

Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

Pierre LARIVÉ

Mémoire encadré par Stéphane CASTANHEIRA

Université de Rennes, année 2025-2026

Les développements asymptotiques sont un outil permettant de ramener le comportement d'une suite ou d'une fonction "compliquée" à un objet plus simple, ou de référence (des polynômes par exemple dans le cas de développements limités). Cela permet d'avoir une idée de ce à quoi ressemble son comportement, voire d'obtenir certains résultats sans avoir à étudier la suite ou la fonction "compliquée". Par exemple, les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs permettent d'avoir des résultats sur la convergence d'une série en se ramenant à des séries simples que l'on sait complètement étudier.

Dans ce mémoire, on présente des exemples variés de développements asymptotiques, ayant pour but d'illustrer les techniques utilisées pour obtenir de tels estimations, ainsi que certaines applications.

L'exposé est structuré en deux grandes parties : les développements asymptotiques de fonctions, puis ceux de suites et de séries.

On commence par établir les développements limités des fonctions usuelles, qui seront ensuite des outils qui serviront dans tout le mémoire. Puis on présente des exemples d'études asymptotiques de fonctions particulières : sommes de série de fonctions, intégrale partielle d'une intégrale généralisée, intégrales à paramètre...

Dans la partie concernant les suites et les séries, on étudie d'abord des exemples de comparaison liés aux séries numériques, car les théorèmes de sommation des relations de comparaison permettront ensuite d'obtenir des développements asymptotiques de suites par télescopage. On montre ensuite un résultat concernant les suites définies par récurrence, qui transfère un résultat sur le développement asymptotique de la fonction de récurrence à la suite elle-même. Cet exemple permet de montrer combien les deux types de développements asymptotiques interagissent entre eux. Enfin, on étudie plusieurs exemples de suites définies par une relation implicite. La détermination d'un développement asymptotique permet alors d'explicitier de façon approchée une telle suite. On conclut avec une application à la vitesse de convergence des séries de Fourier de fonctions régulières.

1 Développements asymptotiques de fonctions

1.1 Fonctions usuelles

On commence par établir le développement limité en certaines points des fonctions usuelles, à partir de la formule de Taylor-Young.

Théorème 1 *Formule de Taylor-Young [1]*

Soit $n \geq 1$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé, et $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I, E)$ n -fois dérivable en un point $a \in I$. Alors lorsque $h \rightarrow 0$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n).$$

Exemple 2 [1]

En utilisant la formule de Taylor-Young, on peut obtenir le développement limité à tout ordre de la fonction exponentielle en 0 :

$$\forall n \geq 1, \exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

De même, on obtient les développements limités de $\sin$, $\cos$, sh , ch , ou encore $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à tout ordre en 0.

Exemple 3 [1]

Soit $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ et $n \geq 1$. On sait que lorsque $x \rightarrow 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

On en déduit :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

On obtient de même les développements limités de $\arctan$, argth , argsh , $\arcsin$, $\arccos$ à tout ordre en 0.

Exemple 4 [1]

Le développement limité de la fonction $\tan$ en 0 s'obtient en faisant le rapport des développements limités de $\cos$ et $\sin$ en 0. On obtient par exemple le développement limité en 0 à l'ordre 8 :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

On donne deux exemples d'utilisations directes de ces développements limités usuels pour établir la convergence de séries et intégrales. Les deux exemples consistent à effectuer des développements limités pour se ramener à des séries et intégrales dont on connaît le comportement. On ne détaille pas ici ces exemples.

Exemple 5 [1]

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt$ est convergente si et seulement si $1+\alpha < \beta < 1$ ou $1 < \beta < \alpha+1$.

Exemple 6 [2]

La série $\sum (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ est convergente (mais pas absolument convergente).

1.2 Séries de fonction et intégrales généralisées [1]

Les séries de fonctions et intégrales généralisées sont des exemples de quantités qui sont implicites, en un certain sens. On présente deux exemples où établir des développements asymptotiques permet de savoir à quoi ressemblent une série de fonctions au bord de son domaine de convergence (premier exemple), et d'estimer la vitesse de divergence d'une intégrale généralisée divergente.

