bijection $A_n$ et $D_n$ via $\varphi : \sigma \mapsto n+1-\sigma$.
2. On obtient une relation de récurrence sur $a_n = |A_n|$ en partitionnant $Z_{n+1} = \bigsqcup_{k=1}^{n+1} E_k$ selon l'entier $k \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $\sigma(k) = n+1$. On calcule $|E_k|$ en fournissant un procédé de construction de $\sigma \in E_k$ (on fait un dessin pour être clair, et on précise la convention $a_0 = 1$).
3. On en déduit une équation fonctionnelle sur la série génératrice $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, qu'on résout.

### Théorème du point fixe compact et application à une suite (203-223-226)

**Référence :** Julien Bernis and Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements.* Ellipses, 2018 [5]

On établit le théorème du point fixe compact puis on montre que la convergence peut être lente sur un exemple concret :

1. Existence et unicité du point fixe
2. Soit $(x_n)_n$ une suite d'itérés de $f$. On note $\mathcal{A}$ ses valeurs d'adhérence. On montre que $\mathcal{A}$ contient un unique élément, en justifiant d'abord que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. On a alors que $x_n \to l$ qui est nécessairement un point fixe de $f$.

3. Exemple : soit $f : x \in [0,1] \mapsto x - x^d$ avec $d \geq 1$ voué à devenir grand. On commence par se placer sur un intervalle où les hypothèses du théorème du point fixe compact sont vérifiées. Ensuite, on prend une suite d'itérés (décroissante) et on raisonne heuristiquement pour trouver la suite auxiliaire à étudier : $(x_n^{1-d})$. On valide par un DL et on conclut par sommation de relations de comparaison.

### Théorème de Cauchy-Peano ((201)-203-209-241)

**Référence :** Florent Berthelin. *Équations différentielles.* Cassini, 2017 [6]

Je fais la preuve par régularisation pour pouvoir mettre ce développement dans la leçon 209. La référence me permet de retrouver le plan de raisonnement, mais pour plus de clarté, je fais le cas où $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$ et le problème $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ est alors autonome. Cela permet d'éviter le recours aux cylindres de sécurité. Je suis cependant prêt, aux questions, à expliquer comment généraliser, faire le cas local. Les étapes :

1. On fixe $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité, i.e. telle que $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\rho_n \geq 0$ et $\rho_n$ à support dans $\bar{B}(0, 1/n)$.
2. On montre que $f_n = f * \rho_n$ vérifie $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et est localement lipschitzienne. On applique CL local à $x' = f_n(x)$, $x(0) = x_0$ et on montre que la solution $x_n$ est globale par le théorème des bouts.
3. On extrait une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$ qui converge sur tout intervalle $[-T, T]$ par le théorème d'Ascoli et par extraction diagonale. On note $x$ la limite.
4. On montre que $x$ est solution de l'équation de départ en passant à la limite dans la formulation intégrale. Pour cela, on doit montrer que $f_n(x_n)$ converge simplement vers $f(x)$. On fait les choses en deux temps et on utilise le théorème de Heine.

### Théorème des extrema liés (206-214-215-219)

**Référence :** Mohammed El Amrani. *Calcul différentiel.* Ellipses, 2019 [13]

J'utilise la référence pour retrouver l'énoncé et les définitions, mais je fais une preuve explicitant le lien avec les sous-variétés, afin d'avoir l'interprétation de ce théorème en terme d'espace tangent :

— Je reformule le problème en montrant que l'ensemble sur lequel on restreint la fonction est une sous-variété au voisinage d'un extremum en lequel les contraintes sont qualifiées (on utilise essentiellement l'ouverture de $GL_n(\mathbb{R})$

— Je traduis ce que signifie "extremum" en terme d'espace tangent.

— J'exprime l'espace tangent en fonction des contraintes par le théorème des fonctions implicites, qui permet de tracer un chemin de vecteur vitesse choisi sur la variété, puis je conclus.

Dans mon plan, on trouve la définition d'une sous-variété par équation puis la définition de l'espace tangent.

### Théorème de l'application ouverte (205-208)

**Référence :** Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle.* Ellipses, 2024 [23]

Je présente la preuve du théorème de l'application ouverte à l'aide du théorème de Baire, puis je l'applique à la non-surjectivité de la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$.

## Représentation des fonctions lipschitziennes (201-205-208-213-234)

**Référence :** Haim Brézis. *Analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996 [7]

On montre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement s'il existe une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(y) = \int_y^x g$.

