

Table des matières

101 – Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.	3
102 – Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.	5
103 – Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.	6
104 – Groupes finis. Exemples et applications.	8
105 – Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.	10
106 – Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.	12
120 – Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.	14
121 – Nombres premiers. Applications.	15
122 – Anneaux principaux. Exemples et applications.	17
123 – Corps finis. Applications.	18
125 – Extensions de corps. Exemples et applications.	19
127 – Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.	21
141 – Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.	23
142 – PGCD, PPCM, algorithmes de calcul. Applications.	25
144 – Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.	26
148 – Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.	28
149 – Déterminant. Exemples et applications.	30
150 – Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.	32
151 – Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.	34
152 – Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.	36
153 – Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.	38
155 – Exponentielle de matrices. Applications.	40
156 – Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.	42
157 – Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.	44
158 – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien.	46
159 – Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.	47
161 – Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.	48
162 – Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.	49
170 – Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.	50
171 – Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications	51
181 – Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.	52

190 – Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.	53
191 – Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.	54
201 – Espaces de fonctions. Exemples et applications.	56
203 – Utilisation de la notion de compacité.	58
204 – Connexité. Exemples d'applications.	59
205 – Espaces complets. Exemples et applications.	60
206 – Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.	62
208 – Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.	64
209 – Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.	65
213 – Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.	66
214 – Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.	68
215 – Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.	69
218 – Formules de Taylor. Exemples et applications.	70
219 – Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.	71
220 – Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.	73
221 – Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	74
223 – Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.	76
224 – Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.	78
226 – Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.	83
228 – Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.	85
230 – Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.	87
234 – Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.	89
235 – Problèmes d'interversion de symboles en analyse.	90
236 – Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.	92
239 – Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	93
241 – Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.	94
245 – Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications	96
246 – Séries de Fourier. Exemples et applications.	98
250 – Transformation de Fourier. Applications.	99
261 – Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.	100
262 – Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.	102
264 – Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.	105
266 – Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.	106

101 – Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Sources :

- Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
-

1 Vocabulaire et premiers exemples

- Définition : action de groupe, vocabulaire (transitif, fidèle, libre)
- Exemple : action de G sur lui-même par translation à gauche
- Application : théorème de Cayley
- Définition : orbite, stabilisateur, fixateur
- Exemple : Action de G sur un sous-groupe H par translation à gauche
- Application : théorème de Lagrange
- Exemple : action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$
- Application : décomposition en produit de cycles à supports disjoints
- Équation aux classes
- Application : p -groupes, lemme de Cauchy
- Formule de Burnside
- Application : espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire

2 Théorèmes de Sylow

- Définition d'un p -Sylow
- Action de G sur G/S par conjugaison
- Théorèmes de Sylow : existence, les p -Sylow sont conjugués, propriétés arithmétiques
- Corollaire : soit G un groupe fini. Si p^α divise $|G|$, alors G contient un sous-groupe d'ordre p^β pour tout $\beta \leq \alpha$.
- Application : un groupe d'ordre 45 n'est pas simple
- Application : $\mathfrak{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60 à isomorphisme près. (**DVT 1**, simplicité de $\mathfrak{A}_5$ admise)

3 Classifications de matrices

3.1 Action de $GL_n(K)$ sur $M_{n,m}(K)$

- Définition (action à gauche, à droite)
- Invariants totaux : noyau à gauche, image à droite, rang si simultané
- Matrice échelonnée réduite en lignes
- Application à la résolution de systèmes linéaires, calcul d'une base de l'image, du noyau d'une matrice

3.2 Action de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ par congruence

- Définition
- Invariants non totaux
- Théorème de Gauss
- Invariants totaux pour $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_q$

4 Action de groupes et géométrie

4.1 Action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré par homographie

- Définition de l'action
- Lemme : action bien définie et noyau (**DVT 2**)
- Théorème : $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices $T = \begin{bmatrix} 1 & 1/0 & 1 \end{bmatrix}$ et $S = \begin{bmatrix} 0 & -1/1 & 0 \end{bmatrix}$ (**DVT 2**)
- Application : groupe paveur

5 Action du groupe des isométries en géométrie affine euclidienne

- Définition d'un espace affine en terme d'action de groupe
- Définition du groupe affine d'un espace affine, des isométries
- Isométries du tétraèdre
- Application : nombre de coloriage du tétraèdre régulier

102 – Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Sources :

- Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Michèle AUDIN. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006 [3]
 - Patrice TAUVEL. *Analyse complexe pour la licence 3*. Dunod, 2020 [44]
-

1 Fonction exponentielle et groupe des nombres complexes de module 1

- Définition de la fonction exponentielle (sur $\mathbb{C}$)
- Caractérisation $e^z \in \mathbb{U}$
- Morphisme de groupes $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$
- Sous-groupes de $\mathbb{U}$
- Fonctions trigonométriques, formules d'Euler
- Exemple : une linéarisation

2 Racines de l'unité et cyclotomie

- Racines et racines primitives n-ièmes de l'unité
- Propriété de groupe cyclique
- Définition des polynômes cyclotomiques
- Factorisation de $X^m - 1$, lemme de divisibilité de polynômes
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$ (**DVT 1**)
- Corollaire : polynôme minimal des racines de l'unité, degré des extensions cyclotomiques
- Application à la constructibilité de polygones réguliers

3 Application en géométrie

3.1 Notion d'angle orienté

- Définition de l'angle orienté par action de groupe
- Définition d'une mesure d'angle
- Exemple : théorème angle au centre, angle inscrit ? (voir si on peut écrire une preuve par les complexes)

3.2 Groupe des matrices unitaires

- Interprétation de la multiplication par $z \in \mathbb{U}$ géométriquement dans $\mathbb{C}$ (rotation)
- Définition des matrices unitaires (généralisation)
- Spectre des matrices unitaires
- Calcul du centre de $U_n(\mathbb{C})$
- (écriture de $U_n(\mathbb{C})$ comme produit semi-direct)
- Décomposition polaire (applications par morphismes à chercher)

103 – Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Sources :

- Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Félix ULMER. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2021 [46]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
 - Philippe CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. Calvage et Mounet, 2022 [10]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
-

1 Action par conjugaison et classes de conjugaison

- Définition : action par conjugaison
- Définition : classes de conjugaison
- Exemple : classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$
- Application : dénombrement des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$ (**DVT 1**)
- Remarque : conjugaison pour simplifier l'élément sur lequel on travaille
- Exemple : théorème spectral
- Application : définition de la racine carrée d'une matrice symétrique positive
- Exemple : description de $SO_3(\mathbb{R})$ et ses classes de conjugaison

2 Sous-groupes distingués et quotients de groupes

- Définition : sous-groupe distingué
- Exemple : groupes abéliens, $\{1\}$ et G
- Proposition : l'intersection de deux sous-groupes distingués est distingué
- Proposition : le noyau d'un morphisme de groupes est distingué
- Exemple : $\mathfrak{A}_n$, $SL_n(K)$ sont distingués
- Théorème de factorisation
- Remarque : réciproque du résultat noyau et sg distingué
- Exemple : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$
- 3^{me} théorème d'isomorphisme
- Exemple : sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

3 Sous-groupes distingués particuliers : centre et groupe dérivé

- Définition : centre d'un groupe
- Proposition : distingué
- Exemple : groupe abélien, centre de $\mathfrak{S}_n$, de $GL_n(K)$
- Proposition (découle de l'action par conjugaison) : le centre d'un p -groupe n'est pas trivial
- Application : Tout groupe d'ordre p^2 est abélien
- Définition : groupe dérivé
- Proposition : groupe dérivé et quotient
- Exemple : groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$, de $GL_n(K)$

4 Théorèmes de Sylow et application à la simplicité

4.1 Théorèmes de Sylow

- Définition : sous-groupe de Sylow d'un groupe fini
- Exemple : sous-groupe de Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$
- Théorèmes de Sylow : existence, les p -Sylow sont conjugués, propriétés arithmétiques
- Corollaire : un p -Sylow est distingué ssi ...
- Corollaire : soit G un groupe fini. Si p^α divise $|G|$, alors G contient un sous-groupe d'ordre p^β pour tout $\beta \leq \alpha$.

4.2 Application à la simplicité

- Définition : groupe simple
- Théorème : un groupe abélien est simple ssi son ordre est un nombre premier
- Application : un groupe d'ordre 45 n'est pas simple
- Lemme : les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ si $n \geq 5$
- Théorème : pour tout $n \geq 2, n \neq 4$, $\mathfrak{A}_n$ est simple.
- Théorème : groupes simples d'ordre 60 (**DVT 2**)

104 – Groupes finis. Exemples et applications.

Sources :

- Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Félix ULMER. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2021 [46]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
-

1 Ordre d'un groupe, ordre d'un élément

- Définition : ordre d'un élément, ordre d'un groupe
- Exemple : ordre d'un cycle dans $\mathfrak{S}_n$
- Théorème de Lagrange
- Corollaire : un sous-groupe d'indice 2 est distingué dans G
- Exemple : $\mathfrak{A}_n$ est distingué dans $\mathfrak{S}_n$ (dans la partie groupe symétrique)
- Corollaire : tout groupe fini d'ordre premier est cyclique
- Proposition : l'ordre est préservé par isomorphisme de groupes
- Proposition : ordre d'une puissance, ordre d'un produit d'éléments qui commutent
- Exemple : ordre d'une permutation dans $\mathfrak{S}_n$
- Théorème de Cauchy
- Application : Soit p, q deux nombres premiers distincts. Un groupe abélien d'ordre pq est cyclique.

2 Exemples de groupes finis

2.1 Groupes abéliens

- Proposition : ordre des éléments d'un groupe cyclique
- Application : Soit K un corps fini. Alors K^* est cyclique.
- Exemple : le groupe des racines n -ièmes de l'unité est cyclique.
- Théorème de structure (admis)
- Exemple
- Application : classification des groupes abéliens finis (annexe)

2.2 Groupes non abéliens : exemple du groupe symétrique

- Définition
- Parties génératrices
- Ordre d'un élément en fonction de sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints
- Sous-groupes distingués

3 Actions de groupes finis, équation aux classes

- Définitions : action de groupe, orbites, stabilisateurs
- Equation aux classes
- Exemple : action par conjugaison
- Application : le centre d'un p -groupe n'est pas trivial.
- Application : Un groupe d'ordre p^2 est abélien, isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$
- Isométries du tétraèdre régulier (**DVT 1**)
- Application : nombre de coloriations du tétraèdre régulier

4 Théorèmes de Sylow

- Définition : p -Sylow
- Théorèmes de Sylow
- Corollaire : soit G un groupe fini. Si p^α divise $|G|$, alors G contient un sous-groupe d'ordre p^β pour tout $\beta \leq \alpha$.
- Exemple : un groupe d'ordre 45 n'est pas simple
- Application : $\mathfrak{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60 (**DVT 2**)

105 – Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Sources :

- Aviva SZPIGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
 - Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cepaduès, 2024 [29]
-

1 Groupe symétrique

1.1 Définition et parties génératrices

- Définition du groupe symétrique. Exemple d'éléments (cycle, produit de cycles)
- Théorème de décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Exemple.
- Corollaire : ordre d'une permutation
- "Application" : lemme de Cauchy (on utilise juste l'ordre d'un cycle)
- Corollaire : classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$
- Corollaire : parties génératrices
- Définition : point fixe d'une permutation
- Proposition : espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire

1.2 Morphisme signature et groupe alterné

- Définition / théorème : il existe un unique morphisme de groupe non trivial $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^\times$. On l'appelle morphisme signature.
- Exemple : signature d'un cycle
- Proposition : formule en terme d'inversion
- Corollaire : parité de la décomposition en produit de transpositions déterminée par la signature
- Définition : Groupe alterné ($n \geq 2$)
- Proposition : partie génératrice (**DVT 1**)
- Proposition : les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ si $n \geq 5$ (**DVT 1**)
- Théorème : $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \neq 4$ (**DVT 1**)
- Exemple : cas de $\mathfrak{A}_4$ (groupe dérivé)
- Théorème : $\mathfrak{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60

1.3 Sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$

- Théorème : sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$
- Proposition : groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$
- Théorème de Cayley (linéaire)
- Remarque : on s'en sert pour montrer les théorèmes de Sylow

2 Polynômes symétriques et relations coefficients-racines

- Définition
- Définition des polynômes symétriques élémentaires
- Théorème de relations coefficients-racines
- Exemple : sommes de Newton
- Théorème de structure
- Exemple concret

3 Groupe symétrique en géométrie

- Définition : groupe d'isométries conservant une partie
- Isométries du tétraèdre (**DVT 2**)
- Application : nombre de coloriages du tétraèdre régulier

4 Déterminant

- Définition d'une forme linéaire alternée
- Définition / théorème : l'espace des formes n -linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$ est de dimension 1, engendré par l'application $\det$ (formule)
- Exemple : formule en dimension 2 et 3
- Proposition : déterminant et permutation des colonnes, déterminant de la transposée, déterminant de AB

106 – Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Sources :

— Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]

- Définition du groupe linéaire
- Lien $GL(E), GL_n(K)$ par choix d'une base
- Définition du groupe spécial linéaire
- $GL_n(K)$ est un ouvert de $M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1 Partie génératrice et pivot de Gauss

- Définition de transvection et dilatation (endomorphisme)
- Caractérisation, définition de matrice élémentaire de transvection, de dilatation
- Action de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$ par translation à gauche, interprétation en terme de système linéaire
- Théorème du pivot de Gauss
- Conséquence : les transvections engendrent $SL_n(K)$, les dilatations engendrent $GL_n(K)$
- Application : algorithme pour calculer A^{-1}
- Propriété : centres de $GL(E)$ et de $SL(E)$
- Propriété : groupes dérivés de $GL(E)$ et de $SL(E)$

2 Action du groupe linéaire et classification

2.1 Action par congruence

- Définition
- Invariants non totaux
- Théorème de Gauss
- Invariants totaux pour $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_q$

2.2 Action par similitude

- Définition
- Théorème : dénombrement des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$

3 Sous-groupes remarquables de $GL(E)$

3.1 Sous-groupes finis

- Définition de l'exposant d'un groupe
- Caractérisation des sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$ (**DVT 1**)

3.2 Sous-groupe des matrices de permutation et sous-groupes de Sylow

- Plongement de $\mathfrak{S}_n$ dans $GL_n(K)$
- Théorème de Cayley linéaire
- Cardinaux de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $SL_n(\mathbb{F}_q)$
- Exemple : p -Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.
- Application : rôle dans la preuve des théorèmes de Sylow

3.3 Groupe orthogonal

- Définition du groupe orthogonal
- Description de $O_2(\mathbb{R})$, $O_3(\mathbb{R})$
- Sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$
- Théorème de réduction $O_n(\mathbb{R})$ (p.d.v. action du groupe sur lui-même par conjugaison)
- Parties génératrices (**DVT 2**) et propriété de conjugaison
- Centres
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$
- Décomposition polaire
- Application : unitairement semblable $\Rightarrow$ orthogonalement semblable

Nom:

Prénom:

Numéro de Jury:

Numéros des sujets tirés:

Intitulé du sujet choisi:

Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Définition 1: Soit G un groupe et $A \subset G$. Le sous-groupe engendré par A , noté $\langle A \rangle$, est le plus petit sous-groupe de G contenant A : $\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ A \subset H}} H$.

Définition 2: Soit G un groupe et $A \subset G$. On dit que A est une partie génératrice de G lorsque $\langle A \rangle = G$.

I - Groupes monogènes

Définition 3: Un groupe G est dit:

- monogène s'il est engendré par un seul élément
- cyclique s'il est monogène et fini.

Exemple 4: Pour $n \geq 1$, le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ des racines n -ièmes de l'unité est cyclique d'ordre n .

Proposition 5: Un groupe monogène est abélien.

Théorème 6: Soit G un groupe monogène.

- Si G est infini, alors $G \cong \mathbb{Z}$.
- Si G est fini d'ordre $n \geq 1$, alors $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème 7: Soit $n \geq 1$. Les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les classes $k\mathbb{Z}$ où $k \wedge n = 1$.

Définition 8: On appelle indicatrice d'Euler la fonction $\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ qui à $m \in \mathbb{N}^*$ associe le nombre $\varphi(m)$ de générateurs de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Exemple 9: Les générateurs de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sont $\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}$ donc $\varphi(10) = 4$.

Proposition 10: $\forall m \in \mathbb{N}^*, m = \sum_{d|m} \varphi(d)$.

Application 11: Soit K un corps fini et E/K une extension finie. Alors il existe $\alpha \in E$ tel que $E = K(\alpha)$.

II - Groupe dérivé

Définition 12: Le groupe dérivé d'un groupe G , noté $D(G)$, est le sous-groupe engendré par les commutateurs de G :

$$D(G) = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$$

Remarque 13: Le groupe dérivé d'un groupe abélien est trivial.

Exemple 14: $D(S_3) = A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Proposition 15: Soit $\varphi: G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Alors $\varphi(D(G)) \subset D(G')$.

Corollaire 16: $D(G)$ est un sous-groupe caractéristique (donc distingué) de G .

Proposition 17: Soit $H \triangleleft G$. G/H est abélien si et seulement si $D(G) \subset H$.

Exemple 18: Le sous-groupe V de $2n$ engendré par les bitranspositions contient $D(2n)$.

III - Groupes de permutations

Pour $n \geq 2$, on note S_n le groupe symétrique sur $[1, n]$ et $2n$ son sous-groupe alterné.

Définition 19: Pour $r \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, on appelle r -cycle toute permutation de la forme $(i_1 \dots i_r)$ ou $i_1, \dots, i_r \in [1, m]$ sont 2 à 2 distincts. Un 2-cycle est appelé transposition.

Théorème 20: Toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints. De plus, cette décomposition est unique à ordre des cycles près.

Exemple 21: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 2)(5 \ 6)$.

Application 22: Deux permutations de S_n sont conjuguées si et seulement si leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints contiennent le même nombre de r -cycles pour tout $2 \leq r \leq n$.

Théorème 23: Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

Exemple 24: $(1 \ 4 \ 2) = (1 \ 4)(1 \ 2)$.

Remarque 25: Cette décomposition n'est pas unique.

- On peut se limiter aux transpositions $(i \ i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Application 26: Si $n \neq 6$, alors les automorphismes de S_n sont intérieurs. Si de plus $n \geq 3$, $\text{Aut } S_n = \text{Int } S_n \cong S_n$.

Application 27: Si $n \geq 3$, alors $2n$ est engendré par les 3-cycles.

Exemple 28: Cette décomposition n'est pas unique:

$$(1 \ 2)(3 \ 4) = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 2 \ 4)(1 \ 3 \ 2)(1 \ 4 \ 2) \\ = (1 \ 2 \ 3)(1 \ 3 \ 4)(1 \ 3 \ 2)(1 \ 4 \ 3)$$

Proposition 29: Si $n \geq 5$, alors les 3-cycles sont conjugués dans $2n$.

Application 30: Pour $n \geq 5$, $D(S_n) = D(2n) = 2n$.

Application 31: Pour $n \geq 5$, $2n$ est simple.

Remarque 32: $2n$ est simple, mais $2n$ n'est pas simple car $D(2n) = V \neq 2n$, Id .

IV - Groupe linéaire

Soit K un corps et E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1) Pivots de Gauss

Définition 33: On définit les matrices élémentaires de $GL_n(K)$: les transvections $I_n + \lambda E_{ij}$ pour $\lambda \in K^\times$ et $1 \leq i \neq j \leq n$.

• les dilatactions $I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ pour $\lambda \in K^*$ et $1 \leq i \leq n$.

Théorème 34 (Pivot de Gauss): Soit $A \in GL_n(K)$. Il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_k$ telles que la matrice $E_k \dots E_1 A$ soit échelonnée en lignes et réduite.

Corollaire 35: $GL_n(K)$ est engendré par les transvections et les dilatactions. $SL_n(K)$ est engendré par les transvections.

Application 36: $Z(GL_n(K)) = K^* I_n$ et $Z(SL_n(K)) = \mu_n(K) I_n$.

Application 37: $GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

Remarque 38: $GL_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs.

Application 39: Soit $A \in GL_n(K)$ et $b \in K^n$. L'algorithme du pivot de Gauss permet de résoudre $Ax = b$ d'inconnue $x \in K^n$ avec une complexité en $O(n^3)$.

Proposition 40: Si $n \geq 3$, les transvections sont conjuguées dans $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$.

Application 41: Si $n \geq 3$, $\mathcal{D}(GL_n(K)) = \mathcal{D}(SL_n(K)) = SL_n(K)$.

2) Groupe orthogonal

On suppose $K = \mathbb{R}$ et on munit E d'un produit scalaire.