Exemple 7

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{l}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \end{array}.$$

Montrons que lorsque $x \rightarrow 1^-$, on a l'équivalent :

$$f(x) \sim \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

Pour n fixé, le dénominateur $1-x^n \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. On élimine cette singularité en observant que $1-x^n = (1-x)P_n(x)$ où $P_n(x) = 1 + \dots + x^{n-1}$. On pose donc :

$$g : x \in [0, 1[\mapsto (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{P_n(x)}.$$

Maintenant, toujours à n fixé, $P_n(x) \rightarrow n$ lorsque $x \rightarrow 1$, et on reconnaît le développement en série entière de $h : x \mapsto -\ln(1-x)$. Vérifions qu'on a identifié le bon équivalent. On a toujours $P_n(x) \leq n$ pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1[$, donc il suffit de contrôler :

$$0 \leq g(x) - h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k \frac{n - P_n(x)}{nP_n(x)}.$$

Or :

$$n - P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1-x^k) = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) \leq (1-x)nP_n(x).$$

On en déduit :

$$0 \leq g(x) - h(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (1-x)x^k = x \leq 1.$$

Donc $g(x) - h(x)$ est borné, tandis que $h(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. Cela démontre que $g(x) \sim h(x)$ ainsi que l'équivalent annoncé pour f .

Pour aborder le deuxième exemple, on aura besoin de savoir comment intégrer une relation de comparaison. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 8 *Intégration des relations de comparaison*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [a, +\infty]$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \rightarrow b$

1. Si $\int_a^b g$ est convergente en b , alors $\int_a^b f$ est convergente et $\int_x^b f \sim \int_x^b g$ lorsque $x \rightarrow b$;
2. Si $\int_a^b g$ est divergente en b , alors $\int_a^b f$ est divergente et $\int_a^x f \sim \int_a^x g$ lorsque $x \rightarrow b$.

Exemple 9

L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln(t)}$ est divergente et pour $k \geq 1$, on montre qu'on a le développement asymptotique suivant lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{1!x}{\ln^2(x)} + \cdots + \frac{(k-1)!x}{\ln^k(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^k(x)}\right).$$

Soit $x \geq 2$. Pour obtenir le développement ci-dessus, on réalise des intégrations par parties successives pour $n \geq 1$ fixé. On remarque que la fonction t qui apparaît par l'intégration de la fonction constante est compensée par la dérivation de la fonction $\frac{1}{\ln^k(t)}$ et conduit à :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \left[\frac{t}{\ln(t)} \right]_2^x + 1! \left[\frac{t}{\ln^2(t)} \right]_2^x + \cdots + (n-1)! \left[\frac{t}{\ln^n(t)} \right]_2^x + n! \int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+1}(t)}. \quad (1)$$

On cherche ensuite à estimer l'intégrale de droite. Comme l'intégrande varie très peu lorsque $t \rightarrow +\infty$, on conjecture que $\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+1}(t)} \sim \frac{x}{\ln^{n+1}(x)}$. On montre ceci en calculant un équivalent de la dérivée :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{\ln^{n+1}(t)} \right) \sim \frac{1}{\ln^{n+1}(t)} \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

On intègre cet équivalent sur les intégrales partielles et on conclut en enlevant les termes constants de l'égalité (1) (qui disparaissent dans le petit o).

1.3 Fonctions définies par une intégrale à paramètre [3]

On s'intéresse dans cette partie au comportement asymptotique d'une intégrale à paramètre de la forme

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda\varphi(x)} f(x) dx$$

lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Heuristiquement, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, on ne voit plus que l'endroit où φ est minimale, i.e. où $e^{-\lambda\varphi}$ est le plus grand. Pour traiter cette question, on découpe l'intervalle en fonction du

comportement de φ pour se ramener aux cas où φ est monotone et atteint un minimum au bord de l'intervalle $]a, b[$.

On commence par établir deux théorèmes qui donnent des équivalents de l'intégrale à paramètre lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, puis on applique ce résultat à la fonction Γ pour démontrer l'équivalent de Stirling.