Je n'ai pas de référence très adaptée pour ce développement. Je l'ai travaillé avec le document de Thomas Courant accessible sur son site (https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/thomas.courant/Agr%C3%A9gation.html), et les énoncés et idées de preuve se trouvent dans le Brézis. Je suis les étapes suivantes :

1. Le sens réciproque est clair car $f$ est $\|g\|_{L^\infty}$-lipschitzienne.
2. Pour le sens direct, on a envie de dire que $g = f'$, mais $f$ n'est pas dérivable a priori. On va donc représenter sa dérivée au sens des distributions. On définit la forme linéaire $T : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \mapsto -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \in \mathbb{R}$.
3. On montre que $T$ est continue pour la norme $L^1(\mathbb{R})$ en écrivant $\varphi'$ comme limite d'un taux de variation par convergence dominée, puis en faisant passer le taux sur $f$ pour utiliser le caractère lipschitzien de $f$.
4. On prolonge $T$ sur $L^1$ puis on cherche à la représenter par l'intégrale contre une fonction de $L^\infty$. Pour cela, on se ramène à l'espace $L^2$ pour pouvoir appliquer le théorème de Riesz (ce qui nécessite de se placer sur un compact). On obtient ainsi une fonction $g$ telle que $\forall u \in L^2([-n, n])$, $T(u) = \int gu$.
5. On montre que $\|g\|_{L^\infty} \leq L$ en utilisant $A = \{|g| \geq L\}$ et en utilisant $u = \mathbb{1}_A \mathrm{sgn}(g)$ (argument de continuité croissante pour se ramener sur $[-n, n]$).
6. On utilise l'unicité du prolongement par continuité d'une application uniformément continue pour dire que $T(u) = \int gu$ sur tout $L^1(\mathbb{R})$.
7. On montre que $G(x) = \int_0^x g$ vérifie $G' = g$ au sens des distributions, donc que $f = G + c$.

Pour le dernier point, il faut savoir démontrer quelques lemmes : si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ est nulle au sens des distributions, alors $f = 0$ pp. Et si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ vérifie $f' = 0$ au sens des distributions, alors $f$ est pp égale à une fonction constante.

## Théorème de Fejer (201-(209)-234-(241)-246)

**Référence :** Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses, 2008 [12]

On montre le théorème de Fejer dans le cas d'une fonction continue $2\pi-$périodique et dans le cas d'une fonction $L^p_{2\pi}$. Pour cela :

1. On réécrit la moyenne de Cesaro des sommes partielles de Fourier comme un produit de convolution sur une période avec le noyau de Fejer.
2. On donne la formule du noyau (en expliquant comment on l'obtient) et on montre les propriétés d'approximation de l'unité.
3. On montre le théorème de Fejer à proprement parler.

Dans la leçon 234 sur les espaces $L^p$, j'enlève la partie continue et je montre la continuité des translations dans $L^p_{2\pi}$. Attention, montrer que $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ est dense dans $L^p_{2\pi}$ est un peu technique. Il faut approcher les fonctions $\mathbb{1}_{]a,b[}$ pour $-\pi \leq a < b \leq \pi$ par des fonctions $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$ à support dans $]-\pi, \pi[$ ouvert pour garantir que l'on peut périodiser en conservant la continuité sur $\mathbb{R}$.

### Théorème d'échantillonnage de Shannon ((201)-(205)-213-250)

**Référence :** Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses, 2008 [12]

Il faut se méfier des notations que je trouve peu judicieuses (inclure la division par $A$ dans la notation m'a embrouillé au début). Je traite le cas $A = \pi$ pour simplifier toutes les constantes. Les étapes :

1. $H = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \hat{f} = 0 \text{ pp sur } \mathbb{R}\backslash[-\pi, \pi]\}$ est un espace de Hilbert (on montre qu'il est fermé par continuité de la TF et de la restriction).
2. On a une injection continue $H \subset \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ (lemme de Riemann-Lebesgue, formule d'inversion valable, théorème de continuité des intégrales à paramètres).
3. On montre que $(\text{sinc}(\cdot - n))_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $H$ (on transporte la base hilbertienne $(e^{in\cdot})_{n\in\mathbb{Z}}$ par transformée de Fourier ; pour le caractère total on s'appuie sur le critère de densité des espaces de Hilbert.
4. On conclut sur le théorème d'échantillonnage grâce à la théorie des espaces de Hilbert et par l'injection continue.