Définition 42: On appelle groupe orthogonal le sous-groupe $G(E) = \{u \in GL(E) \mid \forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle\}$ de $GL(E)$, et groupe spécial orthogonal le sous-groupe $SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$.

Définition 43: On appelle :

• réflexion toute symétrie orthogonale $s \in G(E)$ par rapport à un hyperplan.

• renversement toute symétrie orthogonale $s \in SO(E)$ par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$.

Théorème 44: Toute isométrie $u \in G(E)$ (resp. $SO(E)$) s'écrit comme produit d'un plus ou moins n réflexions (resp. renversements).

Proposition 45: Les renversements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.

Application 46: $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

3) Application en géométrie.

On considère l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ par homographie :

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, z \right) &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

On note $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \text{Re } z \leq \frac{1}{2}\}$.

Proposition 47: L'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ est bien définie.

Théorème 48: $SL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$ où $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Application 49: Le groupe $PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I_2\}$ agit

sur $\mathbb{H}$ avec $\mathcal{D}$, i.e. :

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\bar{A} \in PSL_2(\mathbb{Z})} A \cdot \mathcal{D}$$

$$\forall \bar{A}, \bar{B} \in PSL_2(\mathbb{Z}), \bar{A} \neq \bar{B} \Rightarrow A \cdot \mathcal{D} \cap B \cdot \mathcal{D} = \emptyset.$$

Algorithme du pivot.

Entrée : $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

Sortie : Forme échelonnée réduite de A

Traitement :

$i_0, j_0 \leftarrow -1, 1$

Tant que $i_0 \leq m$ et $j_0 \leq n$:

Si la colonne j_0 est nulle :

$j_0 \leftarrow j_0 + 1$

Sinon :

Si $a_{i_0, j_0} = 0$:

Chercher $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $a_{i, j_0} \neq 0$

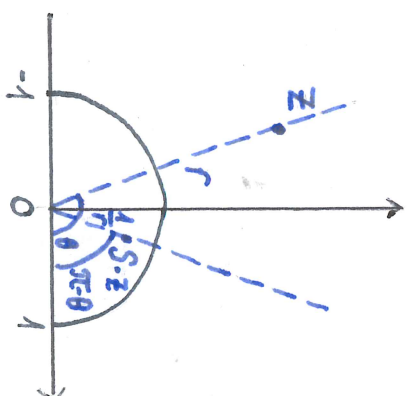
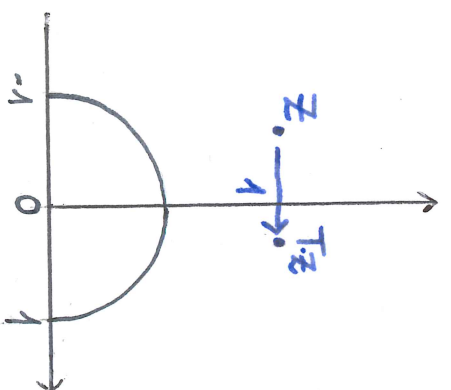
$L_{i_0} \leftarrow L_{i_0} + L_i$

$L_{i_0} \leftarrow a_{i_0, j_0}^{-1} L_{i_0}$

Pour $i \neq i_0$ allant de 1 à m :

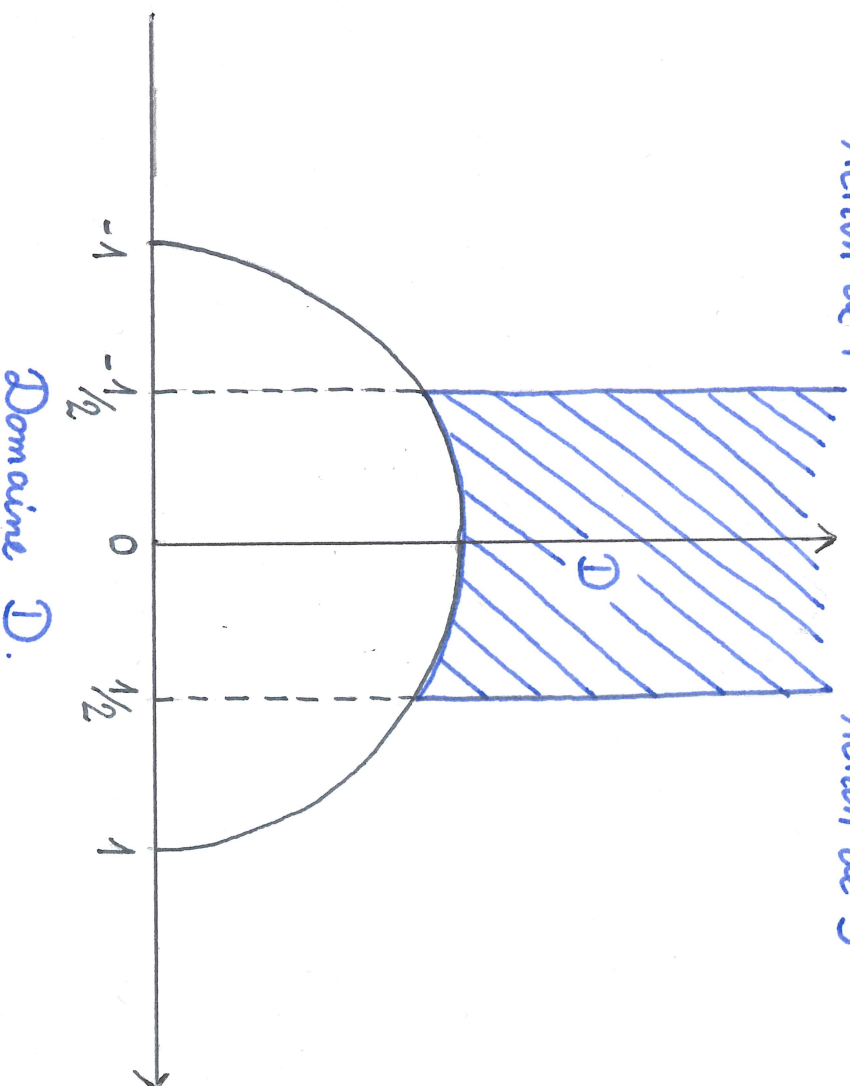
$L_i \leftarrow L_i - a_{i, j_0} L_{i_0}$

$i_0, j_0 \leftarrow i_0 + 1, j_0 + 1$.



Action de T

Action de S



Domaine $\mathcal{D}$.

120 – Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
-

1 Description de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Définition : relation de congruence modulo n
- Théorème : c'est une relation d'équivalence
- Lemme : idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}$
- Remarque : $a \equiv b [n]$ ssi $a - b \in n\mathbb{Z}$
- Théorème / définition : définition de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme quotient de l'anneau $\mathbb{Z}$ par l'idéal $n\mathbb{Z}$
- Proposition : cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, énumération de ses éléments
- Théorème : éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Exemple
- Proposition : les éléments non nuls non inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des diviseurs de 0
- Corollaire : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ssi n est premier
- Proposition : les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont principaux, de la forme $\langle \bar{d} \rangle$ où $d|n$.
- Corollaire : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est principal ssi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ssi n est premier
- Remarque : les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ coïncident avec les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

2 Théorème d'isomorphisme chinois

- Théorème d'isomorphisme chinois
- Application : résolution de systèmes d'équations diophantiennes. Par exemple, $u = 1[3]; u = 3[5]; u = 0[7]$
- Application : isomorphisme de groupes entre les groupes multiplicatifs
- Application : caractérisation des nombres de Carmichael (**DVT 1**)

3 Fonction indicatrice d'Euler

- Définition
- Remarque : elle compte le nombre de générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ou le nombre d'inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
- Théorème : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- Application : soit p un nombre premier. Alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est un groupe cyclique.
- Application : cyclotomie (préciser)
- Proposition : soit p un nombre premier et $r \geq 1$. Alors $\varphi(p^r) = (p-1)p^{r-1}$.
- Théorème : soit m, n deux entiers premiers entre eux. Alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
- Corollaire : formule pour $\varphi(n)$

4 Applications de la réduction modulo p

- Exemple : soit p un nombre premier somme de deux carrés. Alors $p \equiv 1[4]$.
- Exemple : l'équation diophantienne $x^5 + 113y^5 = 137$ n'admet pas de solution entière. (réduction modulo 11)
- Théorème : critère d'Eisenstein
- Application : il existe des polynômes irréductibles de tout degré dans $\mathbb{Q}[X]$.
- Théorème : critère d'irréductibilité modulo p
- Exemple : $P(X) = X^4 + 15X^3 + 7$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
- Théorème : irréductibilité des polynômes cyclotomiques (**DVT 2**)

121 – Nombres premiers. Applications.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
-

1 Propriétés arithmétiques et répartition

1.1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- Définition d'un nombre premier
- Proposition : $n \geq 2$ premier ss'il n'admet aucun diviseur entre 2 et $\sqrt{n}$
- Théorème d'Euclide
- Crible d'Eratosthène
- Théorème de décomposition en produit de facteurs premiers
- Application : calcul de $\varphi(n)$
- Définition : valuation p -adique
- Propriétés élémentaires
- Théorème de Wilson
- Irrationalité de $\sqrt{n}$ lorsque n est sans facteurs carrés dans sa décomposition en facteurs premiers

1.2 Répartition des nombres premiers

- Théorème des nombres premiers (admis)
- Théorème de Bertrand (admis)
- Théorème de Dirichlet (admis)

2 Nombres premiers en théorie des groupes

2.1 p -groupes

- Définition : p -groupe
- Proposition : le centre d'un p -groupe n'est pas trivial
- Théorème : tout groupe d'ordre p^2 est abélien
- Théorème : soit G un p -groupe d'ordre p^α . Alors pour tout $\beta \leq \alpha$, G admet un sous-groupe d'ordre p^β .

2.2 Le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

- Proposition : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ssi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier
- Corollaire (théorème de Fermat) : soit p un nombre premier. Alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^{p-1} \equiv 1[p]$.
- Définition : a est un témoin de Fermat d'un entier $n \geq 1$ lorsque $a^{n-1} \not\equiv 1[n]$.
- Définition : nombres de Carmichael
- Théorème de Korselt (**DVT 1**)
- Exemple : premiers nombres de Carmichael
- Proposition : soit $n \geq 1$ qui ne soit pas un nombre de Carmichael. Alors n est premier, ou bien n admet au moins $\frac{n}{2}$ indicateurs de Fermat.
- Proposition (Test de primalité de Fermat) : soit $n \geq 1$ un entier qui n'est pas un nombre de Carmichael. On tire au hasard k entiers a dans $\{2, \dots, n-1\}$ et on calcule a^{n-1} modulo n . Si l'on obtient 1 à chaque fois, la probabilité que n ne soit pas un nombre premier est inférieure à $\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

3 Utilisation dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes

3.1 Critères d'irréductibilité

- Théorème : critère d'irréductibilité par réduction modulo p
- Contre-exemple : ϕ_8 (à travailler)
- Exemple : irréductibilité de $P(X) = X^4 + 15X^3 + 7$ par réduction modulo 5
- Théorème : critère d'Eisenstein
- Exemple : irréductibilité de ϕ_p
- Application : il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{Q}$

3.2 Irréductibilité des polynômes cyclotomiques et application

- Théorème : irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$ (utilise des nombres premiers)
- Corollaire : degré des extensions cyclotomiques
- Définition : constructibilité
- Proposition : l'ensemble des nombres constructibles forme un sous-corps de $\mathbb{R}$
- Théorème de Wantzel
- Corollaire : si x est constructible, alors $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2^e$
- Définition : polygone constructible, angle constructible
- Proposition : l'ensemble des angles constructibles est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$
- Proposition : le polygone à $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ côtés est constructible ssi pour tout i le polygone à $p_i^{\alpha_i}$ côtés est constructible.
- Théorème : Pour $\alpha \geq 1$, le polygone régulier à 2^α côtés est constructible. Soit $p \geq 3$ et $\alpha \geq 1$. Le polygone régulier à p^α côtés est constructible ssi p est un nombre premier de Fermat. (**DVT 2**)

4 Construction des corps finis

- Proposition : soit K un corps fini. Alors K est de caractéristique p première et $|K| = p^n$.
- Théorème : existence et unicité des corps finis de cardinal p^n
- Théorème : sous-corps d'un corps fini / automorphismes...

122 – Anneaux principaux. Exemples et applications.

Sources :

- Félix ULMER. *Anneaux, corps, résultants*. Ellipses, 2018 [45]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005 [4]
-

1 Arithmétique des anneaux principaux

- Définition d'un anneau principal
- Exemples : $\mathbb{Z}$, $K[X]$ en faisant référence à la partie anneaux euclidiens
- Application (principalité de $K[X]$: définition du polynôme minimal (cas algèbre linéaire)
- irréductible ssi premier, premier non nul ssi maximal
- Exemple : irréductibles de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{R}[X]$, de $\mathbb{C}[X]$
- Application : construction d'un corps fini comme corps de rupture d'un irréductible
- Contre-exemple : $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal
- Décomposition en produit de facteurs irréductibles (avec un exemple)
- Exemple : inversibles de $\mathbb{Z}$, de $K[X]$
- Existence de pgcd et ppcm
- Théorème de Bézout
- Application : lemme de décomposition des noyaux
- Application : résolution d'équations diophantiennes de la forme $ax + by = d$
- Corollaires arithmétiques (Gauss, Euler)
- Exemple ...

2 Anneaux euclidiens

- Définition
- Exemples : $\mathbb{Z}$, $K[X]$, $\mathbb{Z}[i]$
- Euclidien implique principal
- Propriété : A est un corps ssi $A[X]$ euclidien ssi $A[X]$ principal
- Algorithme d'Euclide (à mettre en valeur), version étendue
- Application : théorème des deux carrés à partir de l'étude de $\mathbb{Z}[i]$
- Application : algorithme de calcul de la forme normale de Smith d'une matrice (**DVT 1**)
- NB : lien avec la réduction de Frobenius, calcul des facteurs invariants d'une matrice
- $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ est principal non euclidien

3 Théorème d'isomorphisme chinois

- Énoncé du théorème
- Exemple : résolution d'un système de congruence sur $\mathbb{Z}$
- Application : interpolation polynomiale
- Application : algorithme de Berlekamp pour la décomposition en irréductible sur les corps finis (**DVT 2**)
- Définition des nombres de Carmichael
- Application : caractérisation des nombres de Carmichael

123 – Corps finis. Applications.

Sources :

- Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Félix ULMER. *Anneaux, corps, résultants*. Ellipses, 2018 [45]
 - Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005 [4]
-

1 Construction et premières propriétés des corps finis

- Lemme : $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps
- Définitions : caractéristique, sous-corps premier
- Structure de $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel, conséquence sur le cardinal
- Définition / théorème du morphisme de Frobenius d'un corps de caractéristique p
- Théorème d'existence et unicité (à isomorphisme près) des corps finis (corps de décomposition)
- Théorème : $\mathbb{F}_q^*$ est cyclique.
- Corollaire : théorème de l'élément primitif pour les corps finis
- Corollaire : existence de polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_p$
- Construction de corps finis comme corps de rupture
- Exemple concret

2 Injections et automorphismes

- Théorème de la base télescopique
- Sous-corps d'un corps premier
- Exemple
- Groupe d'automorphismes stabilisant un sous-corps

3 Polynômes et corps finis

3.1 Critères d'irréductibilité

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ (**DVT 1**)
- Critère d'irréductibilité sur $\mathbb{Z}$ par réduction modulo p
- Exemple et contre-exemple
- Exemple de ϕ_8 comme polynôme irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais réductible modulo p pour tout p

3.2 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

- Algorithme de Berlekamp (**DVT 2**)

4 Carrés dans les corps finis et applications arithmétiques

- Nombres de carrés et caractérisation
- Produits de carrés, non carrés...
- Proposition : -1 est-il un carré dans $\mathbb{F}_q$?
- Application : il existe une infinité de nombres premiers de la forme $1 + 4n$
- Proposition : résolution de $ax^2 + by^2 = c$
- Application : classification des formes quadratiques sur un corps fini

125 – Extensions de corps. Exemples et applications.

Sources :

- Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Félix ULMER. *Anneaux, corps, résultants*. Ellipses, 2018 [45]
-

1 Extensions de corps et premiers exemples fondamentaux

1.1 Vocabulaire des extensions de corps

- Définition d'une extension de corps
- Proposition : si L/K est une extension de corps, alors L est un K -espace vectoriel
- Définition du degré d'une extension
- Exemple

1.2 Corps de rupture

- Définition : corps de rupture d'un polynôme irréductible
- Théorème : existence et unicité à isomorphisme près du corps de rupture d'un polynôme irréductible
- Exemple concret avec exemples de calculs dans un corps de rupture (Ulmer)

1.3 Corps de décomposition

- Définition : corps de décomposition d'un polynôme
- Théorème : existence et unicité à isomorphisme près du corps de décomposition d'un polynôme
- Exemple concret
- Application : existence et unicité des corps finis de cardinal p^n
- Théorème de la base télescopique
- Exemple : dans le Ulmer
- Application : inclusion des corps finis

2 Nombres algébriques, nombres transcendants

- Définition d'un nombre algébrique et d'un nombre transcendant
- Exemples ($\sqrt{2}$, π , e)
- Définition du polynôme minimal d'un nombre algébrique
- Proposition : CNS avec l'irréductibilité
- Exemple : $\sqrt[n]{2}$
- Proposition : base de $K(\alpha)$ lorsque α est algébrique
- Exemple : expression de α^{-1} à partir du polynôme minimal
- Proposition : soit K un corps et L/K une extension finie. Alors tout élément de L est algébrique sur K .
- Théorème de l'élément primitif : soit K un corps fini ou de caractéristique nulle, et L/K une extension finie. Alors il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$. (**DVT 1**)

3 Extensions cyclotomiques

- Définitions : racines (primitives) n -ièmes de l'unité, corps et polynômes cyclotomiques
- Propositions sur les polynômes cyclotomiques
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$
- Exemple : $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ mais est réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout nombre premier p
- Corollaire : degré d'une extension cyclotomique (**DVT 2**)
- Proposition : groupe des automorphismes d'un corps cyclotomique (**DVT 2**)

4 Nombres constructibles

- Définition des nombres constructibles
- Quelques constructions (milieux, parallèles, perpendiculaires...)
- $\mathbb{Q}$ est constructible
- L'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée
- Théorème de Wantzel
- Corollaire : condition nécessaire de constructibilité
- Définition : angle constructible, polygone constructible
- Lemme : soit m, n premiers entre eux. Alors $\cos(\frac{2\pi}{mn})$ est constructible ssi $\cos(\frac{2\pi}{m})$ et $\cos(\frac{2\pi}{n})$ le sont.
- Remarque : on se ramène à se demander si les polygones réguliers à p^α côtés sont constructibles, avec p premier.
- Théorème : soit $p \geq 3$ premier et $\alpha \geq 1$. Le polygone régulier à p^α côtés est constructible ssi $\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat, i.e. il existe $N \geq 1$ tel que $p = 2^N + 1$. (**DVT 2**)
- Théorème : pour tout $\alpha \geq 1$, le polygone régulier à 2^α côtés est constructible.
- Exemple : liste des polygones constructibles ou non jusqu'à 20

127 – Exemples de nombres remarquables. Exemples d’anneaux de nombres remarquables. Applications.