● Théorème 10 Méthode de Laplace (1)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty]$, $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b[)$ telle que $\varphi' > 0$ sur $[a, b[$. Soit enfin $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue et non nulle en a . On suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto e^{-\lambda_0 \varphi(x)} f(x)$ soit intégrable sur $[a, b[$. Alors pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, la fonction $x \mapsto e^{-\lambda \varphi(x)} f(x)$ est intégrable sur $[a, b[$, et lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^b e^{-\lambda \varphi(x)} f(x) dx \sim \frac{f(a)}{\lambda \varphi'(a)} e^{-\lambda \varphi(a)}.$$

≡ Preuve.

Tout d'abord, pour $\lambda \geq \lambda_0$, on écrit :

$$\forall x \in [a, b[, e^{-\lambda \varphi(x)} |f(x)| \leq e^{-(\lambda - \lambda_0) \varphi(x)} e^{-\lambda_0 \varphi(x)} |f(x)| \leq e^{-(\lambda - \lambda_0) \varphi(a)} e^{-\lambda_0 \varphi(x)} |f(x)|,$$

qui est intégrable par hypothèse.

On remarque que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $[a, b[$ sur son image, donc on commence par un cas simple puis on s'y ramène par changement de variable.

• **Cas 1 :** on suppose que $a = 0$ et $\varphi(x) = x$: $F(\lambda) = \int_0^b e^{-\lambda x} f(x) dx$.

On va découper l'intégrale en deux morceaux : l'un proche de 0, où $f(x) \approx f(0)$, et l'autre plus loin, où $e^{-\lambda x}$ sera très petit pour $\lambda \rightarrow +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 0, il existe $\eta \in]0, b[$ tel que $\forall x \in [0, \eta], |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

On écrit :

$$F(\lambda) = f(0) \underbrace{\int_0^\eta e^{-\lambda x} dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^\eta e^{-\lambda x} (f(x) - f(0)) dx}_{(2)} + \underbrace{\int_\eta^b e^{-\lambda x} f(x) dx}_{(3)}.$$

On calcule et estime chaque terme lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1 - e^{-\lambda \eta}}{\lambda}; \\ |(2)| &\leq \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{\varepsilon}{\lambda}; \\ |(3)| &\leq e^{-\eta(\lambda - \lambda_0)} \int_\eta^b e^{-\lambda_0 x} |f(x)| dx \leq e^{-\eta(\lambda - \lambda_0)} \int_a^b e^{-\lambda_0 x} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, comme $e^{-\lambda \eta} \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, il existe $\lambda_1 \geq \lambda_0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_1$ $\left| (1) - \frac{1}{\lambda} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

Pour le troisième terme, comme $\lambda e^{-\eta(\lambda - \lambda_0)} \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, et que l'intégrale est une constante indépendante de ε , il existe $\lambda_2 \geq \lambda_0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_2$, $|(3)| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

Donc pour λ suffisamment grand, $\left|F(\lambda) - \frac{f(0)}{\lambda}\right| \leq \frac{3\varepsilon}{\lambda}$, ce qui démontre l'équivalent souhaité.

• **Cas 2 :** on revient au cas général, et on se ramène au premier cas en posant le changement de variable $u = \varphi(x) - \varphi(a)$, $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]a, b[$ sur $]0, \beta[$ où $\beta = \varphi(b) - \varphi(a)$ (avec si $b = +\infty$ la notation $\varphi(b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On note ψ le changement de variable inverse et on obtient :

$$F(\lambda) = e^{-\lambda\varphi(a)} \int_0^\beta e^{-\lambda u} f(\psi(u)) \psi'(u) du$$

On obtient la conclusion du théorème en appliquant le premier cas à $\tilde{f}(u) = f(\psi(u))\psi'(u)$ et en calculant $\psi'(0) = \frac{1}{\varphi'(a)} \neq 0$ et $f(\psi(0)) = f(a) \neq 0$. ■