### Domaine de définition et différentiabilité du flot d'une EDO autonome ((208)-214-215-220-221)

**Référence :** Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle - Thèmes d'analyse pour l'Agrégation.* Ellipses, 1996 [17], Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles.* Dunod, 2021 [4]

C'est en grande partie un développement fait maison, mais je me sers de la première référence pour l'énoncé (la preuve est assez elliptique dans le livre) et de la deuxième référence pour les résultats sur la résolvante. Le but est d'appliquer le théorème des fonctions implicites pour prouver une forme de régularité du temps d'existence maximal des solutions d'une équation différentielle autonome : si pour une condition initiale $\alpha_0$, la solution existe sur $[0, T]$ (**fermé**), alors sur un voisinage ouvert de $\alpha_0$, on peut garantir le même temps d'existence pour les solutions ayant leur condition initiale dans ce voisinage. J'ai deux versions, une pour les leçons $214, 215, 220$ et l'autre pour la leçon 221.

1. Je reformule le problème comme un problème de fonctions implicites sur la formulation intégrale.
2. Je montre que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et je calcule sa différentielle (version $214, 215, 220$) ; j'admets tout ceci (version 221).
3. Je montre que la résolvante associée au problème linéaire apparaissant dans la différentielle partielle est de classe $\mathcal{C}^1$ et je calcule ses dérivées partielles (version 221). Pour cela, on établit la formule de la résolvante pour obtenir $R(t, s) = R(t, \tau)R(s, \tau)^{-1}$ puis on calcule les dérivées partielles par le TFC.
4. Je montre que la différentielle partielle est bijective en le montrant d'abord sur $\mathcal{C}^1$ pour pouvoir se ramener au problème linéaire en dérivant, qu'on résout avec la formule de Duhamel. On fait disparaitre la dérivée de la formule de l'inverse par une IPP, puis on prolonge l'opérateur linéaire inverse sur $\mathcal{C}^0$.

### Calcul des $\zeta(2k)$ (230-246)

**Référence :** Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses, 2008 [12]

### Théorème de Bernstein-Valiron (218-228-(230)-241-243)

**Référence :** Julien Bernis and Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements.* Ellipses, 2018 [5]

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)} \geq 0$. On montre que $f$ est analytique sur $I$. Soit $x_0 \in I$ et $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[ \subset I$.

1. On commence par travailler sur $g(h) = f(x_0 + h) + f(x_0 - h)$, qui est alors une fonction paire dont les dérivées impaires en 0 sont nulles et les dérivées paires sont positives et croissantes sur $[0, r[$. On utilise la formule de Taylor avec reste-intégral pour montrer que $g$ est développable en série entière sur $[0, r[$, donc sur $]-r, r[$ par parité.
2. On revient à $f$ en montrant d'abord que le reste intégral tend vers 0 lorsque la dérivée à l'intérieur est paire (on se ramène à $g$). Cela donne la convergence vers $f(x_0 + h)$ de $(S_{2n+1}(h))$ où $(S_n(h))$ désigne la série de Taylor en $x_0$ de $f$. Puis on montre que $S_{2n} - S_{2n-1} \to 0$ en reconnaissant le terme général de la série de Taylor associé à $g$.
3. S'il reste du temps, on l'applique à tan.

### Equivalent du nombre de zéros d'une EDO linéaire d'ordre 2 (220-221-223-224)

**Référence :** Xavier Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2020 [18]

Je commence par montrer le théorème d'entrelacement de Sturm en me servant du wronskien, puis j'applique le résultat à l'équation différentielle $x'' + tx = 0$, pour montrer qu'une solution non nulle $x$ s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$, et que la suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses zéros vérifie : $t_n \sim \left(\frac{3\pi}{2}n\right)^{2/3}$.

### Méthode de Newton (218-(219)-(226)-228-(229)-253)

**Référence :** François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 2003 [28]

Pour justifier le recasage dans la 229, j'insiste sur ce que fait gagner la convexité dans le cas usuel, et j'analyse aussi le cas où la dérivée s'annule en le zéro, mais pas la dérivée seconde (on a une fonction strictement convexe ou strictement concave). Je suppose $f'' > 0$ ce qui est un peu plus fort que strictement convexe.