Sources :

- Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Félix ULMER. *Anneaux, corps, résultants*. Ellipses, 2018 [45]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l’agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Yves LADEGAILLERIE. *Géométrie - Affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, 2003 [31]
-

1 Nombres premiers

1.1 Propriétés des nombres premiers

- Propriété de divisibilité
- Infinité des nombres premiers
- Décomposition en produits de facteurs premiers
- Caractérisation avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ intègre / corps

1.2 Test de primalité de Fermat et nombres de Carmichael

- Théorème de Fermat
- Définition : nombres de Carmichael
- Théorème de Korselt (**DVT 1**)
- Exemple : premiers nombres de Carmichael
- Proposition : soit $n \geq 1$ qui ne soit pas un nombre de Carmichael. Alors n est premier, ou bien n admet au moins $\frac{n}{2}$ indicateurs de Fermat.
- Proposition (Test de primalité de Fermat) : soit $n \geq 1$ un entier qui n’est pas un nombre de Carmichael. On tire au hasard k entiers a dans $\{2, \dots, n-1\}$ et on calcule a^{n-1} modulo n . Si l’on obtient 1 à chaque fois, la probabilité que n ne soit pas un nombre premier est inférieur à $\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

1.3 Entiers de Gauss et théorème des deux carrés

- Entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$
- Irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$
- Théorème des deux carrés

2 Nombres algébriques, nombres transcendants

Définition de nombre algébrique, transcendant

2.1 Corps des nombres algébriques

- L’ensemble des nombres algébriques d’une extension est un corps intermédiaire

2.2 Racines de l’unité et cyclotomie

- Polynômes cyclotomiques

3 Nombres constructibles

- Définition des nombres constructibles
- Quelques constructions (milieux, parallèles, perpendiculaires...)
- $\mathbb{Q}$ est constructible
- L'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée
- Théorème de Wantzel
- Corollaire : condition nécessaire de constructibilité
- Définition : angle constructible, polygone constructible
- Lemme : soit m, n premiers entre eux. Alors $\cos(\frac{2\pi}{mn})$ est constructible ssi $\cos(\frac{2\pi}{m})$ et $\cos(\frac{2\pi}{n})$ le sont.
- Remarque : on se ramène à se demander si les polygones réguliers à p^α côtés sont constructibles, avec p premier.
- Théorème : soit $p \geq 3$ premier et $\alpha \geq 1$. Le polygone régulier à p^α côtés est constructible ssi $\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat, i.e. il existe $N \geq 1$ tel que $p = 2^N + 1$. (**DVT 2**)
- Théorème : pour tout $\alpha \geq 1$, le polygone régulier à 2^α côtés est constructible.
- Exemple : liste des polygones constructibles ou non jusqu'à 20

141 – Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Sources :

- Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
- Félix ULMER. *Anneaux, corps, résultants*. Ellipses, 2018 [45]
- Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
- Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005 [4]

Dans toute la leçon, A désigne un anneau intègre et K un corps.

1 Critères d'irréductibilité

- Définition : polynôme irréductible dans $A[X]$
- Théorème : décomposition en produit de facteurs irréductibles
- Exemple : les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes $X - \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. (conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss)
- Proposition : critère d'irréductibilité dans $K[X]$ pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3
- Exemple : les polynômes irréductibles de degré 2, 3 et 4 dans $\mathbb{F}_2[X]$ sont : $X^2 + X + 1, X^3 + X + 1, X^3 + X^2 + 1, X^4 + X^2 + 1$.
- Théorème : critère d'Eisenstein (A factoriel et K corps des fractions de A)
- Corollaire : $\mathbb{Q}[X]$ contient des polynômes irréductibles de tout degré
- Exemple : $X^5 - 6X + 3$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- Exemple : soit $L = K(X^p, Y^p)$. Le polynôme $T - X^p \in L[T]$ est irréductible.
- Théorème : critère d'irréductibilité par réduction modulo p .
- Exemple : $X^4 + 15X^3 + 7$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- Contre-exemple : $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ mais est réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ pour tout nombre premier p .
- Définition : contenu d'un polynôme dans $\mathbb{Z}[X]$
- Théorème de Gauss : multiplicativité du contenu
- Théorème : soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ ssi P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et de contenu 1.
- Exemple : les polynômes des exemples ci-dessus sont en fait irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

2 Extensions de corps et polynômes minimaux

2.1 Définitions et premières propriétés

- Définition : extension de corps
- Définition : élément algébrique d'une extension. Extension algébrique
- Proposition : toute extension finie est algébrique.
- Exemple : i est un élément algébrique de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$.
- Définition : polynôme minimal d'un élément algébrique
- Proposition : soit $P \in K[X]$ et $a \in L/K$ algébrique. Alors $P = \mu_{a,K}$ ssi P est unitaire, irréductible sur $K[X]$ et admet a comme racine dans L .
- Exemple : $\sqrt[3]{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et admet comme polynôme minimal $X^3 - 2$.
- Corollaire : $K(a) = K[a] = K[X]/(\mu_{a,K})$.
- Définition : degré d'une extension
- Proposition : $[K(\alpha) : K] = \deg(\mu_{\alpha,K})$.
- Théorème de la base télescopique
- Exemple : Soit $f = X^5 + 2X + 2, g = X^7 + 2X - 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ l'unique racine réelle de f, g . Alors $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = 35$.
- Exemple : $[\mathbb{F}_p(X, Y) : \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)] = p^2$.

2.2 Application aux extensions cyclotomiques

- Définition : polynôme cyclotomique
- Lemme : soit $P, A, B \in \mathbb{Q}[X]$. On suppose que $P = AB$, que $P \in \mathbb{Z}[X]$, et que P, A sont unitaires. Alors B est unitaire et $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. (**DVT 1**)
- Lemme : pour tout $n \geq 1$, on a $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$.
- Lemme : pour tout $n \geq 1$, $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.
- Théorème : soit $n \geq 1$. Alors ϕ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (**DVT 1**)
- Application : soit $n \geq 1$. On note U_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Alors $[\mathbb{Q}(U_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$. (**DVT 1**)
- Application : soit $n \geq 1$. Le groupe des automorphismes de $\mathbb{Q}(U_n)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. En particulier, si n est premier, $\text{Aut } \mathbb{Q}(U_n)$ est cyclique d'ordre $p - 1$.

3 Corps de rupture et corps de décomposition

3.1 Corps de rupture

- Définition : corps de rupture
- Théorème : existence et unicité
- Exemple (Ulmer p.121) : Soit $f = X^4 + X + 1$ et $g = X^4 + X^3 + X^2 + x + 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$. Alors f et g sont irréductibles et $K = \mathbb{F}_2[X]/(f), L = \mathbb{F}_2[X]/(g)$ sont deux corps finis à 16 éléments. Expliciter un isomorphisme entre K et L .
- Définition : endomorphisme semi-simple
- Théorème : soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est un endomorphisme semi-simple ssi le polynôme minimal μ_u de u est sans facteur carré. (**DVT 2**)
- Théorème (algorithme de Berlekamp) (on se sert du fait que quotienter par un polynôme irréductible donne un corps pour calculer une dimension via le théorème d'isomorphisme chinois)

3.2 Corps de décomposition

- Définition : corps de décomposition
- Théorème : existence et unicité
- Application : existence et unicité des corps finis
- Application : calcul du pgcd par étude des racines dans une extension de décomposition
- Théorème de l'élément primitif en caractéristique nulle ou pour un corps fini

142 – PGCD, PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Sources :

- Aviva SZPIRGAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Félix ULMER. *Anneaux, corps, résultants*. Ellipses, 2018 [45]
 - Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Michel DEMAZURE. *Cours d'algèbre*. Cassini, 2009 [13]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005 [4]
-

1 Définition, existence et caractérisations

- Définition du pgcd, ppcm
- Existence dans un anneau principal
- Éléments premiers entre eux et lien avec le pgcd, ppcm
- Application : Soit $g, h \in G$ d'ordre fini m, n et tels que $gh = hg$. Alors l'ordre de gh est mn .
- Lien entre existence d'un pgcd et d'un ppcm, contre exemples
- Théorème de Bézout dans un anneau principal
- Application : lemme de décomposition des noyaux
- Contre-exemple dans un anneau factoriel non principal.
- Expression dans un anneau factoriel

2 Pgcd et arithmétique

- Corollaires arithmétiques (Gauss, Euler)
- Application : Soit $g \in G$ d'ordre fini n et $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Alors l'ordre de g^k est $\frac{n}{\text{pgcd}(n,k)}$
- Définition du contenu d'un polynôme
- Multiplicativité du contenu
- Application : critère d'irréductibilité d'un polynôme sur un anneau principal
- Exemple ?
- Lemme de divisibilité (celui des polynômes cyclotomiques)

3 Algorithmes de calcul dans un anneau euclidien

- Définition d'un anneau euclidien
- Algorithme d'Euclide (version classique, version binaire)
- Nombre d'opérations (source / travail à mener)
- Application : résolution d'équations diophantiennes de la forme $ax + by = d$
- Algorithme d'Euclide étendu
- Exemple : calcul de l'inverse de $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1)$
- Application : algorithme de calcul de la forme normale de Smith d'une matrice (**DVT 1**)

4 Théorème d'isomorphisme chinois

- Énoncé du théorème
- Exemple : résolution d'un système de congruence sur $\mathbb{Z}$: $u \equiv 1[3]; u \equiv 3[5]; u \equiv 0[7]$
- Application : interpolation polynomiale (trouver $f \in \mathbb{F}_5[X]$ tel que $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 1$)
- Application : algorithme de Berlekamp pour la décomposition en irréductible sur les corps finis (**DVT 2**)

144 – Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Sources :

- Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Philippe CALDERO and Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2017 [11]
-

1 Racine d'un polynôme

1.1 Définitions et premières propriétés

- Définition / Théorème : morphisme d'évaluation d'un polynôme
- Définition d'une racine d'un polynôme
- Exemple simple
- Exemple : X^n admet pour racines les matrices nilpotentes de $M_n(K)$
- Lien $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow X - \alpha \mid P$
- Proposition : factorisation si A est intègre
- Contre-exemple sans intégrité
- Lien nombre de racines et degré si intégrité
- Multiplicité et polynôme dérivé en caractéristique nulle
- Exemple en caractéristique p

1.2 Quelques applications à l'irréductibilité

- Critère d'irréductibilité des polynômes de degré ≤ 3
- Exemple : polynômes irréductibles de degré 2 et 3 de $\mathbb{F}_2[X]$
- Lemme : soit $P, A, B \in \mathbb{Q}[X]$. On suppose que $P = AB$, que $P \in \mathbb{Z}[X]$, et que P, A sont unitaires. Alors B est unitaire et $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. (**DVT 1**)
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$ (**DVT 1**)

2 Polynômes scindés, scindés à racines simples

- Définition
- Application : CNS de diagonalisabilité, trigonalisabilité
- Exemple où le polynôme caractéristique est scindé
- Définition de corps algébriquement clos
- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Application : irréductibles de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$
- Application : toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable
- Corps de rupture et corps de décomposition
- Exemples
- Définition : polynôme séparable
- Quelques caractérisations avec le polynôme dérivé

3 Polynômes symétriques et relations coefficients-racines

- Définition
- Définition des polynômes symétriques élémentaires
- Théorème de relations coefficients-racines
- Exemple : sommes de Newton
- Théorème de structure
- Exemple concret
- Application : formes de Hankel (**DVT 2**)

4 Localisation des racines

- Localisation des racines dans $\mathbb{C}$
- Théorème des disques de Gerschgorin (on localise les vp du polynôme caractéristique)
- Localisation des racines sur $\mathbb{R}$ (avec le théorème de Rolle)
- Théorème de Kronecker (exemple d'utilisation d'une information sur la localisation des racines)

148 – Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Sources :

- Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Félix ULMER. *Anneaux, corps, résultants*. Ellipses, 2018 [45]
 - Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005 [4]
-

1 Dimension d'un espace vectoriel et bases

- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie
- Exemple : K^n
- Théorème (existence de base) : soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une famille libre. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.
- Corollaire : théorèmes de la base incomplète, de la base extraite
- Théorème : toutes les bases de E ont le même cardinal $\Rightarrow$ définition de la dimension de E .
- Proposition : un sev F d'un ev E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
- Exemple : dimensions de K^n , de $M_n(K)$, de $K_n[X]$
- Propositions : dimension d'un produit, d'une somme directe, formule de Grassmann
- Exemple : $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$
- Application : deux droites projectives du plan projectif sont sécantes
- Application : espace des solutions d'une équation différentielle linéaire
- Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Tout élément $u \in O(E)$ s'écrit comme produit d'au plus $\text{rg}(u - \text{id}_E)$ réflexions (ce nombre est optimal). Si $n \geq 3$, tout élément $u \in SO(E)$ s'écrit comme produit d'au plus $\text{rg}(u - \text{id}_E)$ retournements (ce nombre n'est pas optimal). (**DVT 1**)

2 Application à la théorie des corps et aux problèmes de constructibilité

2.1 Degré d'une extension

- Définition d'une extension de corps
- Exemple : corps de rupture ?
- Structure de K -espace vectoriel d'une extension L/K
- Corollaire : cardinal d'un corps fini
- Définition du degré d'une extension
- Exemple : degré d'une extension et degré du polynôme minimal (à préciser)
- Théorème de la base télescopique
- Exemple de calcul du degré de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$

2.2 Nombres constructibles

- Définition des nombres constructibles
- L'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée
- Théorème de Wantzel
- Corollaire : condition nécessaire de constructibilité
- Définition : angle constructible, polygone constructible
- Théorème : soit $p \geq 3$ premier et $\alpha \geq 1$. Le polygone régulier à p^α côtés est constructible ssi $\alpha = 1$ et p est un nombre premier de Fermat, i.e. il existe $N \geq 1$ tel que $p = 2^N + 1$. (**DVT 2** possible).

3 Dimension et applications linéaires

- Définition : rang d'une application linéaire
- Lien entre l'injectivité, la surjectivité et le transfert de propriétés de familles de vecteurs
- Application : soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le morphisme d'évaluation $K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ n'est pas injectif. Définition du polynôme minimal d'un endomorphisme.
- Théorème : deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension
- Application : dimension de $\mathcal{L}(E, E')$ grâce à l'isomorphisme avec $M_{n,m}(K)$
- Corollaire : théorème de Riesz en dimension finie
- Théorème du rang
- Application : on suppose E de dimension finie. Alors $\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$.
- Corollaire : injectif ssi surjectif ssi bijectif
- Contre-exemple en dimension infinie
- Exemple : l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(0), \dots, P(n))$ est un isomorphisme.

4 Aspects algorithmiques, pivot de Gauss

- Définition : opérations élémentaires (sur les lignes)
- Théorème (du pivot de Gauss) : il existe une suite d'opérations élémentaires (sur les lignes) permettant de mettre une matrice A sous forme échelonnée en lignes.
- Application : caractérisation du rang
- Exemple : déterminer une base de $F \cap G$
- Exemple : extraire une base d'une famille génératrice
- Exemple : compléter une famille libre en une base
- Théorème : algorithme de Berlekamp (on utilise le pivot de Gauss pour déterminer algorithmiquement le nombre de facteurs irréductibles d'un polynôme à coefficients dans un corps fini et pour obtenir une base)

149 – Déterminant. Exemples et applications.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005 [4]
-

1 Formes linéaires alternées

- Définition : forme p –linéaire alternée
- Lien avec les familles liées, invariance par combinaisons linéaires des coordonnées, permutation
- Théorème : l'espace des formes n –linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n est de dimension 1.
- Définition de $\det_B$ (et donc du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base B) par la formule
- Caractérisation de $\det_B$ comme l'unique forme n –linéaire alternée φ telle que $\varphi(B) = 1$
- Proposition : changement de base et déterminant
- Définition : déterminant d'un endomorphisme, indépendance en la base
- Déterminant de l'identité
- Définition : déterminant d'une matrice. Lien avec les définitions précédentes
- Exemple : déterminant 2×2 et 3×3
- Proposition : caractérisation du déterminant sur $M_n(K)$ comme unique forme n –linéaire alternée φ selon les colonnes telle que $\varphi(I_n) = 1$
- Application : déterminant d'une matrice triangulaire
- Application : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u . Alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit u_F divise celui de u .

2 Calcul du déterminant

- Proposition : déterminant du produit, caractérisation de l'inversibilité par le déterminant
- Application : le polynôme caractéristique est invariant par similitude
- Proposition : $\det(A^T) = \det(A)$
- Proposition : effet d'une permutation, d'une transvection, n –linéarité selon les colonnes, propriétés similaires sur les lignes (boîte à outils pour calculer des déterminants)
- Proposition : développement selon une ligne ou une colonne
- Exemple : calcul du déterminant d'une matrice 5×5 (Grifone)
- Exemple : polynôme caractéristique d'une matrice compagnon
- Application : théorème de Cayley-Hamilton

3 Mineurs, comatrice et application au rang

- Définition : Mineur d'une matrice
- Application : Forme de Smith d'une matrice (**DVT 1** possible)
- Définition : comatrice de A
- Proposition : $A \cdot \text{Com}(A)^T = \det(A)I_n$
- Exemple : inverse d'une matrice 2×2
- Application : continuité de l'inverse
- Théorème : Soit $A \in M_{p,n}(K)$. $\text{rg}(A) = r$ ssi il existe un mineur d'ordre r non nul et tous les mineurs d'ordre $s > r$ sont nuls.

4 Application à la résolution de systèmes linéaires

- Théorème : formules de Cramer pour un système linéaire carré inversible
- Proposition : système compatible
- Théorème de Rouché-Fontené
- Exemple : résolution de $x + y + z = t; 2x + y + z = 2t; x - y + z = 3t$

5 Interprétation géométrique

5.1 Coordonnées barycentriques

- Définition : coordonnées barycentriques
- Proposition : Soit un plan affine. Dans un repère barycentrique, trois points de coordonnées (...) sont alignés si et seulement si (déterminant) = 0.
- Théorème : par 5 points passe une unique conique (**DVT 1** possible)

5.2 Volume et distance

- Interprétation du déterminant comme un volume
- Définition : matrice de Gram d'une famille de vecteurs
- (Proposition : soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . En notant $A = \text{Mat}_B(v_1, \dots, v_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $G(v_1, \dots, v_p) = A^T A$.)
- Proposition : $G(v_1, \dots, v_p)$ est une matrice symétrique positive. De plus, elle est définie positive si et seulement si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre. (**DVT 2**)
- Proposition : soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de E et $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. Soit $x \in E$. Alors $d(x, F)^2 = \frac{g(v_1, \dots, v_p, x)}{g(v_1, \dots, v_p)}$. (**DVT 2**)
- Application : inégalité de Hadamard (**DVT 2**)

150 – Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Roger MANSUY and Rached MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022 [33]
-

1 Algèbre $K[u]$ et polynômes annulateurs

- Définition : algèbre $K[u]$ par PU des anneaux de polynômes
- Proposition : $\dim K[u] \leq n^2$
- Proposition : $K[u]$ est fermée dans $\mathcal{L}(E)$
- Application : $\exp(A)$ est un polynôme en A
- Définition : idéal annulateur et polynôme annulateur, polynôme minimal
- Proposition : soit u un endomorphisme et P un polynôme annulateur de u . Si $P(0) \neq 0$, alors u est inversible et $u^{-1} \in K[u]$.
- Théorème : dimension et base de $K[u]$
- Exemple (application au calcul de puissances) : soit $a \neq b$ et u un endomorphisme tq $(X - a)(X - b)$ soit un polynôme annulateur. Alors pour tout $m \geq 0$, $u^m = \frac{a^m - b^m}{a - b}f + \frac{ba^m - ab^m}{b - a}\text{id}_E$.
- Théorème : les racines de μ_u sont exactement les valeurs propres de u .
- Application : soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ d'ordre p . Alors les valeurs propres de P_σ sont des racines p -ièmes de l'unité. (être plus précis)
- Définition : polynôme caractéristique
- Théorème : Cayley-Hamilton
- Corollaire : $\dim K[u] \leq n$
- Théorème : $K[u]$ est un corps $\Leftrightarrow K[u]$ est intègre $\Leftrightarrow \mu_u$ est irréductible
- Définition : endomorphisme semi-simple
- Théorème : u est semi-simple si et seulement si μ_u est sans facteurs carrés (**DVT 1**)
- Exemple : tout endomorphisme diagonalisable est semi-simple. Dans $M_3(\mathbb{R})$, une rotation d'angle différent de $0, \pi/2, \dots$ est semi-simple non diagonalisable.

2 Sous-espaces stables et réduction

- Définition : sous-espace stable
- Proposition : soit $P \in K[X]$. Alors $\ker P(u)$ est un sous-espace stable par u .
- Proposition : l'ensemble $\{\ker P(u) \mid P \in K[X]\}$ est fini.
- Exemple : sous-espaces propres, sous-espaces caractéristiques, noyaux itérés
- Théorème : lemme de décomposition des noyaux
- Exemple : projecteur, symétrie
- Exemple : calcul d'une exponentielle matricielle
- Application : critère de diagonalisabilité (avec μ_u)
- Exemple : une matrice de permutation est diagonalisable sur $\mathbb{C}$
- Application : critère de trigonalisabilité
- Exemple : toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable
- Proposition : sous-espaces stables d'un endomorphisme u diagonalisable (sommes directes de sous-espaces des sous-espaces propres de u)
- Proposition : signification des exposants du polynôme caractéristique et du polynôme minimal
- Définition : sous-espaces cycliques
- Proposition : matrice d'un endomorphisme sur un sous-espace cyclique
- Théorème : sur un endomorphisme cyclique, $\chi_u = \mu_u$.