Exemple 11 *Reste de la gaussienne*

On étudie le comportement asymptotique lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Pour se placer dans le cadre du théorème, on effectue le changement de variable $t = xu$ de sorte que :

$$F(x) = x \int_1^{+\infty} e^{-x^2 u^2} du.$$

On a alors ici $f(u) = 1$, $\lambda = x^2$, $\varphi(u) = u^2$ et $\varphi'(u) = 2u > 0$ sur $[1, +\infty[$. On en déduit :

$$F(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Théorème 12 *Méthode de Laplace (2)*

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty]$, $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b])$ telle que $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) \neq 0$. Soit enfin $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue et non nulle en a . On suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto e^{-\lambda_0 \varphi(x)} f(x)$ soit intégrable sur $[a, b]$. Alors pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, la fonction $x \mapsto e^{-\lambda \varphi(x)} f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$, et lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^b e^{-\lambda \varphi(x)} f(x) dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda \varphi''(a)}} f(a) e^{-\lambda \varphi(a)}.$$

Preuve.

La preuve de l'intégrabilité est identique à celle de la preuve précédente car φ est encore croissante sur $[a, b]$. Comme pour la preuve précédente, on traite un cas particulier et on s'y ramène par changement de variable.

• **Cas 1 :** on suppose que $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$: $F(\lambda) = \int_0^b e^{-\lambda x^2} f(x) dx$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta \in]0, b[$ comme précédemment. On réalise le même découpage :

$$F(\lambda) = f(0) \underbrace{\int_0^\eta e^{-\lambda x^2} dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^\eta e^{-\lambda x^2} (f(x) - f(0)) dx}_{(2)} + \underbrace{\int_\eta^b e^{-\lambda x^2} f(x) dx}_{(3)}.$$

On estime chaque terme lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} (1) &= \int_0^{\eta\sqrt{\lambda}} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{en posant } u = \sqrt{\lambda}x; \\ |(2)| &\leq \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}; \\ |(3)| &\leq e^{-\eta^2(\lambda-\lambda_0)} \int_{\eta}^b e^{-\lambda_0 x^2} |f(x)| dx \leq e^{-\eta^2(\lambda-\lambda_0)} \int_a^b e^{-\lambda_0 x^2} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, par convergence dominée,

$$\int_0^{\eta\sqrt{\lambda}} e^{-u^2} du \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc il existe $\lambda_1 \geq \lambda_0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, $\left| (1) - \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}$.

Pour le dernier terme, on procède exactement comme dans la preuve précédente en observant que $\sqrt{\lambda} e^{-\eta^2(\lambda-\lambda_0)} \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

Finalement, pour λ suffisamment grand, $\left| F(\lambda) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} f(0) \right| \leq \frac{3\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}$, qui est le résultat attendu.

• **Cas 2 :** on pose $\phi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$. ϕ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $]a, b[$ sur $]0, \beta[$ où $\beta = \sqrt{\varphi(b) - \varphi(a)}$, et $\phi'(a) = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}$. En effet, pour $x \in]a, b[$, en utilisant la formule de Taylor-Young pour φ de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\phi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} = \frac{(x-a)\varphi''(a) + o(x-a)}{2\sqrt{\frac{1}{2}(x-a)^2\varphi''(a) + o((x-a)^2)}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}.$$

En notant $\psi = \phi^{-1}$, on en déduit :

$$F(\lambda) = e^{-\lambda\varphi(a)} \int_0^{\beta} e^{-\lambda u^2} f(\psi(u)) \psi'(u) du,$$

et il reste à appliquer le cas 1 pour conclure, sachant que $\psi'(0) = \phi(a)^{-1}$. ■

Exemple 13 *Équivalent de Stirling*

On considère la fonction Γ définie pour $x \geq 0$ par :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^{+\infty} e^{-t+x \ln(t)} dt.$$

On effectue le changement de variables $t = xu$ pour que le terme exponentiel soit de la forme de celui de la méthode de Laplace :

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-x(u - \ln(u))} du.$$

On est donc dans le cas où f est constante égale à 1, $\lambda = x$ et $\varphi(u) = u - \ln(u)$. On a $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ s'annulant en 1 et $\varphi''(1) = 1 > 0$. Pour appliquer le théorème précédent, on découpe l'intégrale en deux morceaux autour de 1 pour placer l'extremum de φ au bord, puis on

effectue un nouveau changement de variable $v = -u$ dans la première intégrale pour se ramener à une fonction $\varphi(-\cdot)$ croissante sur $] -1, 0[$.