### Théorème de Runge (204-209-(241))

**Référence :** Hervé Queffélec. *Topologie.* Dunod, 2025 [25]

Soit $K$ un compact tel que $\mathbb{C}\backslash K$ est connexe. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}\backslash K$, $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est limite uniforme de polynômes sur $K$.

1. On met en place un raisonnement par connexité en montrant que l'ensemble $A \subset \mathbb{C}\backslash K$ pour lesquels c'est vrai est ouvert fermé non vide.
2. Non vide : on prend un $a$ loin et on utilise un développement en série géométrique
3. Ouvert : on redéveloppe autour du point pour obtenir une série faisant intervenir $\frac{1}{(z-a)^k}$. L'adhérence des fonctions polynomiales sur $K$ est stable par addition et multiplication par compatibilité de la limite uniforme avec la somme et le produit.
4. Fermé : montrer que $\frac{1}{z-a_n} \to \frac{1}{z-a}$ uniformément sur $K$

Lorsque les hypothèses ne sont pas vérifiées, le résultat ne subsiste pas pour une composante connexe bornée de $\mathbb{C}\backslash K$. On utilise le principe du maximum sur $Q(z) = 1 - (z-a)P(z) = (z-a)(\varphi_a(z) - P(z))$.

Ce résultat se généralise pour les fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert de $K$ par formule de Cauchy, mais tracer rigoureusement le chemin $\gamma$ est difficile.

## Disques de Gershgörin - Composantes connexes (204)

**Référence :** Philippe Caldero and Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie.* Calvage et Mounet, 2022 [9]

Dans ce développement, on raffine le théorème des disques de Gerschgörin en utilisant de la connexité.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $D_i(A) = \mathbb{D}(a_{ii}, \sum_{j\neq i} |a_{ij})$ ses disques de Gerschgörin. On note $D(A) = \bigcup_{i=1}^n D_i(A) = \bigcup_{j=1}^r C_j$ la décomposition en composantes connexes. Pour $j \in [\![1, r]\!]$, on note $n_j$ le nombre de disques de Gerschgörin dans $C_j$. On montre que $C_j$ contient exactement $n_j$ valeurs propres de $A$ comptées avec multiplicités. Pour cela :

1. Je dis que j'admets provisoirement un résultat de continuité du spectre (écrit dans le plan) dont je donnerai des éléments de preuves à la fin : soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\forall M' \in B(M, r)$, en notant $\lambda_1 \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de $M$ et $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n$ celles de $M'$, quitte à réindexer les valeurs propres, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i - \lambda'_i| < \varepsilon$.
2. On relie $A$ à sa diagonale $D$ via un chemin continu $\gamma(t) = (1-t)D + tA$. On remarque que pour $t \in [0, 1]$ et $i \in [\![1, n]\!]$, $D_i(\gamma(t)) \subset D_i(A)$. On pose $I = \{t \in [0, 1] \mid C_j \text{ contient } n_j \text{ valeurs propres de } \gamma(t)\}$. On va montrer que $I$ est ouvert fermé non vide de $[0, 1]$ connexe.
3. Non vide : $0 \in I$ car les valeurs propres de $D$ sont les centres des disques de Gerschgörin de $A$ (comptés avec multiplicité).
4. Pour le caractère ouvert-fermé, on construit des voisinages $V_j$ ouverts de chaque $C_j$, deux à deux disjoints. Pour cela, on utilise que les $C_j$ sont des compacts disjoints et les $V_j$ sont de la forme $V_j = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, C_j) < \delta\}$.
5. Ouvert : si $t_0 \in I$, pour $t$ suffisamment proche de $t_0$, par continuité du spectre on aura, quitte à réindexer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i(t) - \lambda_i(t_0)| < \delta$, donc $\lambda_i(t)$ et $\lambda_i(t_0)$ sont dans la même composante connexe.
6. Fermé : soit $(t_k)$ une suite de $I$ convergeant vers $t \in [0, 1]$. Alors pour $k$ suffisamment grand, par continuité du spectre, on aura, quitte à réindexer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i(t) - \lambda_i(t_k)| < \delta$, donc $\lambda_i(t)$ et $\lambda_i(t_k)$ sont dans la même composante connexe.
7. Je reviens enfin sur la continuité du spectre : d'abord, on ramène le problème à la continuité des racines en utilisant l'application continue $M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_M \in \mathbb{C}_n[X]$. On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité et on procède par récurrence sur le degré $n$. Pour l'hérédité, on fait converger une valeur propre puis on applique l'hypothèse de récurrence au reste du polynôme (attention il faut montrer que ce fameux reste converge bien, c'est un peu fastidieux).