3 Décompositions d'endomorphismes

- Théorème : soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice $B \in S_n + (\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. De plus, $B \in \mathbb{R}[A]$.
- Application : décomposition polaire. Les matrices sont des polynômes en A .
- Application de l'application : unitairement semblables $\Rightarrow$ orthogonalement semblables
- Théorème : décomposition de Dunford. Composantes = polynômes en A
- Exemple : calcul de la décomposition de Dunford de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- Corollaire : décomposition de Dunford de $\exp(A)$.
- Application : surjectivité de l'exponentielle (**DVT 2**)
- Application : u diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(u)$ diagonalisable.

151 – Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Sources :

- Roger MANSUY and Rached MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022 [33]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
-

1 Sous-espace stable par un endomorphisme

- Définition
- Exemples : $\ker(u)$, $\operatorname{Im}(u)$, $\ker P(u)$
- Proposition : aspect matriciel
- Remarque : intérêt des sous-espaces stables pour décomposer un endomorphisme en endomorphismes simples
- Proposition : si F stable par u et $v \in GL(E)$, $v(F)$ est stable par $v \circ u \circ v^{-1}$
- Exemple : rotation en dimension 3
- Définition : endomorphisme induit sur un sous-espace stable
- Proposition : divisibilités pour polynômes minimaux et caractéristiques

2 Noyaux de polynômes d'endomorphisme

2.1 Lemme de décomposition des noyaux

- Exemple : sous-espaces propres, sous-espaces caractéristiques, noyaux itérés
- Théorème : lemme de décomposition des noyaux
- Exemple : projecteur, symétrie
- Application : critère de diagonalisabilité (avec μ_u)
- Exemple : une matrice de permutation est diagonalisable sur $\mathbb{C}$
- Proposition : sous-espaces stables d'un endomorphisme u diagonalisable (sommes directes de sous-espaces des sous-espaces propres de u)
- Exemple (utilisation des sous-espaces caractéristiques) : soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, $|\lambda| < 1$. Alors $A^k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

2.2 Noyaux itérés

- Proposition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$. La suite $(\ker P(u))_{k \geq 0}$ est strictement croissante puis stationnaire. Si de plus P est irréductible, pour tout $x \in \ker P^k(u) \setminus \ker P^{k-1}(u)$, $\mu_{u,x} = P^k$.
- Application : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $x \in E$ tel que $\mu_u = \mu_{u,x}$. (**DVT 2**)
- NB : on utilise ce fait dans la preuve de la réduction de Frobenius.
- Proposition : lien entre l'indice de stationnarité et exposants dans le polynôme minimal.

2.3 Commutations

- Proposition : commutation et stabilisation des sous-espaces propres
- Corollaire : critère de codiagonalisabilité
- Application : injectivité de $\exp : H_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n^{++}(\mathbb{C})$.

3 Recherche de supplémentaire stable

- Contre-exemple : tout sev stable n'admet pas nécessairement de sev stable (bloc de Jordan nilpotent 2×2)
- Proposition : $\ker u$ admet un supplémentaire stable par u ssi $\ker u = \ker u^2$. Dans ce cas, son supplémentaire stable est $\operatorname{Im} u$.
- Proposition : si u est normal et F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u
- Application : réduction des endomorphismes normaux
- Définition : on dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme semi-simple si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u .
- Lemme : Soit E un K -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que μ_u est irréductible sur K . Alors tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u . (**DVT 1**)
- Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est semi-simple ssi μ_u est sans facteur carrés dans sa décomposition en irréductibles. (**DVT 1**)
- Exemple : tout endomorphisme diagonalisable est semi-simple. Dans $M_3(\mathbb{R})$, une rotation d'angle différent de $0, \pi/2, \dots$ est semi-simple non diagonalisable.

4 Sous-espaces cycliques

- Définition
- Proposition : $E_{u,x} = \operatorname{Vect}(u^k(x))$
- Proposition : dimension, base, matrice dans cette base
- Application : Cayley-Hamilton
- Théorème : réduction de Frobenius (**DVT 2** pour l'existence)
- Exemple ou application

152 – Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Sources :

- Roger MANSUY and Rached MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022 [33]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
-

1 Caractérisation et propriétés des endomorphismes diagonalisables

1.1 Définitions et premières propriétés

- Définition : endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable
- Définition : espaces propres, valeur propre...
- Théorème : u diagonalisable ssi $E = \bigoplus E_\lambda(u)$ ssi même formule avec les dimensions.
- Exemple : un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace est non nulle.
- Proposition : si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable
- (Exemple : calcul du spectre de la matrice du laplacien)
- Exemple : matrice de permutation sur $\mathbb{C}$ (on utilise un polynôme d'endomorphisme...)
- Application : calcul des puissances d'une matrice
- (Application : systèmes de suites récurrentes)

1.2 Intervention des polynômes annulateurs

- Lemme : les racines de μ_u sont exactement les valeurs propres de u .
- Lemme de décomposition des noyaux
- Théorème : u est diagonalisable ssi u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ssi μ_u est scindé à racines simples.
- Exemple : projecteur et symétrie sont diagonalisables.
- Application : soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable et $\ker A = \ker A^2$.
- Exemple où c'est utile ?
- Proposition : soit u un endomorphisme diagonalisable et F un sev stable par u . Alors u_F est diagonalisable.
- Théorème : u est diagonalisable ssi χ_u est scindé et la multiplicité de chaque racine de χ_u correspond à la dimension de l'espace propre associé.

1.3 Diagonalisation simultanée

- Proposition : deux endomorphismes u et v sont co-diagonalisables ssi u et v commutent.
- Exemple : soit $A, B \in M_n(K)$ diagonalisables. Alors $f : M \mapsto AMB$ est un endomorphisme diagonalisable de $M_n(K)$.

2 Propriétés de l'ensemble des endomorphismes diagonalisables selon le corps de base

2.1 Corps finis

- Théorème : Soit $A \in M_n(\mathbb{F}_q)$. Alors A est diagonalisable ssi $X^q - X$ est un polynôme annulateur de A .
- Théorème : Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $g_m = |GL_m(\mathbb{F}_q)|$. Le cardinal de $D_n(\mathbb{F}_q)$, l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_q)$, est donné par la formule : $|D_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{(n_1, \dots, n_q) \in N_q} \prod_{i=1}^q \frac{g_{n_i}}{g_{n_i}}$ où $N_q = \{(n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^q \mid n_1 + \dots + n_q = n\}$. (**DVT 1**)
- (Corollaire : On note $d_n = |D_n(\mathbb{F}_q)|$. On a l'égalité de séries entières de rayon de convergence ≥ 1 $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{g_n} z^n = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{g_n} \right)^p \cdot$)
- Corollaire : Lorsque $q \rightarrow +\infty$, la probabilité de tirer au hasard une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{F}_q)$ suivant une loi uniforme tend vers $\frac{1}{n!}$.

2.2 Topologie lorsque $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- Théorème : $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Application : l'application $A \mapsto \mu_A$ n'est pas continue.
- Théorème : $D_n(\mathbb{C})$ est connexe.
- (Théorème : l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables admettant n valeurs propres distinctes.)
- Théorème : L'adhérence dans $M_n(\mathbb{R})$ de $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$.

3 Endomorphismes diagonalisables remarquables : la réduction des endomorphismes normaux

- Définition : endomorphisme normal d'un espace euclidien ou hermitien
- Lemme : Si F est stable par u normal, alors $F^\perp$ est stable par u
- Théorème : réduction des endomorphismes normaux d'un espace hermitien
- Application : endomorphismes unitaires, endomorphismes hermitiens, endomorphismes anti-hermitiens
- Théorème : réduction des endomorphismes normaux d'un espace euclidien
- Corollaire : théorème spectral
- Exemple : la matrice du laplacien est diagonalisable (sans calcul)
- Application : racine carrée d'une matrice symétrique positive
- Application : décomposition polaire

4 Décomposition de Dunford et application à l'exponentielle matricielle

- Théorème : décomposition de Dunford (avec projecteurs polynomiaux en l'endomorphisme)
- Exemple concret
- Dans la suite $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Théorème : soit $A \in M_n(K)$ telle que χ_A soit scindé sur K . On écrit la décomposition de Dunford de $A = D + N$ avec $D, N \in M_n(K)$, D diagonalisable, N nilpotente, D et N commutant entre elles. Alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est donnée par :

$$\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n).$$

- Application : Soit $A \in M_n(K)$ telle que χ_A soit scindé sur K . Alors A est diagonalisable ssi $\exp(A)$ est diagonalisable.
- Contre-exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais $\exp(A) = I_2$.
- Théorème : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective. Plus précisément, si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(A)) = A$. (**DVT 2**)
- Application : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
- Application : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ est $p \geq 1$. Il existe $X \in GL_n(\mathbb{C})$ un polynôme en A tel que $X^p = A$.

153 – Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Sources :

- Roger MANSUY and Rached MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022 [33]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Analyse matricielle*. EDP Sciences, 2019 [37]
 - Walter APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2024 [2]
 - Francis FILBET. *Analyse numérique*. Dunod, 2009 [19]
-

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Définitions

- Valeur propre, vecteur propre
- Sous-espace propre associé à une valeur propre
- Propriété : les sep sont en somme directe
- Propriété : un endomorphisme en dim finie admet un nombre fini de valeurs propres
- Exemples : dérivation (le spectre peut être infini en dimension infinie), rotation (le spectre peut être vide), symétrie

1.2 Recherche d'éléments propres

- Lien entre spectre de u et racines du polynôme minimal, du polynôme caractéristique
- Application : critère de diagonalisabilité, de trigonalisabilité
- Propriété : déterminant, trace d'un endomorphisme trigonalisable
- Méthode de recherche de vecteurs propres associés à une valeur propre (système linéaire)
- Exemple : matrices 3×3

2 Spectre d'endomorphismes remarquables

2.1 Endomorphisme nilpotent

- 0 est la seule valeur propre d'un endomorphisme ss'il est nilpotent.
- Un endomorphisme nilpotent est diagonalisable ss'il est nul.
- Application : unicité de la décomposition de Dunford

2.2 Endomorphisme cyclique

- Définition, matrice compagnon
- Polynôme minimal et caractéristiques d'une matrice compagnon
- Application : théorème de Cayley-Hamilton

2.3 Endomorphismes d'un espace hermitien

- Spectre d'une matrice hermitienne, unitaire, anti-hermitienne

2.4 Matrices stochastiques

- Théorème de Perron-Frobenius dans un cas simple (**DVT 1**)
- Application aux chaînes de Markov (**DVT 1**)

3 Localisation et calcul approché

3.1 Localisation

- Théorème de Gerschgorin
- Exemple : matrice du laplacien
- Rayon spectral, lien avec la norme 2
- Application : soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices hermitiennes. On suppose que (e^{A_k}) converge. Alors (A_k) est une suite bornée.
- Proposition : $B^k \rightarrow 0$ ssi $\rho(B) < 1$ ss'il existe une norme matricielle telle que $\|B\| < 1$. (**DVT 2**)
- Proposition : soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$ et $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{C})$. La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie à partir de $x_0 \in \mathbb{C}^n$ par $Mx_{k+1} = Nx_k + b$ converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.
- Application : convergence de la méthode itérative de Jacobi (**DVT 2**)

3.2 Calcul approché

- Méthode de la puissance : algorithme, théorème de convergence
- Méthode de la puissance inverse

155 – Exponentielle de matrices. Applications.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Stéphane GOURMELEN and Hicham WADI. *Équations différentielles - Théories, algorithmes et modèles*. Ellipses, 2008 [27]
-

1 Définition de $\exp(A)$ et premières propriétés

- Lemme : Soit $A \in M_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente pour toute norme matricielle.
- Définition : Pour $A \in M_n(K)$, on définit $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.
- Exemples : exponentielle d'une matrice nilpotente, d'une matrice diagonale
- Exemple : l'exponentielle d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure.
- Proposition : $\exp(A)$ est un polynôme en A .
- Corollaire : A et $\exp(A)$ commutent.
- Proposition : si $A = P^{-1}BP$, alors $\exp(A) = P^{-1}\exp(B)P$.
- Corollaire : si A est diagonalisable, alors $\exp(A)$ est diagonalisable.
- Proposition : $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$.
- Corollaire : $\exp(A) \in GL_n(K)$
- Corollaire : $\exp(M_n(\mathbb{R})) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$ et $\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

2 Calcul pratique de $\exp(A)$

- Remarque : on a vu qu'on savait calculer l'exponentielle d'une matrice nilpotente ou diagonalisable.
- Exemple : calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (interpolation de Lagrange ou matrice de passage).
- Théorème : soit $A \in M_n(K)$ telle que χ_A soit scindé sur K . On écrit la décomposition de Dunford de $A = D + N$ avec $D, N \in M_n(K)$, D diagonalisable, N nilpotente, D et N commutant entre elles. Alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est donnée par :

$$\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n).$$

- Application : Soit $A \in M_n(K)$ telle que χ_A soit scindé sur K . Alors A est diagonalisable ssi $\exp(A)$ est diagonalisable.
- Contre-exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais $\exp(A) = I_2$.
- Théorème : formule en fonction des projecteurs de la décomposition en sous-espaces caractéristiques.

- Exemple : calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3 Propriétés analytiques

3.1 Continuité et dérivabilité

- Théorème : $\exp : M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $M_n(K)$ et pour $X \in M_n(K)$:

$$d(\exp)(X) : H \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k-1} X^i H X^j.$$

- Application : soit $\varphi : I \rightarrow M_n(K)$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $t \in I$, $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$ commutent. Alors pour tout $t \in I$, $(e^\varphi)'(t) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}$.
- Application : soit $A, B \in M_n(K)$. Alors A et B commutent ssi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$.
- Corollaire : $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, $(e^A)^p = e^{pA}$.

3.2 Application à la théorie des équations différentielles

Soit $A \in M_n(K)$ et $y_0 \in K^n$. On considère le système d'équations différentielles linéaires sur $\mathbb{R}$ $y'(t) = Ay(t)$ d'inconnue y à valeurs dans K^n , avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

- Théorème : Le système admet une unique solution, donnée par $y : t \mapsto e^{tA}y_0$.
- Application : on suppose A diagonalisable, et on note $(e_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de vecteurs propres associée aux valeurs propres $\lambda_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Alors la famille $(e^{\lambda_j t} e_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forme un système fondamental de solutions du système $y'(t) = Ay(t)$.
- Exemple : Déterminer un système fondamental de solutions pour $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Théorème : 0 est un point d'équilibre du système $y'(t) = Ay(t)$ asymptotiquement stable ssi toute valeur propre de A a une partie réelle strictement négative ; stable ssi toute valeur propre de A a une partie réelle strictement négative, ou nulle et non défective ; instable ss'il existe une valeur propre de A de partie réelle strictement positive.
- Exemple : stabilité de 0 pour le système précédent.

4 Application exponentielle entre plusieurs sous-ensembles de $M_n(K)$

4.1 Exponentielle de matrices diagonalisables

- Proposition : Soit $A, B \in M_n(K)$ deux matrices diagonalisables de spectre réel. On suppose que $\exp(A) = \exp(B)$. Alors $A = B$.
- Contre-exemple : les matrices $2i\pi I_n$ et 0 sont diagonales et ont la même exponentielle sans être égales.

4.2 Surjectivité de l'exponentielle sur $GL_n(\mathbb{C})$

- Théorème : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective. Plus précisément, si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(Q(A)) = A$. (**DVT 1**)
- Application : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
- Application : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ est $p \geq 1$. Il existe $X \in GL_n(\mathbb{C})$ un polynôme en A tel que $X^p = A$.

4.3 Exponentielle de matrices hermitiennes et symétriques

- Théorème : $\exp : H_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme. (**DVT 2**)
- Théorème : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
- Application : décomposition polaire (plus précise)

156 – Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Roger MANSUY and Rached MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022 [33]
-

1 Endomorphismes trigonalisables

- Définition : endomorphisme trigonalisable
- Exemple : $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est trigonalisable, mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Théorème : u est trigonalisable sur K ssi u admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$.
- Corollaire : tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ -ev est trigonalisable.
- Corollaire : trace et déterminant
- "Contre-exemple" sur $\mathbb{R}$.
- Définition : rayon spectral
- Théorème : $B^k \rightarrow 0$ ssi $\rho(B) < 1$ ss'il existe une norme matricielle telle que $\|B\| < 1$. (**DVT 1**)
- Application aux méthodes itératives (cv ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$) et à la méthode de Jacobi (convergente pour les matrices à diagonale strictement dominante) (**DVT 1**)
- Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note λ_j les valeurs propres de A . Si pour tout j , $\Re(\lambda_j) < 0$, alors il existe des constantes $a, C > 0$ telles que $\|e^{tA}\| \leq Ce^{-at}$ pour tout $t \geq 0$.
- Remarque : on se sert de cette proposition pour établir les théorèmes de stabilité dans la théorie des équations différentielles.
- Théorème : trigonalisation simultanée

2 Endomorphismes nilpotents

- Définition : endomorphisme nilpotent et indice de nilpotence
- Proposition : polynôme minimal et caractéristique d'un endomorphisme nilpotent
- Corollaire : un endomorphisme nilpotent est trigonalisable et sa matrice dans une base est triangulaire supérieure strict.
- Proposition : caractérisation des endomorphismes nilpotents par la trace (**DVT 2**)
- Application : un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini ssi il est d'exposant fini. (**DVT 2**)
- Proposition : antécédent par l'exponentielle de $I_n + N$ où N est nilpotent

3 Intervention en réduction des endomorphismes

3.1 Décomposition de Dunford

- Théorème : décomposition de Dunford
- Exemple : calcul de la décomposition de Dunford de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- Corollaire : décomposition de Dunford de $\exp(A)$.
- Application : surjectivité de l'exponentielle matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$

3.2 Réduction de Jordan

- Théorème : Jordan pour les nilpotents
- Remarque : cette forme réduite coïncide avec la forme réduite de Frobenius
- Théorème : Jordan général
- Théorème : nombre de blocs de Jordan et noyaux itérés
- Trouver une bonne application...

4 Application à la résolution de systèmes linéaires

- Exemple : les matrices de transvections sont des matrices triangulaires
- Théorème : décomposition LU
- Application : complexité de la résolution d'un système linéaire lorsqu'on dispose déjà de la décomposition LU
- Théorème : décomposition de Cholesky

157 – Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Roger MANSUY and Rached MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022 [33]
 - Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Analyse matricielle*. EDP Sciences, 2019 [37]
-

1 Matrices symétriques, matrices hermitiennes : définitions, réduction et caractérisations

1.1 Définitions et structure

- Définition : matrice symétrique réelle, matrice hermitienne
- Définition : matrice symétrique (hermitienne) positive, définie positive (avec le produit scalaire ou hermitien)
- Proposition : $S_n(\mathbb{R})$ et $H_n(\mathbb{C})$ sont des sev de $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.
- Proposition : $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall P \in M_n(\mathbb{R}), P^T A P \in S_n(\mathbb{R})$.

1.2 Théorème spectral et localisation du spectre

- Le spectre d'une matrice symétrique ou hermitienne est réel
- Lemme : les sep d'une matrice symétrique ou hermitienne sont orthogonaux.
- Théorème : Toute matrice symétrique ou hermitienne est diagonalisable en base orthonormée.
- Exemple : la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable de valeurs propres ± 1 .
- Contre-exemple : une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable : ...
- Théorème : Courant-Fischer
- Corollaire : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A \mapsto \lambda_k(A)$ est continue de $H_n(\mathbb{C})$ ou $S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

1.3 Caractérisations des matrices (définies) positives

- Théorème : caractérisation des matrices symétriques (définies) positives par le spectre.
- Théorème : racine carrée d'une matrice symétrique positive.
- Théorème : $\exp : H_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n^{++}(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme. (**DVT 1**)

2 Action par congruence et formes quadratiques réelles

- Définition : forme quadratique associée à une matrice symétrique sur K^n
- Définition : action par congruence de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ par congruence
- Proposition : matrices symétriques congruentes et changement de base

2.1 Théorème de Gauss

- Définition : famille orthogonale
- Théorème de Gauss
- Application : la matrice du laplacien est définie positive

2.2 Signature

- Théorème d'inertie de Sylvester
- Corollaire : critère de Sylvester pour les matrices définies positives
- Application : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
- Proposition : conditions suffisantes d'extrema local

2.3 Classification des coniques

- Théorème d'orthodiagonalisation simultanée
- Application : recherche des extremas de $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
- Application : classification euclidienne des coniques (directions propres)
- Exemple concret dans Ladegaillerie

3 Décompositions matricielles

3.1 Décomposition polaire

- Théorème : décomposition polaire
- Application : enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ (**DVT 2**)
- Application : deux matrices unitairement semblables sont orthogonalement semblables

3.2 Factorisation de Cholesky

- Théorème : factorisation LU
- Théorème : factorisation de Cholesky
- Application : complexité de la résolution d'un système linéaire avec factorisation de Cholesky

158 – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien.