En appliquant le résultat à chaque intégrale, on montre que lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$, donc on obtient en particulier l'équivalent de $n!$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

2 Étude asymptotique de suites et séries

2.1 Séries numériques [1]

On donne d'abord deux théorèmes qui servent d'outils de comparaison dans tous les exemples qui suivront.

Théorème 14 *Comparaison série-intégrale*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante. Alors la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Théorème 15 *Sommation des relations de comparaison*

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$;
2. Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

N.B.

Il s'agit du théorème version série du théorème précédemment cité sur l'intégration des relations de comparaison.

Exemple 16

On détermine un développement asymptotique à l'ordre 3 de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par comparaison série-intégrale, on obtient d'abord :

$$H_n \sim \ln(n).$$

Ensuite, on pose $\Delta_n = H_n - \ln(n)$ et on détermine un équivalent de la différence :

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Ainsi, la série à termes négatifs (à partir d'un certain rang) $\sum(\Delta_{n+1} - \Delta_n)$ converge, donc $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note γ sa limite et on a ainsi établi :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Précisons le terme en $o(1)$. Comme $\Delta_{n+1} - \gamma - (\Delta_n - \gamma) \sim -\frac{1}{2n^2}$, on obtient, par sommation sur les restes :

$$0 - (\Delta_n - \gamma) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

On détermine ensuite un équivalent du dernier terme par une nouvelle comparaison série intégrale. On obtient le développement asymptotique de H_n annoncé.

2.2 Suites définies par récurrence [4]

Lorsqu'on ne sait pas expliciter une suite définie par récurrence, on peut malgré tout parfois étudier précisément son comportement à l'infini, en obtenant un développement à tout ordre. On donne d'abord un théorème permettant d'étudier d'un coup plusieurs suites de la même forme.

Théorème 17

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o(x^{2p+1}),$$

avec $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^*$ et $p > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]0, \eta]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence à partir de x_0 par $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus, lorsque $n \rightarrow \infty$, x_n admet un développement asymptotique de la forme :

$$x_n = \frac{A}{\sqrt[p]{n}} - B \frac{\ln(n)}{n \sqrt[p]{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n \sqrt[p]{n}}\right),$$

avec $A > 0$ et $B \in \mathbb{R}$.

Preuve.

On fixe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \eta]$, $0 \leq f(x) < x$. Soit $x_0 \in]0, \eta]$. La suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à x_0 est alors bien définie. De plus, elle est strictement décroissante et minorée, donc elle converge vers l'unique point fixe de f dans $[0, \eta]$, qui est 0.

On va maintenant obtenir un premier équivalent de x_n en étudiant une suite auxiliaire adaptée. On la détermine heuristiquement par une analogie discret-continu. Le développement asymptotique de f nous indique que $f(x) \approx x - \alpha x^{p+1}$, donc $x_{n+1} - x_n \approx \alpha x_n^{p+1}$. On assimile cette relation de récurrence à l'équation différentielle continue $y' = \alpha y^{p+1} \Leftrightarrow \left(\frac{y^{-p}}{-p}\right)' = \alpha$. Cela nous invite à considérer la suite auxiliaire $y_n = x_n^{-p}$.