## Méthode du gradient à pas optimal (219-226-229-253)

**Référence :** Julien Bernis and Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements.* Ellipses, 2018 [5]

Les étapes :

1. Je justifie l'existence et l'unicité d'un minimum à la fonctionnelle quadratique en montrant qu'elle est strictement convexe admettant un unique point critique, par calcul de son gradient et sa Hessienne.
2. J'explique comment on construit la méthode du gradient à pas optimal en trouvant l'expression du pas par dérivation de la fonction 1D dans la direction de $\nabla f(x_k)$. J'obtiens au passage que deux directions de descente consécutives sont orthogonales.

3. J'obtiens la relation de récurrence sur l'erreur, ce qui amène au besoin du lemme.
4. Je prouve le lemme (plus ou moins succintement selon le temps).
5. Je conclus l'analyse d'erreur.

### Théorème de Lyapounov ((220)-(228)-229)

**Référence :** Stéphane Gourmelen and Hicham Wadi. *Équations différentielles - Théories, algorithmes et modèles.* Ellipses, 2008 [20]

Ce développement est une application de la notion de fonction monotone. On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $x^* \in \mathbb{R}^d$ un point d'équilibre de l'équation différentielle autonome $x'(t) = f(x(t))$. On dit qu'une fonction $L \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une fonction de Lyapounov (stricte) en $x^*$ pour l'équation si $L$ admet un minimum strict en $x^*$ et si $l : x \mapsto \langle \nabla L(x), f(x) \rangle$ est négative sur un voisinage ouvert $V$ de $x^*$ (strictement négative hors de $x^*$). On montre que s'il existe une fonction de Lyapounov, alors $x^*$ est stable, et si elle est stricte, alors $x^*$ est asymptotiquement stable. Pour cela :

1. On montre que $L$ est décroissante le long des solutions $x$ à valeurs dans $V$ en calculant $(L \circ x)'$.
2. Pour la stabilité : on fixe une boule $B(x^*, \varepsilon)$ de laquelle on ne veut pas sortir. $L$ admet un minimum $m > L(x^*)$ sur la sphère $S(x^*, \varepsilon)$, puis par continuité il existe $B(x^*, \eta)$ sur laquelle $L < m$. Une solution partant de $B(x^*, \eta)$ ne peut alors traverser la sphère car $L \circ x$ est décroissante. On note au passage que par le théorème des bouts, les solutions considérées sont globales.
3. Pour la stabilité asymptotique : on conserve les notations précédentes. $L \circ x$ est décroissante minorée donc converge vers une limite $\lambda \geq L(x^*)$, et on montre qu'on a en fait égalité. Dans le cas contraire, on fixe par continuité $B(x^*, \delta)$ sur laquelle $L < \lambda$, et on en déduit que $(L \circ x)'$ est majorée par une constante strictement négative, ce qui est absurde. On déduit enfin que $x(t) \to x^*$ car $x$ quitte tout ensemble $B(x^*, \varepsilon) \backslash B(x^*, \delta)$ sur lequel $L \circ x$ admet un minimum $m > L(x^*)$.

J'applique ce résultat au pendule simple (la fonction de Lyapounov correspond à l'énergie), ce qui permet de conclure dans la situation indéterminée avec le théorème de linéarisation de Lyapounov.

### Transformée de Fourier d'une gaussienne ((235)-236-(239)-245-250)

**Référence :** Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses, 2008 [12].

Le calcul de la transformée de Fourier est mené dans l'exercice 3.1 et l'application à la formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ est le théorème 1.20 du chapitre 3. On peut aussi présenter comme application l'injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. C'est un peu exagéré dans fonctions holomorphes sachant que je mets moins de 5 minutes pour calculer la transformée de Fourier et que le reste ne parle pas du tout de fonctions holomorphes.

### Intégrale de Dirichlet (235-236-239)

**Référence :** Julien Bernis and Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements.* Ellipses, 2018 [5]

Je fais la preuve utilisant la transformée de Laplace. Les étapes :

1. Je justifie la convergence de l'intégrale par une intégration par parties (je sais justifier la non absolue convergence en cas de question).
2. On considère la transformée de Laplace sur $\mathbb{R}_+$ de sinc puis je fais une intégration par parties en choisissant une primitive de sinc qui tend vers 0 en $+\infty$ afin de faire apparaitre l'intégrale que l'on cherche à calculer. On montre que $F(p) \to \int_0^{+\infty}$ lorsque $t \to 0$.