Sources :

- Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
-

1 Adjoint d'un endomorphisme

- Définition
- Aspect matriciel
- Lien entre la matrice de u^* et la matrice de Gram d'une famille
- Adjoint et opérations
- Si F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^*

2 Isométries vectorielles

- Définition, groupe orthogonal
- Lemme : préserve le produit scalaire vs préserve la norme, nécessité de supposer linéaire ? (à voir)
- $O_n(\mathbb{R})$ est compact
- Si F stable par $u \in O(E)$, alors $F^\perp$ stable par u
- Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux
- Application : composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$
- Définition : symétrie orthogonale
- Partie génératrice de $O(E)$ et $SO(E)$ (**DVT 1**)
- Application : factorisation QR par les matrices de Householder

3 Endomorphismes auto-adjoints

- Définition
 - Spectre $\subset \mathbb{R}$
 - Définition de matrice symétrique positive, définie positive
 - Théorème spectral
 - Application 1 : diagonalisation simultanée
 - Théorème : classification euclidienne des coniques
 - Exemple : direction propre d'une conique euclidienne
 - Application 2 : Racine carrée d'une matrice symétrique positive, définie positive (+ polynôme)
 - Application 3 : Décomposition polaire
 - Application de la décomposition polaire : unitairement semblable implique orthogonalement semblable
 - Application de la décomposition polaire : enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ (**DVT 2**)
- Possibilité d'ajouter Cholesky et d'autres applications à la partie génératrice

159 – Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Roger MANSUY and Rached MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022 [33]
-

1 Dual d'un espace vectoriel

1.1 Base duale et antéduale

- Définition : base duale
- Proposition : formule des coordonnées selon la base duale ($\varphi = \sum_i \varphi(e_i)e_i^*$).
- Exemple : polynômes
- Proposition / Définition : existence de base anté-duale
- Exemple : polynômes

1.2 Isomorphismes entre un espace et son dual

- Théorème : isomorphisme canonique entre E et son bidual E^{**}
- Théorème de Riesz (cadre euclidien)
- Exemple : Formes linéaires de $M_n(\mathbb{R})$
- Application : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ (**DVT 1**)

2 Orthogonalité et sous-espaces vectoriels

- Définitions : orthogonal d'une partie de E , de E^* .
- Proposition : théorèmes opératoires
- Chercher quelques contre-exemples
- Exemple : hyperplan = orthogonal d'une forme linéaire non nulle = noyau
- Proposition : dimension d'une intersection d'hyperplans
- Remarque : interprétation en terme de système linéaire
- Application : déterminer les équations définissant un sev donné par une base
- Exemple explicite
- Application : dans le plan projectif, deux droites sont toujours sécantes.
- Proposition : Formules des dimensions

3 Dualité et formes quadratiques

- Théorème : orthogonalité d'une forme quadratique
- Théorème de Gauss version formes linéaires
- Rang et signature (théorème de Sylvester version formes linéaires ?)
- Formes de Hankel (**DVT 1** possible)

4 Dualité et applications linéaires

- Transposée
- Proposition : transposée et opérations
- Proposition : représentation matricielle
- Application : Jordan pour les nilpotents
- Théorème de Frobenius (**DVT 2**)

161 – Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

Sources :

- Aviva SZPIRGAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
 - Yves LADEGAILLERIE. *Géométrie - Affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, 2003 [31]
 - Michèle AUDIN. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006 [3]
-

1 Distance à une partie

- Théorème de projection sur un convexe fermé d'un espace vectoriel euclidien
- Application à la caractérisation d'un convexe fermé comme intersection des hyperplans le contenant
- Application : détermination de l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$
- Définition d'une matrice de Gram
- Proposition : $G(v_1, \dots, v_n)$ est symétrique positive, et est définie si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre (**DVT 1**)
- Proposition : Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une base d'un sev F de E et $x \in E$. Alors $d(x, F)^2 = \frac{G(x, v_1, \dots, v_p)}{G(v_1, \dots, v_p)}$. (**DVT 1**)
- Corollaire (inégalité de Hadamard) (**DVT 1**)

2 Isométries vectorielles

- Définition, groupe orthogonal
- Lemme : préserve le produit scalaire vs préserve la norme, nécessité de supposer linéaire ? (à voir)
- $O_n(\mathbb{R})$ est compact
- Si F stable par $u \in O(E)$, alors $F^\perp$ stable par u
- Théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux
- Application : composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$
- Définition : symétrie orthogonale
- Partie génératrice de $O(E)$ et $SO(E)$ (développement possible)
- (Application : factorisation QR par les matrices de Householder)

3 Isométries affines

3.1 Isométries préservant une partie

- Recopier le Szpirglas
- Isométries affines conservant le tétraèdre régulier et application au nombre de coloriage (**DVT 2**)

3.2 Action du groupe des isométries affines sur les coniques du plan euclidien

- Définition : conique
- Lemme : l'image d'une conique par une application affine est une conique
- Proposition / définition : directions principales d'une conique
- Théorème : classification euclidienne des coniques
- Exemple : montrer que $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ décrit une parabole, et en donner les axes principaux et le sommet.
- Théorème : toute conique propre différente d'un cercle peut être décrite par foyer, directrice et excentricité

162 – Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Sources :

- Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Aviva SZPIRGAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
 - Francis FILBET. *Analyse numérique*. Dunod, 2009 [19]
 - Jean-Denis EIDEN. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009 [14]
-

1 Systèmes linéaires et pivot de Gauss

- Définition : système linéaire
- Définition : solution, système compatible, rang
- Définition : système de Cramer
- Théorème : formules de Cramer
- Exemple concret : matrice 2×2 ou 3×3 / méthode de variation de la constante
- Remarque : complexité
- Théorème de Rouché-Fontené
- Proposition : structure et dimension de l'espace des solutions
- Définition : action à gauche
- Définition : opérations élémentaires
- Définition : matrice échelonnée en lignes
- Théorème (du pivot de Gauss) : algorithme dans le plan ou en annexe
- Proposition : complexité

2 Conséquences théoriques

- Parties génératrices de $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$
- Calcul des groupes dérivés
- Connexité par arcs

3 Utilisation de systèmes linéaires en géométrie

- Définition : coordonnées barycentriques
- Proposition : passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques
- Proposition : CNS d'alignements de trois points en coordonnées barycentriques
- Application : Par 5 points (vérifiant une condition de non alignement) passe une unique conique (**DVT 1**)

4 Description de sous-espaces vectoriels

- Déterminer une base de $F \cap G$
- Déterminer une base de $F + G$
- Décrire un sev par un système d'équations plutôt que par une base

5 Résolution de systèmes linéaires par méthodes itératives

- Principe d'une méthode itérative
- Définition : convergence d'une méthode itérative
- Critère de convergence (**DVT 2**)
- Application : convergence de la méthode de Jacobi (**DVT 2**)

170 – Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Sources :

- Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Aviva SZPIRGAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Philippe CALDERO and Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2017 [11]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
-

1 Formes quadratiques : définitions et premières propriétés

1.1 Vocabulaire des formes quadratiques

- Définition d'une forme quadratique. Forme polaire associée. Un exemple (en dimension infinie), exemple du produit scalaire. Forme linéaire associée
- Rang, noyau, caractère dégénéré. Exemple
- Cône isotrope. Exemple
- Exemple de la forme quadratique trace sur $M_n(K)$

1.2 Aspect matriciel et changement de base

- Matrice d'une forme quadratique dans une base
- Formule du changement de base
- Action de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ par congruence
- Le rang est un invariant partiel sous l'action
- Définition du discriminant (invariant partiel)

1.3 Orthogonalité

- Famille orthogonale, partie orthogonale
- Théorème de Gauss
- Application : la matrice du Laplacien est définie positive

2 Classification des formes quadratiques

- Classification sur $\mathbb{C}$
- Théorème d'inertie de Sylvester (classification sur $\mathbb{R}$)
- Exemple : signature de la forme quadratique trace sur $M_n(\mathbb{R})$
- Application : caractérisation des matrices définies positives via les mineurs fondamentaux. Corollaire : décomposition LU et de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive (à travailler)
- Application de la signature : Formes de Hankel (**DVT 1**)
- Classification sur les corps finis. Application ? (loi de réciprocité quadratique)

3 Groupe orthogonal

- Définition du groupe orthogonal associé à une forme quadratique q définie positive. Pdv stabilisateur.
- Exemple (Szpirglas)
- Symétrie orthogonale, réflexion orthogonale
- $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements. (**DVT 2**)
- Centres
- Application : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

171 – Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

Sources :

- Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Philippe CALDERO and Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2017 [11]
 - Jean-Denis EIDEN. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009 [14]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021 [39]
-

1 Formes quadratiques réelles

- Définition, forme polaire associée
- Exemple : différentielle seconde, formule concrète
- Définition : famille orthogonale
- Théorème d'existence de base orthogonale
- Algorithme de Gauss
- Exemple
- Théorème d'inertie de Sylvester
- Exemple : trace sur $M_n(\mathbb{R})$
- Application : critère de Sylvester pour les matrices définies positives
- Application : formes de Hankel (**DVT 1**)
- Application : conditions suffisantes d'extrema local
- Théorème d'orthodiagonalisation simultanée
- Application : recherche des extremas de $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

2 Coniques

2.1 Définition algébrique et classifications

- Définition algébrique d'une conique
- Exemple
- Formes quadratiques associées à une conique
- Proposition : soit $\mathcal{C}$ une conique de formes quadratiques $q(x, y)$ et $Q(x, y, z)$. Alors en plongeant le plan affine $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^3$ en le plan d'équation $z = 1$, on a $\mathcal{C} = \{Q(x, y, z) = 0\} \cap \{z = 1\}$.
- Théorème de classification affine des coniques
- Exemples concrets : $x^2 + 2xy - y^2 - 4x = 0$, $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y + 3 = 0$
- Proposition / définition : définition des directions principales d'une conique
- Théorème de classification euclidienne des coniques
- Exemple : montrer que $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ décrit une parabole, et en donner les axes principaux et le sommet.

2.2 Points de vue géométriques

- Définition : coordonnées barycentriques
- Proposition : condition d'alignement
- Théorème : par 5 points dont 4 quelconque sont non alignés passe une unique conique (**DVT 2**)
- Théorème : toute conique propre différente d'un cercle peut être décrite par foyer, directrice et excentricité

181 – Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Sources :

- Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Jean-Denis EIDEN. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009 [14]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
 - Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, and Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS mathématiques volume 1*. Cassini, 2019 [20]
 - Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005 [4]
-

1 Barycentre et coordonnées barycentriques

- Définition du barycentre
- Associativité du barycentre
- Barycentre et application affine
- Coordonnées barycentriques
- Proposition : expression des coordonnées barycentriques comme déterminant, interprétation en terme d'aire
- Exemple : coordonnées barycentriques de points particuliers du triangle
- Proposition : 3 points du plan sont-ils alignés ?
- Exemple : points alignés du triangle
- Application : par 5 points vérifiant une certaine condition de non-alignement passe une unique conique (**DVT 1**)

2 Ensemble convexe

- Définition
- Exemple : sous-espaces affines, demi-plans, convexes de $\mathbb{R}$, boules
- Proposition : l'épigraphe d'une fonction est convexe ssi f est convexe
- Proposition : image d'un convexe par une application affine
- Proposition : intersection de convexes
- Corollaire : le sup de fonctions convexes est convexe
- Application : soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. L'application $A \mapsto \lambda_{\max}(A)$ est convexe.
- Théorème de projection sur un convexe fermé
- Exemple : distance à un sous-espace vectoriel (voir le cours de Karine)
- Définition : point extrémal d'un convexe
- Proposition : points extrémaux et applications affines
- Application : une isométrie affine fixant le tétraèdre régulier envoie les sommets du tétraèdre sur ses sommets.

3 Enveloppe convexe

- Définition : enveloppe convexe
- Exemple : tétraèdre régulier
- Théorème de Gauss-Lucas
- Exemple : si P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ qui admet deux racines distinctes et si $P''|P$, alors il est scindé à racines simples et ses racines sont alignées dans $\mathbb{C}$.
- Théorème de Carathéodory
- Corollaire : enveloppe convexe d'un compact (**DVT 2**)
- Proposition : frontière d'un convexe ?
- Ecriture d'un convexe fermé comme intersection des demi-espaces le contenant (**DVT 2**)
- Application : l'enveloppe convexe de $O(E)$ est la boule unité fermée pour la norme subordonnée à la norme euclidienne de E euclidien (**DVT 2**)

190 – Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Sources :

- Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
 - Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, and Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS mathématiques volume 6*. Cassini, 2022 [22]
 - Olivier GARET and Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. Ellipses, 2011 [23]
-

1 Méthodes élémentaires de dénombrement

- Méthode : pour déterminer le cardinal d'un ensemble, on peut le mettre en bijection avec un ensemble de cardinal connu
- Exemple : calcul de $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition de n (bijection issue du théorème d'isomorphisme chinois sur les groupes des inversibles)
- Application : établissement de la formule de Burnside, cf 3me partie
- Formule du produit, de la somme, application au dénombrement par calcul du nombre de choix
- Exemple : calcul du cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$
- Proposition : nombre de fonctions, nombre de permutations, nombre d'injections
- Nombre de parties à p éléments, nombre de parties
- (Nombre de solutions d'équations entières)
- Formule du crible
- Application : nombre de surjections
- Application : nombre de permutations sans points fixes
- Application : Soit $a, b \in \mathbb{F}_q$. Il existe $(x, y) \in \mathbb{F}_q$ tels que $ax^2 + by^2 = 1$.

2 Utilisation de séries génératrices

- Définition : série génératrice
- Remarque : les séries génératrices permettent de transformer une relation de récurrence en une équation fonctionnelle
- Exemple : nombre de partitions d'un entier en parts fixées
- Exemple : permutations zigzagantes (résolution par équation fonctionnelle à la fin) (**DVT 1**)
- (Exemple : variance du nombre moyen de cycles d'une permutation aléatoire)

3 Utilisation d'actions de groupe

3.1 Équation aux classes

- Définition : orbites et stabilisateurs d'une action de groupe
- Théorème : relation orbites-stabilisateurs
- Théorème : équation aux classes
- Application : centre d'un p -groupe
- Application : théorème de Cauchy
- Application : endomorphismes diagonalisables sur les corps finis (**DVT 2**)

3.2 Formule de Burnside

- Définition : fixateur
- Théorème : Formule de Burnside
- Théorème : groupe d'isométrie du tétraèdre régulier
- Application : dénombrement du nombre de coloriages du tétraèdre à isométrie positive près
- Application : probabilité que deux éléments de $GL_2(\mathbb{F}_q)$ commutent

191 – Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Sources :

- Aviva SZPIRGAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009 [43]
 - Jean-Denis EIDEN. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009 [14]
 - Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009 [28]
 - Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024 [29]
 - Yves LADEGAILLERIE. *Géométrie - Affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, 2003 [31]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algèbre*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
-

1 Utilisation de l'algèbre linéaire

1.1 Des notions linéaires aux notions affines

- Définition : espace affine
- Définition : application affine
- Application : théorème de Thalès

1.2 De la notion de base à la notion de repère

- Définition : repère affine
- Définition : coordonnées barycentriques
- Proposition : trois points du plan sont alignés ssi déterminant = 0
- Application : coniques (**DVT 1**)
- (Application : alignement des points particuliers du triangle)

1.3 Dimension et intersections

- Définition : espace projectif
- Proposition : deux droites distinctes du plan projectif sont sécantes en un unique point.

2 Utilisation de l'algèbre bilinéaire

2.1 Structure euclidienne et distances

- Théorème de projection sur un convexe fermé
- Proposition : écriture d'un convexe fermé comme intersection des demi-plans le contenant
- Application : enveloppe convexe de $O(E)$
- Définition : matrice de Gram
- Proposition : distance et matrice de Gram
- Application : inégalité de Hadamard
- Exemple : distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$
- Théorème de réduction des isométries

2.2 Classification des formes quadratiques

- Théorème de classification affine des coniques
- Exemples concrets : $x^2 + 2xy - y^2 - 4x = 0$, $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y + 3 = 0$
- Proposition / définition : définition des directions principales d'une conique
- Théorème de classification euclidienne des coniques
- Exemple : montrer que $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ décrit une parabole, et en donner les axes principaux et le sommet.

3 Utilisation de la théorie des groupes

3.1 Identifier des invariants

- Définition de l'angle non orienté
- (Définition du birapport)

3.2 Exhiber et utiliser des parties génératrices

- Partie génératrice de $O(E)$
- Partie génératrice de $SL_2(\mathbb{Z})$, application groupe paveur

3.3 Identifier un groupe d'isométries

- Isométries du tétraèdre (**DVT 2** possible)
- Application : nombre de coloriage

4 Utilisation de la théorie des corps

- Définition : nombre constructible à la règle et au compas
- Proposition : quelques constructions utiles
- Proposition : l'ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas est un sous-corps de $\mathbb{R}$
- Théorème de Gauss-Wantzel
- Application : constructibilité des polygones réguliers (**DVT 2**)

201 – Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Sources :

- Francis HIRSCH and Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2000 [30]
 - Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024 [32]
 - Haim BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996 [9]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
-

1 Espaces de fonctions continues sur un compact

- Espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty)$ où K est un espace métrique compact
- Proposition : complétude (intérêt pour montrer des existences)
- Corollaire : une limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue
- Application : théorème de Cauchy-Lipschitz par un point fixe
- Proposition : théorème de Dini (améliorer la convergence simple en convergence uniforme)
- Exemple : approximation polynomiale uniforme de $t \mapsto \sqrt{t}$
- Théorème de Stone-Weierstrass pour les polynômes (par les polynômes de Bernstein)
- Contre-exemple sur $\mathbb{R}$ entier
- Contre-exemple pour le cas complexe (fonctions holomorphes)
- Théorème de Fejer continu (**DVT 1**)
- Application : densité des polynômes trigonométriques dans $(\mathcal{C}_{2\pi}^0, \|\cdot\|_\infty)$.

2 Espaces L^p

- Définition : espace L^p (mesure abstraite)
- Proposition : inégalité de Hölder
- Application : si μ est une mesure finie, $L^\infty \subset \dots \subset L^2 \subset L^1$
- Proposition : $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $1 \leq p \leq \infty$
- Théorème de Riesz-Fischer (complétude)
- Théorème : densité des fonctions $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$
- Application : continuité des translations dans L^p
- Application / théorème : densité des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$
- Exemple : construction de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ utiles (fonctions plateaux)
- Application / théorème : théorème de Fejer L^p (**DVT 1**)

3 Espace de Schwartz pour la transformée de Fourier

- Définition : espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$
- Exemple : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dans $S(\mathbb{R}^d)$
- Proposition : stabilités de l'espace de Schwartz : espace vectoriel, dérivation, produit, multiplication par un polynôme
- $S(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
- Définition : transformée de Fourier d'une fonction L^1
- Théorème : stabilité par transformée de Fourier
- Théorème : formule d'inversion sur $S(\mathbb{R}^d)$.
- Application : soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$. L'équation $\Delta u - u = \varphi$ admet une unique solution dans $S(\mathbb{R}^d)$.
- Théorème : $S(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
- Remarque : on utilise ce fait pour obtenir la formule d'inversion de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

4 Espaces de Hilbert et résolution d'équations fonctionnelles

4.1 Théorèmes d'existence

- Définition
- Exemple : $L^2(\mu)$, $\mathbb{R}_n[X]$
- Théorème de projection sur un convexe fermé non vide
- Exemple : séries de Fourier dans $L^2(]0, 2\pi[)$
- Théorème de Riesz
- Exemple : gradient
- Application : représentation des fonctions lipschitziennes (**DVT 2**)

4.2 Notion de base hilbertienne

- Définition : base hilbertienne
- Exemple : monômes trigonométriques
- Théorème : isométrie avec l^2
- Application : espace de Shannon, théorème d'échantillonnage de Shannon

4.3 Application à la résolution d'une équation elliptique

- Définition de $H^1(]0, 1[)$ muni de son produit scalaire
- Théorème : $H^1(]0, 1[)$ est un espace de Hilbert
- Proposition : tout élément de $H^1(]0, 1[)$ admet un représentant continu.
- Définition de $H_0^1(]0, 1[)$ comme adhérence des fonctions C_c^∞
- Proposition : caractérisation comme les fonctions nulles au bord
- Théorème : inégalité de Poincaré
- Définition de solution forte / faible de l'EDO $-(\alpha u')' + \gamma u = f$ avec $u(0) = u(1) = 0$ (forte : coefs continus / C^1 / faible : coefs L^∞)
- Théorème : existence et unicité d'une solution faible. Celle-ci est forte si f, α, γ sont continues / C^∞ .