Maintenant, on réalise un calcul précis en effectuant un développement limité avec $x_n \rightarrow 0$

lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(x_n - \alpha x_n^{p+1} + \beta x_n^{2p+1} + o\left(x_n^{2p+1}\right) \right)^{-p} - x_n^{-p} \\ &= \left(x_n - \alpha x_n^{p+1} + o\left(x_n^{p+1}\right) \right)^{-p} - x_n^{-p} \\ &= p\alpha + o(1) \\ &\sim p\alpha. \end{aligned}$$

On somme cet équivalent sur les sommes partielles (car la série $\sum p\alpha$ est divergente) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^{-p} - x_k^{-p}) = x_n^{-p} - x_0^{-p} \sim p\alpha n.$$

Le terme constant x_0^{-p} n'intervient pas dans l'équivalent, donc on a montré :

$$x_n \sim \frac{1}{\sqrt[p]{p\alpha n}}.$$

On veut obtenir le terme suivant du développement asymptotique de x_n , donc on pose $\Delta_n = x_n^{-p} - p\alpha n$ et on contrôle :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} - \Delta_n &= \left[\left(x_n - \alpha x_n^{p+1} + \beta x_n^{2p+1} + o\left(x_n^{2p+1}\right) \right)^{-p} - x_n^{-p} \right] - p\alpha \\ &= \underbrace{\left(\frac{p(p+1)\alpha}{2} - p\beta \right)}_{\gamma} x_n^p + o(x_n^p). \end{aligned}$$

Dans la suite, on suppose $\gamma \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de réaliser la sommation sur les petits o plutôt que sur l'équivalent. Lorsque $\gamma \neq 0$, on a établi :

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n \sim \frac{\gamma}{p\alpha n}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, on somme l'équivalent sur les sommes partielles et on montre ainsi :

$$x_n^{-p} = p\alpha n + \frac{\gamma}{p\alpha} \ln(n) + o(\ln(n)).$$

Après un ultime développement limité, on en déduit un développement asymptotique de la forme de celui annoncé dans le théorème. ■

⚙️ Exemple 18

On applique le résultat à $x_0 \in]0, 1[$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ pour obtenir, lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{2 \ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

L'exemple ci-dessous montre que la méthode employée est adaptable dans d'autres contextes.

Exemple 19 [2]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence à partir de $u_0 \in \mathbb{R}$ par $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors on montre que $u_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et admet le développement asymptotique :

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

On voit d'abord que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $+\infty$, car si elle convergerait vers $l \in \mathbb{R}$, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtiendrait $e^{-l} = 0$.

Ensuite, on réalise une nouvelle fois une analogie discret-continu pour trouver la bonne suite auxiliaire. Le système discret $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$ est à comparer à l'équation différentielle $y' = e^{-y}$ i.e. $(e^y)' = 1$. On pose donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Par un développement limité :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n e^{\frac{1}{v_n}} \\ &= v_n \left(1 + \frac{1}{v_n} o\left(\frac{1}{v_n}\right)\right) \\ &= v_n + 1 + o(1). \end{aligned}$$

On a donc bien $v_{n+1} - v_n \sim 1$ puis par sommation d'équivalents $v_n \sim n$. On poursuit en utilisant cette nouvelle information pour obtenir un terme de plus. On pose $\Delta_n = v_n - n$ et on trouve l'équivalent :

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = \frac{1}{2v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right) \sim \frac{1}{2n}.$$

On somme sur les sommes partielles et on obtient :

$$v_n = n + \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n)).$$

On déduit pour finir :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(v_n) \\ &= \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right). \end{aligned}$$

2.3 Suites définies implicitement

Exemple 20 [2]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Alors lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

En effet, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[0, 1]$ car, en notant $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$:

- pour $n = 0$, $u_0 = 1$ est l'unique racine 5-ième réelle de l'unité.
- pour $n \geq 1$, $f'_n : x \mapsto 5x^4 + n > 0$, $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = n > 0$, donc f_n est strictement

croissante de $[0, 1]$ sur $[-1, n]$.

Ensuite, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + u_n = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Par croissance de f_{n+1} , $u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 0, donc converge vers une limite $l \in [0, 1]$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $u_n^5 - 1 = -nu_n$, on trouve que $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, donc que $l = 0$ puis que $u_n \sim \frac{1}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On réinjecte ce premier équivalent dans la relation implicite pour obtenir :

$$nu_n = 1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

En divisant par n , on obtient le développement annoncé.

💬 N.B.