3. On calcule la dérivée de la transformée de Laplace (intégrale à paramètre) et on résout l'équation différentielle. On trouve les constantes en regardant les limites en 0 et $+\infty$.

On peut aussi obtenir la valeur de l'intégrale par transformée de Fourier.

### Méthode de Laplace (224-239)

**Référence :** Jacques Faraut. *Calcul intégral*. EDP Sciences, 2006 [14]

### Indécomposabilité des lois de Poisson (243-245-261-264-(266))

**Référence :** Walter Appel. *Mathématiques pour l'agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024 [1]

Il faut faire attention à la définition de fonction entière qu'on utilise : dans le livre, il s'agit d'une somme de série entière de rayon de convergence infini, mais je connaissais la définition comme fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Les deux sont équivalents grâce au fait qu'on peut développer en série entière sur tout disque fermé qui est inclus dans le domaine de définition. Le développement consiste en un lemme de fonctions holomorphes et une application aux probabilités qui utilise les fonctions génératrices.

### Théorème de Cochran et application au test du $\chi^2$ d'adéquation (206-261-262-266)

**Référence :** Vincent Rivoirard and Gilles Stoltz. *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2012 [26]

On trouve le théorème de Cochran dans la partie sur les vecteurs gaussiens et l'application au test du $\chi^2$ au début du chapitre suivant. Les définitions associées aux tests sont dans le chapitre sur les tests, mais je n'utilise que la notion de test de niveau $\alpha$ dans mon développement. Les étapes :

1. Preuve du théorème de Cochran : on fixe des BON $(e_{j,k})$ de chaque sous-espace $E_j$ et on note $U$ la matrice de passage de la base canonique vers la concaténation de toutes ces BON. On a $U \in O_d(\mathbb{R})$. Par transformation linéaire, on a $U^T X \sim N(U^T m, I_d)$. Or $U^T X$ est le vecteur des produits scalaires $\langle e_{j,k}, X\rangle$. Cela permet d'obtenir l'indépendance des $\pi_j(X)$ par lemme des coalitions. Ensuite, on calcule $\|\pi_j(X)\|^2$ en la ramenant à la norme au carré du vecteur gaussien $(\langle e_{j,k}, X\rangle)_k$ (par indépendance des $\langle e_{j,k}, X\rangle$) et on conclut par définition de la loi du $\chi^2$.
2. Application au test du $\chi^2$ d'adéquation : on travaille sur $[\![1, d]\!]$ avec deux lois $p, p^{\text{ref}}$. Je prends quelques minutes pour introduire les notations, les hypothèses $H_0 : p = p^{\text{ref}}$ et $H_1 : p \neq p^{\text{ref}}$, et expliquer ce qu'on cherche à faire. Je pose la statistique d'intérêt $\hat{D}_n = n \sum_{i=1}^d \frac{(\hat{p}_{i,n} - p_i^{\text{ref}})^2}{p_i^{\text{ref}}}$ en précisant qu'il s'agit essentiellement d'une distance entre $\hat{p}_n$ et $p^{\text{ref}}$.
3. J'introduis les vecteurs aléatoires $Z_k = \left(\frac{1}{\sqrt{p_i^{\text{ref}}}}(\mathbb{1}_{X_k = i} - p_i^{\text{ref}})\right)_{1 \leq i \leq d}$ auxquels on applique le TCL vectoriel.
4. On applique la fonction continue $\|\cdot\|^2$ pour revenir à $\hat{D}_n$ et obtenir le résultat.