203 – Utilisation de la notion de compacité.

Sources :

- Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
 - Francis HIRSCH and Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2000 [30]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
 - Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
-

- Énoncé de la propriété de Borel-Lebesgue et celle de Bolzano-Weierstrass

1 Fonctions continues et compacité

1.1 Théorèmes d'existence

- Théorème des bornes atteintes
- Application à la recherche d'extrema
- Application au théorème de Rolle
- Théorème de point fixe compact (**DVT 1**)

1.2 Acquisition d'uniformité

- Théorème de Heine
- Application 1 : théorème de Weierstrass
- (Application 2 : une fonction continue est limite uniforme de fonctions en escalier. Définition de l'intégrale de Riemann.)
- Application 3 : calcul d'une différentielle (flot)
- Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale (on utilise Borel-Lebesgue dans la preuve)
- Exemple : transformée de Laplace
- Définition de loc lipschitz
- Equivalence loc lipschitz $\Leftrightarrow$ lipschitz sur tout compact
- Corollaire : sortie de tout compact, exemple

2 Compacité dans les espaces vectoriels normés

2.1 Espaces vectoriels de dimension finie

- Équivalence des normes
- $(O_n(\mathbb{R}))$
- Théorème de Riesz

2.2 Espaces de Hilbert

- Définition de la convergence faible
- Quelques propriétés
- Théorème de Banach-Alaoglu

2.3 Théorème d'Ascoli

- Théorème d'Ascoli
- Application : théorème de Cauchy-Peano (**DVT 2**)

204 – Connexité. Exemples d'applications.

Sources :

- Hervé QUEFFÉLEC. *Topologie*. Dunod, 2025 [34]
 - Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. Calvage et Mounet, 2022 [12]
 - Patrice TAUVEL. *Analyse complexe pour la licence 3*. Dunod, 2020 [44]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
-

1 Notion de connexité

1.1 Définition et premières propriétés

- Définition de la connexité
- Exemples : connexes de $\mathbb{R}$
- Caractérisation par application continue
- Propriété de connexité et réunion, adhérence, produit
- Propriété image d'un connexe par une application continue
- Application : TVI

1.2 Connexité par arcs

- Définition
- cpa implique connexe. Réciproque dans un evn
- Exemples : graphe, ensembles convexes, étoilés, sphères
- Application : Darboux (on utilise un convexe)
- Application : si $f' = 0$, alors f est constante (IAF avec cpa)
- Exemple : adhérence du graphe de $\sin(1/x)$ connexe mais pas connexe par arcs
- Exemple : $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

2 Composantes connexes

- Définition, relation d'équivalence
- Application : structure des ouverts de $\mathbb{R}$
- Exemple : composantes connexes de $\mathbb{Q}$
- Exemple : $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes
- Exemple : composantes connexes de K^c où K est un compact
- Application : disques de Gerschgorin et composantes connexes (**DVT 1**)
- Effet d'un homéomorphisme sur les composantes connexes
- Application : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes

3 Application à l'extension de propriétés

3.1 Analyse complexe

- Définition de l'indice
- Unicité du prolongement analytique
- Principe du maximum / des zéros isolés
- Théorème de Runge (**DVT 2**)

3.2 Équations différentielles

- Unicité dans Cauchy-Lipschitz

205 – Espaces complets. Exemples et applications.

Sources :

- Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024 [32]
 - Francis HIRSCH and Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2000 [30]
 - Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2025 [17]
 - Haim BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996 [9]
-

1 Espaces complets et suites

1.1 Définition et premiers exemples

- Définition d'espace complet, d'espace de Banach (par les suites de Cauchy)
- Premiers exemples : evn de dimension finie (par Bolzano-Weierstrass), $(\mathcal{C}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ avec Y complet (exemple : dual topologique)
- Théorème de Riesz-Fischer (complétude des espaces L^p)

1.2 Convergence de suites et de séries

- Application : définition de l'intégrale de Riemann
- Propriété de convergence absolue
- Application : définition de l'exponentielle matricielle
- Propriété de convergence normale
- Exemple :
- Application : convergence normale des séries entières sur tout disque inclus dans le disque ouvert de convergence

1.3 Théorème de point fixe

- Théorème de point fixe de Banach-Picard
- Application : théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
- Application : théorème d'inversion locale

2 Espaces de Banach et applications linéaires continues

2.1 Prolongement d'applications linéaires continues

- Théorème de prolongement
- Application : théorème d'Ascoli
- Application : transformation de Fourier sur L^2 (cf III)

2.2 Applications du théorème de Baire

- Théorème de Baire
- Théorème de Banach-Steinhaus
- Théorème de l'application ouverte (**DVT 1**)
- Théorème d'isomorphisme de Banach
- Application : non-surjectivité de la TF de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (**DVT 1**)

3 Espaces de Hilbert

- Théorème de projection sur un convexe fermé non vide
- Contre-exemple sans complétude : $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ et $F = \{f \in H \mid \int_{1/2}^1 f = 0\} = \mathbf{1}_{[1/2, 1]}^\perp$.
- Application : séries de Fourier, inégalité de Bessel
- Théorème de représentation de Riesz
- Application : définition de l'adjoint
- Application : représentation des fonctions lipschitziennes (**DVT 2**)
- Transformée de Fourier L^2
- (Application : résolution d'une EDP)

Sources :

- Vincent RIVOIRARD and Gilles STOLTZ. *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2012 [36]
 - Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024 [32]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
 - Mohammed EL AMRANI. *Calcul différentiel*. Ellipses, 2019 [16]
-

1 Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

- Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d$
- Théorème : équivalence des normes
- Contre-exemple : $\mathcal{C}^0([0, 1])$ avec $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$
- Corollaire : compact $\Leftrightarrow$ fermé-borné
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Corollaire : un evn de dim finie est complet
- Proposition : soit E un evn et F un sev de dimension finie. Alors F est fermé.
- Théorème de Riesz (caractérisation de la dimension finie par la compacité de la boule unité)
- Exemple : boule unité de $\mathcal{C}^0([0, 1])$.
- Continuité des applications linéaires automatique
- Contre-exemple : tout espace vectoriel de dimension infinie admet des formes linéaires non continues

2 Calcul différentiel en dimension finie

- Définition : gradient, jacobienne, jacobien, hessienne
- Théorème : CS des extrema libres locaux avec le spectre de la hessienne
- Définition : sous-variété, espace tangent
- Théorème des extrema liés (**DVT 1**)
- Exemple : Chercher les extrema de $f : (x, y, z) \mapsto x + z$ sous les contraintes $\|(x, y, z)\| = 1$ et $y = z$.

3 Équations différentielles

- Théorème : dimension et structure de l'espace des solutions d'une EDLH
- Définition : Wronskien
- Application : zéros d'une EDO linéaire d'ordre 2
- Exemple : équivalent de la suite des zéros de l'EDO $x''(t) + tx(t) = 0$
- Théorème de Cauchy-Peano
- Contre-exemple en dimension finie
- Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note λ_j les valeurs propres de A . Si pour tout j , $\Re(\lambda_j) < 0$, alors il existe des constantes $a, C > 0$ telles que $\|e^{tA}\| \leq Ce^{-at}$ pour tout $t \geq 0$.
- Remarque : on se sert de cette proposition pour établir les théorèmes de stabilité dans la théorie des équations différentielles.

4 Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Soit $A \in GL_d(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^d$. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation linéaire $Ax = b$ à l'aide d'une méthode itérative. On écrit $A = M - N$ avec M "facile" à inverser, et on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence à partir de $x_0 \in \mathbb{C}^n$ par $Mx_{k+1} = Nx_k + b$.

- Lemme : soit $\bar{x}$ la solution de $Ax = b$. Alors la suite des erreurs $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n - \bar{x})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \geq 0$, $e_{n+1} = M^{-1}Ne_n$.
- Théorème : soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors $A^k \rightarrow 0$ ssi $\rho(A) < 1$ ss'il existe une norme subordonnée telle que $\|A\| < 1$.
- Théorème : convergence de la méthode de Jacobi.

5 Vecteurs gaussiens et application au test du χ^2 d'adéquation

5.1 Vecteurs gaussiens

- Définition : vecteur gaussien (par combinaisons linéaires de ses composantes)
- Contre-exemple : $(Z, \varepsilon Z)$, où $Z \sim N(0, 1)$ et $\varepsilon \sim R(1/2)$ n'est pas un vecteur gaussien. Il ne suffit pas que chaque composante suive une loi normale.
- Définition : vecteur moyen, matrice de covariance
- Théorème : fonction caractéristique d'un vecteur gaussien
- Proposition : linéarité
- Proposition : caractérisation de l'indépendance
- Contre-exemple : pour le vecteur $(Z, \varepsilon Z)$, on a $\text{Cov}(Z, \varepsilon Z) = 0$ mais Z et Z et εZ ne sont pas indépendants.
- Théorème central limite multiD
- Définition : loi du χ^2
- Lemme : la loi du χ^2 ne dépend que de $\|m\|$ et de d
- Théorème de Cochran (**DVT 2**)

5.2 Test du χ^2 d'adéquation

- Lemme : soit X une va de loi p sur un ensemble fini $\llbracket 1, d \rrbracket$. Alors p est entièrement caractérisée par le vecteur $(\mathbb{P}(X = 1), \dots, \mathbb{P}(X = d))$, et la somme des coordonnées de ce vecteur vaut 1.

Soit $p = (p_1, \dots, p_d)$ une loi sur l'ensemble fini $\llbracket 1, d \rrbracket$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires iid de loi p . Soit p^{ref} une loi telle que $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, p_i^{\text{ref}} > 0$.

On cherche à créer, à partir de l'observation de $(X_1, \dots, X_n)$, un test pour les hypothèses $H_0 : p = p^{\text{ref}}$ et $H_1 : p \neq p^{\text{ref}}$.

- Définition de l'estimateur $\hat{p}_n$ et de la distance D_n
- Théorème : sous H_0 , $D_n^2(\hat{p}_n, p^{\text{ref}}) \rightarrow \chi^2(d-1)$ en loi. Sous H_1 , $D_n^2(\hat{p}_n, p^{\text{ref}}) \rightarrow +\infty$ ps. (**DVT 2**)

208 – Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Sources :

- Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024 [32]
 - Haim BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996 [9]
 - Francis HIRSCH and Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2000 [30]
 - Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
-

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Norme

- Définition de norme
- Exemples : norme l^p , L^p , Hilbert
- Définition équivalence de normes
- Exemples et contre-exemples

1.2 Cas de la dimension finie

- Lemme + équivalence des normes en dimension finie
- Corollaires topologiques
- Théorème de Riesz et exemple

2 Applications linéaires continues

2.1 Continuité et norme subordonnée

- Définitions équivalentes de la continuité
- Norme subordonnée
- Exemples et contre-exemples par changement de normes (opérateur à noyau ou opérateur de multiplication, dérivation)

2.2 Formes linéaires continues et dualité

- Définition du dual topologique
- Théorème de représentation de Riesz (cadre Hilbert)
- Application : représentation des applications lipschitziennes (**DVT 1**)
- Déterminations de quelques duaux topologiques : l^p , L^p (admis)
- $L^\infty(X)'$ n'est pas isométrique à $L^1(X)$

3 Espaces de Banach

- Définition
- Exemple : espaces de Hilbert, dual topologique, L^p (Riesz-Fischer)
- Théorème : séries absolument convergentes
- Application : définition de l'exponentielle matricielle, ouverture de $GL_n(\mathbb{C})$
- Théorème de Baire et applications : Banach Steinhaus + dv série de Fourier, théorème de l'application ouverte et non surjectivité de la TF (**DVT2**)

209 – Approximation d’une fonction par des fonctions régulières. Exemples d’applications.

Sources :

- Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Marc BRIANE and Gilles PAGÈS. *Théorie de l’intégration*. Deboeck, 2023 [8]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
-

1 Approximation polynomiale

- Théorème de Weierstrass
- Application : fonction de moments nuls
- Contre-exemple sur $\mathbb{R}$
- Corollaire : soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty([a, b])$. Il existe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que $\forall k \in \mathbb{N}, (P_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$.

2 Approximation par les séries de Fourier

- Définition des coefficients de Fourier et des séries de Fourier d’une fonction périodique
- Exemple : coefficients de Fourier de la fonction qui calcule $\zeta(2k)$
- Théorème de Féjer (continu et L^p) (**DVT 1**)
- Vitesse de convergence
- Application : base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi[)$
- Application bis : base hilbertienne Shannon

3 Régularisation par convolution

- Produit de convolution $L_{\text{loc}}^1 - \mathcal{C}_c^k$
- Définition de suite régularisante
- Application : théorème de Cauchy-Peano (**DVT 2**)
- Lemme : $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$
- Application : continuité des translations
- Théorème de régularisation dans $L^1(\mathbb{R})$
- Application 1 : densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$

213 – Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

Sources :

- Francis HIRSCH and Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2000 [30]
 - Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024 [32]
 - Haim BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996 [9]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
-

1 Structure hilbertienne et complétude

1.1 Espaces préhilbertiens

- Définition : produit scalaire, espace préhilbertien
- Exemple : tout evn de dimension finie (en fixant une base), $L^2(\mu)$, $l^2(\mathbb{N})$
- Proposition : inégalité de Cauchy-Schwarz
- Corollaire : $L^2([0, 1]) \subset L^1([0, 1])$
- Identités de polarisation et du parallélogramme
- (Remarque : on s'en sert pour montrer le théorème de projection sur un convexe fermé)

1.2 Ajout de la complétude

- Définition : espace de Hilbert
- Théorème de Riesz-Fischer : $L^2(\mu)$ est complet
- Théorème de projection sur un convexe fermé non vide, caractérisation de l'angle obtus
- Proposition : continuité de la projection
- Exemple : Sommes partielles des séries de Fourier
- Contre-exemples sans complétude

2 Orthogonalité et dualité

2.1 Orthogonalité

- Définition : orthogonalité, famille orthonormée
- Exemple : famille $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $L^2(]0, 2\pi[)$.
- Théorème de Pythagore
- Corollaire : inégalité de Bessel
- Proposition : $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé
- Proposition : caractérisation du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé + Projection linéaire
- Théorème : $H = F \oplus F^\perp$
- Corollaire : critère de densité
- Application : **chercher**

2.2 Théorème de Riesz

- Théorème de Riesz
- Exemple : définition du gradient
- Proposition (application) : définition de l'adjoint d'un opérateur
- Exemple : Calcul de l'adjoint de l'opérateur de Volterra
- Application : représentation des fonctions lipschitziennes (**DVT 1**)

2.3 Application à la résolution d'une équation elliptique

- Définition de $H^1(]0, 1[)$ muni de son produit scalaire
- Théorème : $H^1(]0, 1[)$ est un espace de Hilbert
- Proposition : tout élément de $H^1(]0, 1[)$ admet un représentant continu.
- Définition de $H_0^1(]0, 1[)$ comme adhérence des fonctions C_c^∞
- Proposition : caractérisation comme les fonctions nulles au bord
- Théorème : inégalité de Poincaré
- Définition de solution forte / faible de l'EDO $-(\alpha u')' + \gamma u = f$ avec $u(0) = u(1) = 0$ (forte : coefs continus / C^1 / faible : coefs L^∞)
- Théorème : existence et unicité d'une solution faible. Celle-ci est forte si f, α, γ sont continues / C^∞ .

3 Notion de base hilbertienne

- Définition : base hilbertienne
- Théorème de Fejer continu et L^2
- Corollaire : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[)$.
- Théorème d'existence de bases hilbertiennes (cas séparable)
- Théorème des bases hilbertiennes : somme dans H , formule de Parseval
- Application : Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ son développement en série entière. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$.
- Remarque : on peut s'en servir pour montrer le principe du maximum.
- Théorème : isomorphisme $H \rightarrow l^2(\mathbb{N})$
- Théorème d'échantillonnage de Shannon (**DVT 2**)

214 – Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Sources :

- Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2003 [41]
 - Mohammed EL AMRANI. *Calcul différentiel*. Ellipses, 2019 [16]
 - Stéphane GONNORD and Nicolas TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle - Thèmes d'analyse pour l'Agrégation*. Ellipses, 1996 [24]
 - Sylvie BENZONI-GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2021 [5]
-

1 Théorèmes d'inversion local et global

- Définition : $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme
- Théorème d'inversion locale (version $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^k$)
- Exemple : $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mais n'est pas un difféomorphisme global (pas injectif)
- Exemple : La fonction doit être de classe $\mathcal{C}^1$. cf $f(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.
- Application : racines d'un polynôme au voisinage d'un polynôme scindé à racines simples
- Théorème d'inversion global
- Application : changement de variables polaire

2 Théorème des fonctions implicites

- Théorème des fonctions implicites
- Exemple (graphique) : Folium de Descartes
- Exemple : résolution approchée d'une équation de degré 3
- Application : domaine de définition du flot (**DVT 1**)

3 Application à la recherche d'extrema

- Théorème des extrema liés (**DVT 2**)
- Exemple : plus grande racine d'une matrice symétrique réelle ?
- Exemple : inégalité de Hadamard
- Exemple : directions principales d'une quadrique

215 – Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Sources :

- Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2003 [41]
 - Mohammed EL AMRANI. *Calcul différentiel*. Ellipses, 2019 [16]
 - Stéphane GONNORD and Nicolas TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle - Thèmes d'analyse pour l'Agrégation*. Ellipses, 1996 [24]
 - Sylvie BENZONI-GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2021 [5]
-

1 Différentiabilité

1.1 Définition et premiers exemples

- Exemple : insuffisance des dérivées partielles
- Définition
- Exemples : différentielles des applications multilinéaires, de l'inverse, du déterminant
- Définition des dérivées partielles, du gradient

1.2 Théorèmes opératoires

- Théorème des fonctions composées
- Exemple : différentielle de la réciproque
- Exemple : différentielle d'une fonction $f \circ \gamma$
- Application : caractérisation des fonctions convexes, inégalité des accroissements finis

1.3 Classe $\mathcal{C}^1$

- Définition
- Caractérisation par les dérivées partielles

2 Différentielles d'ordre supérieur

- Définition
- Lemme de Schwartz
- Formules de Taylor

3 Applications

3.1 Difféomorphismes

- Théorème d'inversion locale
- Théorème d'inversion globale
- Application : changement de variables polaire

3.2 Recherche d'extrema

- Caractérisation des extrema libres
- Théorème des extrema liés (**DVT 1**)

3.3 Équations différentielles

- Théorème de linéarisation de Liapounov
- Domaine de définition du flot (**DVT 2**)

218 – Formules de Taylor. Exemples et applications.

Sources :

- Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle (Deuxième édition)*. EDP Sciences, 2019 [38]
 - Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Michelle SCHATZMAN. *Analyse numérique - Une approche mathématique*. Dunod, 2004 [42]
 - Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
 - François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2003 [41]
-

1 Fonctions à valeurs réelles

- Théorème de Rolle
- Théorème de Taylor-Lagrange
- Exemple : Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}| \leq |P(x)|$. Alors $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Application 1 : lien $f'-f$, $(f''-f)$ sur croissance et signe
- Application 2 : CNS extrema (à travailler)
- Application 3 : inégalités de Kolmogorov, contrôle des dérivées
- Application 4 : analyse d'erreur en intégration numérique (méthode des trapèzes)
- Méthode de Newton (**DVT 1**)

2 Fonctions à valeurs vectorielles

- Inégalité des accroissements finis
- Théorème de Taylor-Young
- Contre-exemple : admettre un DL à l'ordre n n'implique pas être $\mathcal{C}^n$
- Application 1 : DL des fonctions usuelles
- Exemple : Soit $g : (x, y) \mapsto \frac{e^x - (1+x)\cos(y)}{(x^2+y^2)\cos(y)}$ définie sur un voisinage épointé de $(0, 0)$. Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 1/2$.
- Application 2 : TCL et lien fonction caractéristique / existence de moments en proba
- Position relative d'une courbe à sa tangente, d'une surface à son plan tangent (à revoir)
- Théorème : inégalité de Taylor-Lagrange
- Exemple : une inégalité classique type $\forall x \in \mathbb{R}_+, |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}e^x$.