On peut poursuivre en réinjectant le nouveau développement limité dans la relation implicite afin d'obtenir un développement limité à un ordre arbitrairement grand.

Des suites définies implicitement peuvent surgir dans la théorie des équations différentielles, où l'on cherche à déterminer des propriétés qualitatives sur une solution sans pouvoir en donner une expression explicite. Obtenir un comportement asymptotique permet de mieux savoir à quoi ressemble la solution.

⚙️ Exemple 21 [1],[5]

On considère l'équation différentielle $x''(t) + tx(t) = 0$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire donc on dispose de solutions globale. Soit x une solution non nulle. Montrons que x s'annule une infinité dénombrable de fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses points d'annulation (ou zéros) vérifie, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$t_n \sim \left(\frac{3n\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Pour pouvoir considérer des suites ordonnées de zéros, on admet le lemme suivant qui résulte de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

🔧 Lemme 22 Zéros des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit y une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Alors les zéros de y sont isolés et si $y(t) = 0$, alors $y'(t) \neq 0$.

Maintenant, on commence par montrer le résultat suivant qui va permettre de relier les zéros de notre solution non explicite x à ceux de fonctions explicites, solutions d'équations différentielles plus simples.

Théorème 23 *Entrelacement de Sturm*

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $r, s : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $r \leq s$ sur I . On note x, y deux solutions non nulles respectivement de $x'' + r(t)x = 0$ et $y'' + s(t)y = 0$ et on suppose que x s'annule consécutivement en $t_1 < t_2$. Alors :

- ou bien x et y sont proportionnelles sur I , auquel cas $r = s$;
- ou bien y s'annule au moins une fois sur $]t_1, t_2[$.

Preuve.

Supposons que y ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$ et montrons que $y(t_2) = 0$. Comme x et y sont continues et non nulles sur $]t_1, t_2[$, elles sont de signe constant sur $]t_1, t_2[$. Quitte à remplacer x par $-x$ et / ou y par $-y$ (encore solutions non nulles des équations différentielles et proportionnelles à x, y), on peut supposer $x, y > 0$ sur $]t_1, t_2[$. On a alors $x'(t_1) > 0$ et $x'(t_2) < 0$.

On considère la fonction $W(t) = x(t)y'(t) - x'(t)y(t)$ (pseudo-wronskien). Alors $W(t_1) \leq 0$, $W(t_2) \geq 0$ et $W'(t) = (r(t) - s(t))x(t)y(t) \leq 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Donc $W \equiv 0$ sur $[t_1, t_2]$. Ainsi :

$$\forall t \in]t_1, t_2[, \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

En intégrant et en passant à l'exponentielle, on obtient $y = Cx$, où $C > 0$, sur un intervalle ouvert inclus dans $]t_1, t_2[$, puis par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, y et Cx sont solutions locales du même problème de Cauchy, donc sont égales sur tout leur intervalle de définition I .

Montrons finalement que dans ce cas, on a en fait $r = s$. En effet, pour tout $t \in I$, $s(t)y(t) = y''(t) = Cx''(t) = Cr(t)x(t) = r(t)y(t)$. Donc $r(t) = s(t)$ pour tout $t \in I$ tel que $y(t) \neq 0$, puis pour tout $t \in I$ par continuité. ■

Passons maintenant à l'étude des zéros de notre solution non nulle x à l'équation différentielle $x''(t) + tx(t) = 0$.

D'abord, cette solution s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, travaillons sur $I = [1, +\infty[$ et comparons x à une solution de l'équation $y''(t) + y(t) = 0$, qu'on sait résoudre explicitement : $y(t) = \sin(t)$ en est une solution non nulle. Elle s'annule sur $\pi\mathbb{Z}$, donc par le théorème d'entrelacement de Sturm, x admet au moins un zéro dans chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ pour $k \geq 1$. Cela nous autorise à considérer la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses zéros dans $\mathbb{R}_+^*$, ordonnés dans l'ordre croissant.