### Nombre moyen de sites visités par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ ((224)-230-235-(243)-264-266)

**Référence :** Walter Appel. *Mathématiques pour l'agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024 [1]

Le but de ce développement est de déterminer le nombre moyen de sites visités en $n$ étapes lors d'une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On note $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ la marche aléatoire, où les $X_k$ sont des variables aléatoires iid de Rademacher centrées. On note $N_n = |\{S_0, \cdots, S_n\}$ le nombre de sites visités à l'instant $n$, et on cherche un équivalent de $\mathbb{E}[N_n]$ lorsque $n \to +\infty$. Pour cela :

1. J'admets que $\mathbb{E}[N_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T > k)$ où $T$ désigne le temps de premier retour en 0. Ce n'est pas difficile à montrer mais le développement est trop long avec ça et on réutilise les arguments dont on a besoin juste après donc ça fait doublon.
2. On relie $\mathbb{P}(T = n)$ à $\mathbb{P}(S_n = 0)$ en partitionnant pour $n \geq 1$ (**Attention !**) l'événement $\{S_n = 0\}$ selon la valeur de $T$ qui est inférieur ou égale à $n$.
3. On introduit les séries génératrices associées à ces événements $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)t^n$ et $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)t^n$ et on traduit la relation entre les événements en une équation fonctionnelle sur $f, g$ (**ces séries commencent en 0**).
4. On calcule explicitement $\mathbb{P}(S_n = 0)$ et on reconnait un DSE en 0, ce qui donne $f(t) = \frac{1}{1-t^2}$.
5. On en déduit le DES en 0 de $g$ et on obtient la valeur de $\mathbb{P}(T = 2n), \mathbb{P}(T = 2n + 1)$.
6. On conclut par deux sommations de relations de comparaison.

## Rayon spectral et méthodes itératives (153-156-162-(226))

**Référence :** Francis Filbet. *Analyse numérique*. Dunod, 2009 [15]

Je commence par expliquer le principe des méthodes itératives pour voir pourquoi on s'intéresse aux puissances de $M^{-1}N$. J'établis ensuite un critère de convergence : $B^k \to 0$ ssi $\rho(B) < 1$ ss'il existe une norme matricielle telle que $\|B\| < 1$. Pour aller de la deuxième à la troisième assertion, je trigonalise $B$ et je rends la partie extra-diagonale aussi petite que nécessaire. J'applique enfin le critère pour montrer que la méthode de Jacobi converge pour les matrices à diagonales strictement dominantes (éventuellement pour les matrices symétriques définies positives).

## Théorème de Perron-Frobenius (version simple) et application aux chaines de Markov (153-(261)-262-(264))

**Référence :** Walter Appel. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2024 [2]

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique à coefficients strictement positifs. On montre :

1. $\rho(P) = 1$, 1 est l'unique valeur propre de $P$ de module 1 et le sep associé à 1 est de dimension 1.
2. $(P^k)$ converge vers une matrice stochastique de rang 1. Pour cela, on écrit la décomposition en sous-espaces caractéristiques et on montre que l'espace caractéristique associé à 1 est de dimension 1, puis que les puissances des blocs correspondant à des vp de module $< 1$ tendent vers 0.
3. On en déduit l'existence et l'unicité d'une mesure invariante, i.e. d'un vecteur $\pi^*$ à coefficients positifs de somme 1, tel que $\pi^* P = \pi^*$.

## Références


[1] Walter Appel. *Mathématiques pour l'agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024.

[2] Walter Appel. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2024.

[3] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005.

[4] Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2021.

[5] Julien Bernis and Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018.

[6] Florent Berthelin. *Équations différentielles*. Cassini, 2017.

[7] Haim Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996.

[8] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2017.

[9] Philippe Caldero and Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie*. Calvage et Mounet, 2022.

[10] Michel Demazure. *Cours d'algèbre*. Cassini, 2009.

[11] Jean-Denis Eiden. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009.

[12] Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.

[13] Mohammed El Amrani. *Calcul différentiel*. Ellipses, 2019.

[14] Jacques Faraut. *Calcul intégral*. EDP Sciences, 2006.

[15] Francis Filbet. *Analyse numérique*. Dunod, 2009.

[16] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS mathématiques volume 6*. Cassini, 2022.

[17] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle - Thèmes d'analyse pour l'Agrégation*. Ellipses, 1996.

[18] Xavier Gourdon. *Analyse*. Ellipses, 2020.

[19] Xavier Gourdon. *Algèbre et probabilités*. Ellipses, 2021.

[20] Stéphane Gourmelen and Hicham Wadi. *Équations différentielles - Théories, algorithmes et modèles*. Ellipses, 2008.

[21] Ivan Gozard. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009.

[22] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024.

[23] Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024.

[24] Roger Mansuy and Rached Mneimné. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022.

[25] Hervé Queffélec. *Topologie*. Dunod, 2025.

[26] Vincent Rivoirard and Gilles Stoltz. *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2012.

[27] Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021.

[28] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2003.

[29] Aviva Szpirglas. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009.