3 Fonctions à valeurs dans un espace de Banach

- Théorème fondamental de l'analyse
- Exemple : calcul de la dérivée de la fonction du flot
- Théorème de Taylor avec reste-intégral
- Application au développement en série entière (par convergence du reste vers 0) : développement en série entière des fonctions usuelles, théorème de Bernstein-Valiron (**DVT 2**)

219 – Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Sources :

- Mohammed EL AMRANI. *Calcul différentiel*. Ellipses, 2019 [16]
 - Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
 - Martine QUEFFÉLEC and Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. Calvage et Mounet, 2023 [35]
-

1 Extrema libres

- Définition : minimum et maximum local, global (cadre evn)

1.1 Existence

- Théorème des bornes atteintes
- Application : une fonction continue coercive admet un minimum global.
- Application : une fonction continue positive sur un segment admet un inf strictement positif. (utile pour Newton ou pour la CS de min local dans le cas de la dimension finie par exemple)

1.2 Caractérisation par le calcul différentiel

- Définition : point critique pour une fonction différentiable
- Proposition : un extremum local est un point critique.
- Contre-exemple : $x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0 qui n'est ni un max, ni un min local
- Proposition : si a est un extremum local de f deux fois différentiable, alors $d^2f(a) \geq 0$ (minimum) ou $d^2f(a) \leq 0$ (maximum).
- Contre-exemple : soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + \lambda y^4$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(0, 0)$ point critique et $d^2f(0, 0) \geq 0$. Si $\lambda > 0$, f admet un minimum local en $(0, 0)$, si $\lambda = 0$, c'est un minimum local non strict, et si $\lambda < 0$, c'est un point col.
- Théorème : condition suffisante en regardant $d^2f(a) > 0$ ou $d^2f(a) < 0$ en dimension finie, et coercive positive ou négative en dimension infinie.
- Exemple : $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

1.3 Cas des fonctions convexes

- Proposition : si f est convexe et différentiable en a , alors $f(x) \geq f(a) + df(a) \cdot (x - a)$.
- Remarque : c'est la version multidimensionnelle de se situer au-dessus de ses tangentes.
- Théorème : CNS de convexité pour une fonction deux fois différentiable (+ cas strictement convexe)
- Exemple : $x \mapsto 1/x$ est convexe.
- Corollaire : Soit f une fonction convexe sur un ouvert et a un point critique de f . Alors f admet un minimum global en a . Si de plus f est strictement convexe, ce minimum est strict.
- Corollaire : une fonction convexe admet au plus un minimum global.
- Lemme (algorithme du gradient à pas optimal) (**DVT 1**)
- Théorème (algorithme du gradient à pas optimal) (**DVT 1**)

2 Extrema liés

- Motivation (explication de ce qu'on entend par extremum sous contrainte)
- Théorème des extrema liés (**DVT 2**)
- Exemple : Chercher les extrema de $f : (x, y, z) \mapsto x + z$ sous les contraintes $\|(x, y, z)\| = 1$ et $y = z$.
- Application : ?

3 Fonctions holomorphes

- Principe du maximum
- Exemple : soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{C} \setminus K$ admette une composante connexe ω bornée. Soit $a \in \omega$. Alors $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ n'est pas limite uniforme de polynômes sur K .
- Exemple : Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(0,1))$. Alors on ne peut avoir $\lim_{|z| \rightarrow 1^-} |f(z)| = +\infty$. (A travailler, pas immédiat !)

4 Optimisation et approximation dans les espaces de fonctions (facultatif)

- Théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert
- Application : sens des sommes partielles de série de Fourier d'une fonction $L^2(]0, 2\pi[)$
- Application : Formulation du problème de régression linéaire
- Polynômes de meilleur approximation...

220 – Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

Sources :

- Stéphane GOURMELEN and Hicham WADI. *Équations différentielles - Théories, algorithmes et modèles*. Ellipses, 2008 [27]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
 - Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Stéphane GONNORD and Nicolas TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle - Thèmes d'analyse pour l'Agrégation*. Ellipses, 1996 [24]
 - Sylvie BENZONI-GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2021 [5]
-

1 Existence et unicité

1.1 Théorie de Cauchy-Lipschitz

1.2 Globalisation de solutions maximales

1.3 Théorème de Cauchy-Peano

2 Étude qualitative

2.1 Portrait de phase

2.2 Zéros des équations linéaires d'ordre 2

3 Stabilité des points d'équilibre

3.1 Théorème de linéarisation

3.2 Théorème de Lyapounov

221 – Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Sources :

- Stéphane GOURMELEN and Hicham WADI. *Équations différentielles - Théories, algorithmes et modèles*. Ellipses, 2008 [27]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
 - Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Stéphane GONNORD and Nicolas TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle - Thèmes d'analyse pour l'Agrégation*. Ellipses, 1996 [24]
 - Sylvie BENZONI-GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2021 [5]
-

1 Existence et unicité de solutions

1.1 Théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire

- Lemme de Gronwall
- Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
- Passage d'une équation scalaire d'ordre n à une équation vectorielle d'ordre 1. Formulation du théorème de CL dans ce cas

1.2 Structure de l'ensemble des solutions

- Théorème : Structure de l'espace des solutions (homogène, non-homogène)
- Remarque : cela signifie "solution = solution homogène + solution particulière"
- Exemple : résolution de $y' = 2y + 1$ (où l'on peut tout faire de façon élémentaire)
- Définition : Système fondamental de solutions
- Proposition : équivalence indépendance pour tout t , pour un t

2 Expression théorique des solutions et résolutions pratiques

2.1 Résolvante et formule de Duhamel

- Définition : résolvante
- Exemple : résolvante d'une équation linéaire scalaire $R(t, s) = \exp(\int_s^t a(u)du)$
- Proposition : $R(t, s)R(s, t_0) = R(t, t_0)$
- Théorème : R est un isomorphisme, est de classe $\mathcal{C}^1$, expression de ses dérivées partielles (**DVT 1**)
- Théorème : formule de Duhamel (**DVT 1**)
- Remarque : en pratique, cette formule correspond à la méthode de variation de la constante, illustrée dans l'exemple suivant
- Exemple : résoudre $y' + y = e^t$ ou l'oscillateur harmonique forcé
- Lemme : fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ et de différentielle ...
- Théorème (domaine de définition du flot) (**DVT 1**)

2.2 Cas des coefficients constants : exponentielle matricielle

- Proposition : Dans le cas d'une équation linéaire homogène à coefficients constants, la résolvante est $R(t, s) = \exp((t - s)A)$.
- Théorème (lien réduction de A - système fondamental de solutions) : cas A diagonalisable, cas complexe
- Mettre un exemple concret à chaque fois

3 Étude qualitative du comportement des solutions

3.1 Équations linéaires homogènes de degré 2

- Lemme : les zéros d'une EDLH d'ordre 2 sont isolés
- Théorème d'entrelacement de Sturm (**DVT 2**)
- Exemple : équivalent de la suite des zéros d'une solution de $x''(t) + tx(t) = 0$.

3.2 Stabilité des points d'équilibre (système autonome)

- Définition : point d'équilibre stable, asymptotiquement stable d'un système autonome
- Théorème de stabilité linéaire
- Exemple : quelques portraits de phase 2×2
- (Théorème de linéarisation de Lyapounov)
- (Exemple : Oscillateur amorti)
- (Contre-exemple dans le cas résistant)

223 – Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Sources :

- Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle (Deuxième édition)*. EDP Sciences, 2019 [38]
 - Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2025 [17]
 - Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
-

1 Limite et valeurs d'adhérence d'une suite numérique

1.1 Limite d'une suite

- Définition de la limite d'une suite (éventuellement $+\infty$)
- Unicité de la limite
- Convergente implique bornée
- Théorèmes opératoires
- Théorème : caractérisation séquentielle de la continuité
- Exemple : $\sin(1/x)$ n'est pas continue en 0 quelle que soit la valeur choisie

1.2 Valeurs d'adhérence

Avoir des exemples !!

- Définition
- Exemple : valeurs d'adhérence de la suite $(e^{in})_{n \in \mathbb{N}}$
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Caractérisation de la convergence par v.a.
- Définition d'une suite de Cauchy
- De Cauchy implique bornée
- Complétude de $\mathbb{R}$
- Définition de la $\limsup$ et de la $\liminf$, interprétation en terme de plus grande et plus petite valeur d'adhérence
- Application : règle de Cauchy pour la convergence d'une série, application à la formule d'Hadamard pour les séries entières (exemple)

2 Étude de la convergence d'une suite numérique

2.1 Comparaison de suites

- Théorème des gendarmes
- Exemple : comparaison série-intégrale pour la série harmonique (encadrer la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$)
- Suites adjacentes
- Application : théorème des séries alternées
- Exemple et contre-exemple
- Zéros d'équation différentielle
- Théorème d'entrelacement des zéros de Sturm (**DVT 1**)
- Comportement asymptotique de la suite des zéros d'une solution non nulle de $y'' + ty = 0$ (**DVT 1**)

2.2 Convergence au sens de Cesaro

- Théorème de Cesaro
- $(-1)^n$ est une suite convergente au sens de Cesaro mais pas convergente
- Réciproque partielle : si $u_{n+1} - u_n = o(1/n)$, alors la convergence au sens de Cesaro équivaut à la convergence
- Application : soit (u_n) une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers une limite l . Alors (u_n/n) converge vers l .

3 Suites récurrentes et points fixes

- Définition d'une suite récurrente
- Exemple : suite géométrique
- Forme explicite pour les suites récurrentes linéaires à coefficients constants (trouver une ref)
- Exemple : suite de Fibonacci
- Théorème de point fixe compact et vitesse de convergence lente (**DVT 2**)
- Méthode de Newton
- Application : résolution approchée d'équations, approximation d'irrationnels

Sources :

- Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
- Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
- Jacques FARAUT. *Calcul intégral*. EDP Sciences, 2006 [18]
- Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle (Deuxième édition)*. EDP Sciences, 2019 [38]
- Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
- Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, and Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS mathématiques volume 3*. Cassini, 2020 [21]

1 Développements asymptotiques de fonctions

1.1 Fonctions usuelles

Théorème 1 *Formule de Taylor-Young* [25]

Soit $n \geq 1$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé, et $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I, E)$ n -fois dérivable en un point $a \in I$. Alors lorsque $h \rightarrow 0$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n).$$

Exemple 2 [25]

En utilisant la formule de Taylor-Young, on peut obtenir le développement limité à tout ordre de la fonction exponentielle en 0 :

$$\forall n \geq 1, \exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

De même, on obtient les développements limités de $\sin$, $\cos$, sh , ch , ou encore $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à tout ordre en 0.

Exemple 3 [25]

Soit $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ et $n \geq 1$. On sait que lorsque $x \rightarrow 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

On en déduit :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

On obtient de même les développements limités de $\arctan$, argth , argsh , $\arcsin$, $\arccos$ à tout ordre en 0.

Exemple 4 [25]

Le développement limité de la fonction $\tan$ en 0 s'obtient en faisant le rapport des développements limités de $\cos$ et $\sin$ en 0. On obtient par exemple le développement limité en 0 à l'ordre 8 :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Exemple 5 [25]

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt$ est convergente si et seulement si $1+\alpha < \beta < 1$ ou $1 < \beta < \alpha+1$.

Exemple 6 [20]

La série $\sum (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ est convergente (mais pas absolument convergente).

1.2 Séries de fonction et intégrales généralisées [25]

Exemple 7

Soit la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ll}]-1, 1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \end{array} \right.$$

Lorsque $x \rightarrow 1^-$, on a l'équivalent :

$$f(x) \sim \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

Théorème 8 Intégration des relations de comparaison

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [a, +\infty]$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \rightarrow b$

1. Si $\int_a^b g$ est convergente en b , alors $\int_a^b f$ est convergente et $\int_x^b f \sim \int_x^b g$ lorsque $x \rightarrow b$;
2. Si $\int_a^b g$ est divergente en b , alors $\int_a^b f$ est divergente et $\int_a^x f \sim \int_a^x g$ lorsque $x \rightarrow b$.

Exemple 9

L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln(t)}$ est divergente et pour $k \geq 1$, on montre qu'on a le développement asymptotique suivant lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{1!x}{\ln^2(x)} + \cdots + \frac{(k-1)!x}{\ln^k(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^k(x)}\right).$$

1.3 Fonctions définies par une intégrale à paramètre [18]

Théorème 10 Méthode de Laplace 1

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty]$, $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b[)$ telle que $\varphi' > 0$ sur $[a, b[$. Soit enfin $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue et non nulle en a . On suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto e^{-\lambda_0 \varphi(x)} f(x)$ soit intégrable sur $[a, b[$. Alors pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, la fonction $x \mapsto e^{-\lambda \varphi(x)} f(x)$ est intégrable sur $[a, b[$, et lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^b e^{-\lambda \varphi(x)} f(x) dx \sim \frac{f(a)}{\lambda \varphi'(a)} e^{-\lambda \varphi(a)}.$$

Exemple 11 Reste de la gaussienne

On étudie le comportement asymptotique lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$:

$$F(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Théorème 12 Méthode de Laplace 2 (DVT 1)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty]$, $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b])$ telle que $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) \neq 0$. Soit enfin $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue et non nulle en a . On suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto e^{-\lambda_0 \varphi(x)} f(x)$ soit intégrable sur $[a, b]$. Alors pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, la fonction $x \mapsto e^{-\lambda \varphi(x)} f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$, et lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^b e^{-\lambda \varphi(x)} f(x) dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda \varphi''(a)}} f(a) e^{-\lambda \varphi(a)}.$$

Exemple 13 Équivalent de Stirling

On considère la fonction Γ définie pour $x \geq 0$ par :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^{+\infty} e^{-t+x \ln(t)} dt.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$

2 Étude asymptotique de suites et séries

2.1 Séries numériques [25]

Théorème 14 Comparaison série-intégrale

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante. Alors la suite

$$\left(\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est convergente.

Théorème 15 Sommation des relations de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$;
2. Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge et $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

N.B.

Il s'agit du théorème version série du théorème précédemment cité sur l'intégration des relations de comparaison.

Exemple 16

On détermine un développement asymptotique à l'ordre 3 de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2.2 Suites définies par récurrence [39]

Lorsqu'on ne sait pas expliciter une suite définie par récurrence, on peut malgré tout parfois étudier précisément son comportement à l'infini, en obtenant un développement à tout ordre. On donne d'abord un théorème permettant d'étudier d'un coup plusieurs suites de la même forme.

Théorème 17

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ admettant un développement asymptotique en 0 de la forme :

$$f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o\left(x^{2p+1}\right),$$

avec $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^*$ et $p > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]0, \eta]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence à partir de x_0 par $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus, lorsque $n \rightarrow \infty$, x_n admet un développement asymptotique de la forme :

$$x_n = \frac{A}{\sqrt[p]{n}} - B \frac{\ln(n)}{n \sqrt[p]{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n \sqrt[p]{n}}\right),$$

avec $A > 0$ et $B \in \mathbb{R}$.

Exemple 18

On applique le résultat à $x_0 \in]0, 1[$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$ pour obtenir, lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{2 \ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

L'exemple ci-dessous montre que la méthode employée est adaptable dans d'autres contextes.

Exemple 19 [20]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence à partir de $u_0 \in \mathbb{R}$ par $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors on montre que $u_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et admet le développement asymptotique :

$$u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

2.3 Suites définies implicitement

Exemple 20 [20]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Alors lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

N.B.

On peut poursuivre en réinjectant le nouveau développement limité dans la relation implicite afin d'obtenir un développement limité à un ordre arbitrairement grand.

 Lemme 21 *Zéros des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2* [7]

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit y une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Alors les zéros de y sont isolés et si $y(t) = 0$, alors $y'(t) \neq 0$.

 Théorème 22 *Entrelacement de Sturm* [25] (**DVT 2**)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $r, s : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $r \leq s$ sur I . On note x, y deux solutions non nulles respectivement de $x'' + r(t)x = 0$ et $y'' + s(t)y = 0$ et on suppose que x s'annule consécutivement en $t_1 < t_2$. Alors :

- ou bien x et y sont proportionnelles sur I , auquel cas $r = s$;
- ou bien y s'annule au moins une fois sur $]t_1, t_2[$.

 Exemple 23 [25],[7] (**DVT 2**)

On considère l'équation différentielle $x''(t) + tx(t) = 0$. Soit x une solution non nulle. Montrons que x s'annule une infinité dénombrable de fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses points d'annulation (ou zéros) vérifie, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$t_n \sim \left(\frac{3n\pi}{2} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

2.4 Coefficients de Fourier et approximation par série de Fourier d'une fonction [15]

 Théorème 24 *Vitesse de convergence de la série de Fourier d'une fonction régulière*

Soit $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ une fonction 2π -périodique. Alors :

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad \text{lorsque } |n| \rightarrow +\infty$$

et

$$\|S_N(f) - f\|_\infty = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right) \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

226 – Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Sources :

- Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle (Deuxième édition)*. EDP Sciences, 2019 [38]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
 - Michelle SCHATZMAN. *Analyse numérique - Une approche mathématique*. Dunod, 2004 [42]
 - Francis FILBET. *Analyse numérique*. Dunod, 2009 [19]
-

1 Définition et premiers exemples

- Définition d'une suite récurrente d'ordre p
- "Vectorisation" pour se ramener à une suite récurrente d'ordre 1

1.1 Suites récurrentes affines

- Suites arithmétiques
- Suites géométriques
- Suites arithmético-géométriques

1.2 Suites récurrentes définies par une fonction monotone

- Lemme : soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Si f est croissante, alors elle admet au moins un point fixe. Si f est décroissante, alors elle admet au plus un point fixe.
- Théorème : soit $f : I \rightarrow I$ continue croissante avec I borné. Alors toute suite récurrente définie par f converge vers un point fixe de f .
- Théorème : soit $f : I \rightarrow I$ continue décroissante avec I borné. Alors (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers des points fixes de $f \circ f$. Si de plus $f \circ f$ admet un unique point fixe, alors (x_n) converge vers celui-ci et il s'agit de l'unique point fixe de f .

1.3 Étude asymptotique de suites récurrentes

- Théorème "général"
- Application à la fonction $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

2 Théorèmes de point fixe

- Théorème de point fixe de Banach-Picard
- Application : théorème de Cauchy-Lipschitz (globalement lipschitzien)
- Théorème de point fixe compact (**DVT 1**)
- Exemple : vitesse de convergence (**DVT 1**)

3 Résolution approchée d'équations

3.1 Résolution d'équations de la forme $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$

- Méthode de Newton
- Méthode de la sécante

3.2 Résolution de systèmes linéaires

- Méthodes itératives
- Méthode de gradient à pas optimal (**DVT 2**)

3.3 Résolution approchée d'équations différentielles

- Définition du schéma d'Euler explicite
- Consistance, stabilité et convergence (+ ordre)

228 – Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d’une variable réelle. Exemples et applications.

Sources :

- Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d’analyse réelle (Deuxième édition)*. EDP Sciences, 2019 [38]
 - Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l’agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
-

1 Continuité

1.1 Définition et premières propriétés

- Définition de la continuité
- Théorème des valeurs intermédiaires, contre-exemple réciproque
- Application : algorithme de dichotomie
- Théorème des bornes atteintes
- Application : existence d’extremum (avec coercivité), donner un exemple explicite (autre exemple plus intéressant ?)

1.2 Continuité uniforme

- Définition
- Exemple et contre-exemple
- Théorème de Heine
- Application : Théorème de Weierstrass (par les polynômes de Bernstein)
- Contre-exemple sur $\mathbb{R}$: si f est limite uniforme de polynômes, alors f est un polynôme
- Application : Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions en escalier. Cela permet de définir l’intégrale de Riemann d’une fonction continue (unicité?)
- Autre application : convolution dans L^p

2 Dérivabilité

- Définition
- Classe $\mathcal{C}^1$
- Exemples et contre-exemples

2.1 Théorème de Rolle et conséquences

- Théorème de Rolle
- Exemple (avec application pas continue au bord), contre-exemple exp
- Application : Théorème de Darboux
- Égalité des accroissements finis
- Application : lien signe f' croissance f
- Application de la monotonie : fonctions de Lyapounov en équations différentielles, théorème de Lyapounov
- Théorème de Taylor-Lagrange
- Application : CNS extremum
- Application : méthode de Newton (**DVT 1**)

2.2 Intégration et dérivation

- Inégalité des accroissements finis
- Théorème fondamental de l'analyse
- Construction de l'escalier de Cantor, contre-exemple au théorème fondamental de l'analyse
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Théorème de Bernstein-Valiron (**DVT 2**)

2.3 Dérivabilité et développements limités

- Formule de Taylor-Young
- Equivalence $\mathcal{C}^1$, contre-exemple $\mathcal{C}^n$
- Application : développements limités de fonctions usuelles

3 Fonctions convexes

- Définition
- Proposition : inégalité des trois pentes

3.1 Régularité des fonctions convexes

- Continuité, caractère Lipschitz (attention au bord)
- Dérivée à gauche et à droite en tout point intérieur
- Convexe + dérivable $\Rightarrow \mathcal{C}^1$ (corollaire de Darboux et monotone + $f(I)$ intervalle $\Rightarrow$ continue)

3.2 Caractérisations des fonctions convexes

- Si f dérivable, f (str) convexe $\Leftrightarrow$ dérivée (str) croissante $\Leftrightarrow$ graphe (str) au-dessus des tangentes
- Si f 2 fois dérivable, f convexe $\Leftrightarrow$ dérivée seconde positive
- Si $f'' > 0$, f strictement convexe. Réciproque fausse x^2

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes.