Obtenons un équivalent de t_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour cela, on encadre la différence entre deux zéros consécutifs $t_{n+1} - t_n$ grâce au théorème d'entrelacement de Sturm. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on travaille sur $I = [t_n, t_{n+1}]$. Pour $t \in I$, on a $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ donc on compare la solution implicite x avec les solutions des équations $y''(t) + t_n y(t) = 0$ et $y''(t) + t_{n+1} y(t) = 0$. Comme précédemment, on sait résoudre ces deux équations explicitement. Une solution non nulle de la première est $y(t) = \sin(\sqrt{t_n}t)$, dont les zéros sont $\frac{\pi}{\sqrt{t_n}}\mathbb{Z}$. Par le théorème d'entrelacement de Sturm, on a alors $t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{t_n}}$, car sinon on pourrait placer deux zéros consécutifs de y dans $[t_n, t_{n+1}[$ ou $]t_n, t_{n+1}]$, ce qui est impossible car x et y ne peuvent être proportionnelles.

En procédant de même avec l'autre équation, on obtient donc l'estimation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\pi}{\sqrt{t_{n+1}}} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{t_n}}. \quad (2)$$

Comme on sait que $t_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (car tout compact de $\mathbb{R}$ contient un nombre fini de zéros de x), cet encadrement nous apprend que $t_{n+1} - t_n \rightarrow 0$ puis que

$$t_{n+1} - t_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{t_n}} \quad (3)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, car $\sqrt{t_{n+1}} \sim \sqrt{t_n}$.

On multiplie (2) par $\sqrt{t_{n+1}}$:

$$\pi \leq t_{n+1}^{\frac{3}{2}} - \sqrt{t_{n+1}} t_n \leq \left(\frac{\sqrt{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n}} \right) \pi.$$

Le terme central tend donc vers π et ressemble à $t_{n+1}^{\frac{3}{2}} - t_n^{\frac{3}{2}}$, ce qui nous permettrait de faire une sommation d'équivalent. Précisons-le par un développement limité :

$$\begin{aligned} \sqrt{t_{n+1}} t_n &= t_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{t_{n+1} - t_n}{t_n}} \\ &= t_n^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{t_{n+1} - t_n}{2t_n} + o\left(t_n^{-\frac{3}{2}}\right) \right) && \text{d'après (3)} \\ &= t_n^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} + o(1) && \text{d'après (2).} \end{aligned}$$

On obtient finalement $t_{n+1}^{\frac{3}{2}} - t_n^{\frac{3}{2}} \sim \frac{3\pi}{2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et par sommation d'équivalents sur les sommes partielles :

$$t_n^{\frac{3}{2}} - t_0^{\frac{3}{2}} \sim \frac{3n\pi}{2},$$

d'où l'équivalent annoncé.

2.4 Coefficients de Fourier et approximation par série de Fourier d'une fonction [6]

Les développements asymptotiques permettent de préciser la vitesse de convergence de certaines approximations, ce qui est utile en analyse numérique. Un exemple est celui des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction régulière.

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique, on définit ses coefficients de Fourier et sa série de Fourier par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

et

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}.$$

 Théorème 24 *Vitesse de convergence de la série de Fourier d'une fonction régulière*

Soit $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ une fonction 2π -périodique. Alors :

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad \text{lorsque } |n| \rightarrow +\infty$$

et

$$\|S_N(f) - f\|_\infty = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right) \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

 Preuve.

Pour le premier point, on effectue des intégrations par parties et on applique le lemme de Riemann-Lebesgue. Pour le deuxième point, on utilise l'estimation du premier point et on majore le reste de la série $\sum \frac{1}{n^p}$ par comparaison série-intégrale. ■

Références

- [1] X. GOURDON, *Analyse*. Ellipses, 2020.
- [2] S. FRANCINO, H. GIANELLA, and S. NICOLAS, *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS, analyse 1*. Cassini, 2007.
- [3] J. FARAUT, *Calcul intégral*. EDP sciences, 2006.
- [4] J.-E. ROMBALDI, *Éléments d'analyse réelle*. EDP sciences, 2019.
- [5] F. BERTHELIN, *Équations différentielles*. Cassini, 2017.
- [6] M. EL AMRANI, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.