Exemples et applications.

Soit I un intervalle d'intérieur non vide.

I Définitions et caractérisations

I.1 Fonctions monotones

Définition 1 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si $\forall x, y \in I$ tels que $x < y$, $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$). On dit que f est (strictement) décroissante si $-f$ est (strictement) croissante. On dit que f est (strictement) monotone sur I si f est (strictement) croissante ou décroissante sur I .

Exemple 2 : La fonction $x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 3 : La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est croissante.

Proposition 4 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. strictement positive) sur I .

Exemple 5 : La fonction $f : x \mapsto (1+x)/(1-x)$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Remarque 6 : La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ définie sur $]0, 2[$ est dérivable sur $]0, 2[\setminus \{1\}$, de dérivée positive, mais n'est pas croissante sur $]0, 2[$.

I.2 Fonctions convexes

Définition 7 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe (resp. strictement convexe) sur I si pour tous $x \neq y$ dans I , $\forall t \in]0, 1[$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ (resp. $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$). On dit que f est (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Remarque 8 : Graphiquement, cette définition signifie qu'une fonction convexe se situe sous ses cordes.

Exemple 9 : Une fonction est affine sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est convexe et concave sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 10 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I ;
2. pour tous $x < y < z$ dans I , $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$;
3. pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur I .

Proposition 11 : On suppose I ouvert. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est (strictement) convexe sur I ;
2. f' est (strictement) croissante sur I ;
3. pour tous $x \neq a \in I$, $f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$ (resp. $f(x) > f(a) + (x-a)f'(a)$).

Remarque 12 : Graphiquement, le dernier point signifie qu'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes.

Exemple 13 : Les fonctions $\exp$, $x \mapsto x^2$ sont strictement convexes sur $\mathbb{R}$. La fonction $\sin$ est strictement concave sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Proposition 14 : On suppose I ouvert. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I .

1. f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.
2. Si $f'' > 0$, alors f est strictement convexe.

Exemple 15 : La fonction $x \mapsto (1+x)/(1-x)$ est strictement concave sur I .

Remarque 16 : La réciproque du deuxième point est fausse : la fonction $x \mapsto x^4$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée seconde s'annule en 0.

Définition 17 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $C \subset E$ un ensemble convexe. Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur C si pour tous $x, y \in C$, la fonction $g : t \in [0, 1] \mapsto f(tx + (1-t)y)$ est convexe.

Remarque 18 : On adapte de même la définition de strictement convexe, de concave...

Exemple 19 : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. La norme $\|\cdot\|$ est une fonction convexe.

Remarque 20 : Si f est de classe $\mathcal{D}^1$ ou $\mathcal{D}^2$ sur son domaine de définition, on retrouve des caractérisations analogues de la convexité sur $\mathbb{R}$. La condition de croissance de f' est remplacée par $\forall x, y \in U$, $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ et la condition $f'' \geq 0$ est remplacée par la positivité de la matrice hessienne de f .

Exemple 21 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ est convexe si et seulement si A est positive, et f est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.

II Stabilités et régularité

II.1 Stabilités

Proposition 22 : La croissance et la convexité sont des propriétés stables par multiplication par un scalaire positif, par somme et par limite simple.

Remarque 23 : Les fonctions convexes et les fonctions croissantes forment des semi-cônes convexes de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Exemple 24 : Pour $n \geq 1$, on définit la suite décroissante $(A_n)_{n \geq 1}$ de boréliens de $[0, 1]$ par $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ et $\forall n \geq 1$, $A_{n+1} = \frac{A_n}{3} + \frac{2+A_n}{3}$. Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on définit $f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbf{1}_{A_n}(t) dt$. Alors la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction croissante f appelée escalier de Cantor-Lebesgue.

Proposition 25 : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow J$ une fonction convexe et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et convexe. Alors $g \circ f$ est une fonction convexe.

II.2 Régularité

Proposition 26 : Une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite à gauche et à droite en tout point.

Proposition 27 : Le nombre de discontinuités d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Proposition 28 : Une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue, dérivable à gauche et à droite sur I .

Théorème 29 : (Théorème de Lebesgue (admis)) Une fonction monotone est dérivable presque partout.

Exemple 30 : L'escalier de Cantor-Lebesgue est une fonction croissante, continue, valant 0 en 0 et 1 en 1, dérivable presque partout et de dérivée nulle.

III Applications

III.1 Inégalités de convexité

Proposition 31 : Pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exemple 32 : Soit $\alpha > 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha \sin^2(x)}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

Proposition 33 : (Inégalité de Jensen) Si f est μ -intégrable à valeurs dans I avec μ une mesure de probabilité, pour toute fonction convexe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int \varphi \circ f d\mu$$

Exemple 34 : (Inégalité de Young) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(1/p) + (1/q) = 1$. Alors $ab \leq (a^p/p) + (b^q/q)$.

Remarque 35 : L'inégalité de Young permet de montrer les inégalités de Hölder et de Minkowski, et ainsi d'établir que pour $p \in [1, +\infty[$, $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur $L^p(X)$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

III.2 Étude de suites et de séries

Proposition 36 : Soit F un segment de $\mathbb{R}$ stable par une fonction continue f . On prend $u_0 \in F$ et on définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante sur F , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et elle converge vers un point fixe de f . Si f est décroissante sur F , les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires et convergent vers des points fixes de $f \circ f$.

Exemple 37 : Sans l'hypothèse de continuité, la suite ne converge pas forcément vers un point fixe de f : Si f est définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$, et si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f .

Théorème 38 : (Comparaison série-intégrale) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante. Alors la suite $\left(\sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exemple 39 : On détermine un développement asymptotique à l'ordre 3 de la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème 40 : (Théorème de Dini) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues croissantes sur $[a, b]$ qui converge simplement vers f continue sur $[a, b]$. Alors, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

III.3 Optimisation

Théorème 41 : Soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable. Si f admet un point critique a dans l'intérieur de C , alors f admet un minimum global en a . Si de plus f est strictement convexe, ce minimum est strict.

Exemple 42 : Dans l'exemple 21, f admet un minimum en $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $Ax = b$.

Théorème 43 : (Développement 1) (Méthode de Newton) Soit $f \in \mathcal{C}^2([c, d], \mathbb{R})$. On suppose que $f' > 0$ sur $[c, d]$ et que $f(c) < 0 < f(d)$.

1. f s'annule en un unique point $a \in]c, d[$.
2. Il existe $\alpha, C > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a - \alpha, a + \alpha]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence à partir de x_0 par la relation $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ converge vers a , avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$.

3. Si de plus $f'' > 0$ sur $[c, d]$, pour tout $x_0 \in]a, b]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessus est bien définie et converge vers a , avec :

$$x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Exemple 44 : (Développement 1) Dans le dernier point, si $f'(a) = 0$, on perd la convergence quadratique.

III.4 Équations différentielles : fonctions de Lyapounov

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On étudie l'équation différentielle :

$$x'(t) = f(x(t)). \quad (1)$$

Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = 0$.

Définition 45 : Soit $L \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On dit que L est une fonction de Lyapounov (resp. stricte) en x^* pour (1) s'il existe un voisinage ouvert V de x^* tel que :

1. L admet un minimum strict en x^* sur V ;
2. la fonction $\ell : x \mapsto \langle \nabla L(x), f(x) \rangle$ est négative sur V (resp. strictement négative sur $V \setminus \{x^*\}$).

Lemme 46 : (Développement 2) Soit L une fonction de Lyapounov en x^* et V un voisinage ouvert sur lequel ℓ est négative. Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (1) à valeurs dans V . Alors la fonction $L \circ x$ est décroissante sur I .

Théorème 47 : (Développement 2) On suppose qu'il existe une fonction de Lyapounov L en x^* pour (1). Alors x^* est stable. Si L est de plus stricte, alors x^* est asymptotiquement stable.

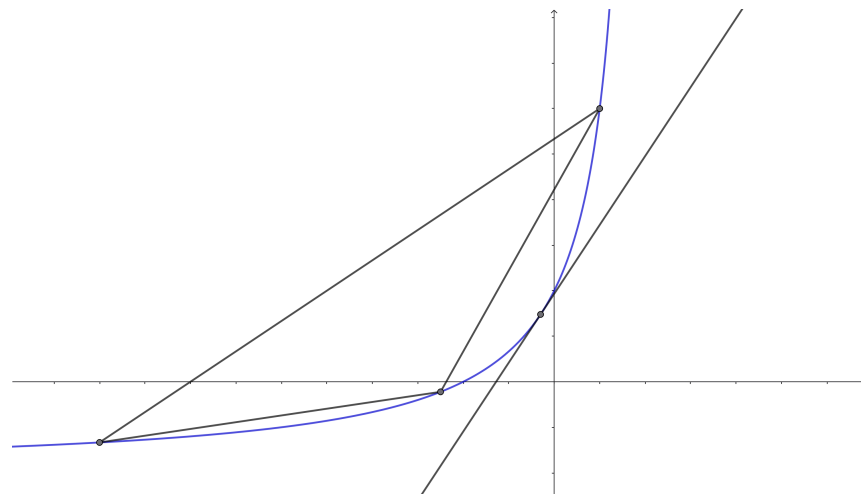
Exemple 48 : On considère le système différentiel associé au pendule simple ou amorti

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) - 2\gamma y \end{cases}$$

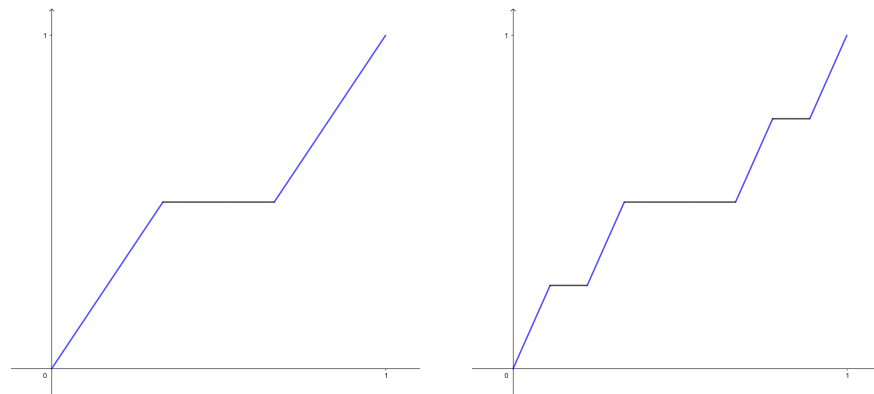
où $\gamma \in \{0, 1\}$. On travaille sur le voisinage $V =]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ du point d'équilibre $x^* = (0, 0)$. La fonction $L_1(x, y) = -\cos(x) + \frac{1}{2}y^2$ est une fonction de Lyapounov non stricte, donc x^* est un point d'équilibre stable.

Si $\gamma = 1$, la fonction $L_2(x, y) = L_1(x, y) + xy + x^2$ est une fonction de Lyapounov stricte, donc x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

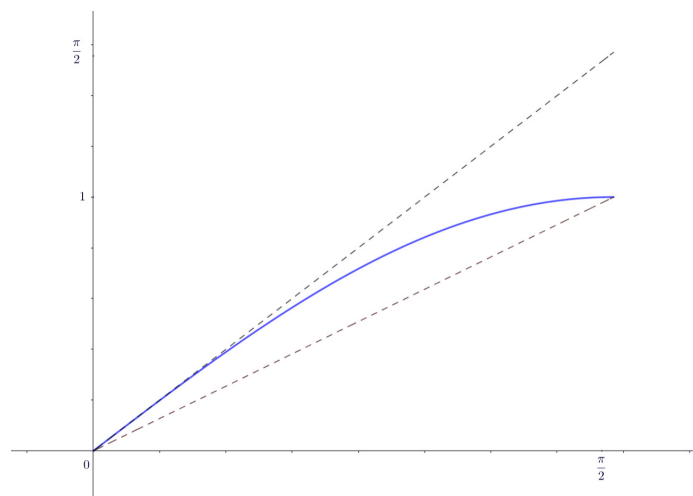
Annexe :



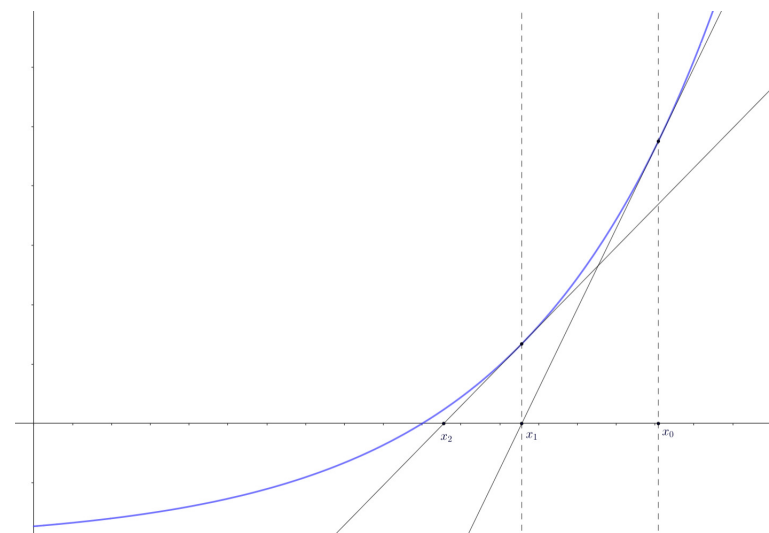
Inégalité des pentes, f convexe implique f au dessus de ses tangentes et sous ses cordes.



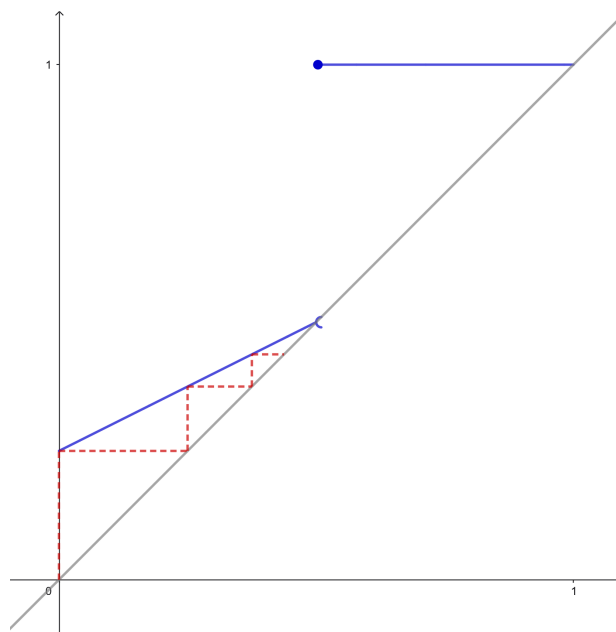
Étapes 1 et 2 de la construction de l'escalier de Cantor-Lebesgue.



Inégalité de convexité du sinus sur $[0, \pi/2]$.



Méthode de Newton (convergence quadratique).



Exemple 37 du plan.

230 – Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Sources :

- Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2025 [17]
 - Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
 - Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
-

1 Vocabulaire des séries numériques

- Définition : série numérique, terme général, somme partielle
- Définition : série convergente, reste d'une série convergente
- Exemple : série géométrique
- Proposition : si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$
- Contre-exemple : $\sum \ln(1 + 1/n)$ est divergente.
- Définition : divergence grossière
- Définition : série télescopique
- Remarque : utile pour utiliser les résultats des séries numériques (notamment les comparaisons) pour obtenir des informations sur une suite.

2 Séries à termes positifs

- Lemme : $(S_n)_n$ est croissante
- Théorème : une série à termes positifs converge ssi $(S_n)_n$ est majorée. Dans le cas contraire, $S_n \rightarrow +\infty$.
- Théorème : comparaison des séries à termes positifs (inégalité, équivalent)
- Exemple : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4 \sin(t)}$ est convergente. (on utilise la cv des séries de Riemann qu'on établit juste en dessous)
- Théorème : comparaison série intégrale
- Exemples : convergence des séries de Riemann, de Bertrand
- Théorème : sommation des relations de comparaison
- Exemple : Développement asymptotique de la série harmonique
- Application : soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de vardi suivant une loi de Rademacher de paramètre $1/2$. On considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour $n \geq 1$, avec $S_0 = 0$. On note $N_n = |\{S_0, \dots, S_n\}|$ le nombre de sites visités à l'instant n . Alors $\mathbb{E}[N_n] \sim 2\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. (**DVT 1**)
- (Exemple : Suite des zéros de Sturm (admettre une partie pour ne pas prendre trop de place dans le plan ?))
- Exemple : étude de la suite $x_{n+1} = x_n - x_n^d$

3 Convergence absolue et opérations sur les séries

- Théorème : CVA implique CV
- Exemple : $\sum (-1)^n / (n^{3/4} + \cos(n))$ est convergente
- Contre-exemple : $\sum (-1)^n / n$
- Théorème : produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes
- Application : soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.
- Théorème (regroupement de termes) : Si $\sum u_n$ converge, alors toute série obtenue par regroupements de termes consécutifs converge et les deux séries ont la même somme.
- Théorème : si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est commutativement convergente
- Exemple : calcul de $\zeta(2k)$ pour $k \geq 1$ (**DVT 2**)
- Contre-exemple : la série alternée $\sum (-1)^n / n$ vérifie : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n / n$.

4 Séries semi-convergences

- Théorème des séries alternées
- Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ (avec estimation du reste)
- Théorème (règle d'Abel)
- Exemple : étude de $\sum e^{in\theta}/n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

234 – Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Sources :

- Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024 [32]
 - Marc BRIANE and Gilles PAGÈS. *Théorie de l'intégration*. Deboeck, 2023 [8]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
 - Haim BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996 [9]
-

1 Théorèmes d'intégration

On suppose définie l'intégrale d'une fonction mesurable positive et d'une fonction étagée

- Fonction (Lebesgue-)intégrable, intégrale, notation $\mathcal{L}^1$
- Relation d'équivalence pp, notation L^1, L^p
- Théorème de convergence dominée
- Application : dérivation sous le signe somme
- Application : convolution $L^p - \mathcal{C}^k$
- Théorème de Fubini-Lebesgue (attention hypothèses)
- Application : convolution $L^1 - L^1$
- Théorème de changement de variable
- Application : intégrale de Gauss

2 Espaces L^p

2.1 Définition

- Inégalité de Hölder (corollaire injections dans le cas compact), evn L^p
- Théorème de Riesz-Fischer (application ?)

2.2 Dualité

- Théorèmes de dualité (cas L^2)
- Représentation des fonctions lipschitziennes (**DVT 1**)

2.3 Théorèmes de densité

- Théorème de densité des fonctions lipschitziennes à support compact
- Application : continuité des translations
- Application : convolution $L^p - L^q$
- Corollaire : densité des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$

3 Application à l'analyse de Fourier

- Définition des coefs de Fourier de fonctions $L^1(]0, 1[)$
- Lemme de Riemann-Lebesgue
- Morphisme d'algèbre $(L^1(]0, 2\pi[, *, \| \cdot \|_1) \rightarrow (c_0(\mathbb{Z}), \cdot, \| \cdot \|_\infty)$
- Théorème de Fejer (**DVT 2**), application densité des polynômes trigo

235 – Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

Sources :

- Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2025 [17]
 - Marc BRIANE and Gilles PAGÈS. *Théorie de l'intégration*. Deboeck, 2023 [8]
 - Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024 [32]
 - Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
-

1 Notions d'uniformité

1.1 Convergence uniforme

- Définition : convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions
- Théorème : continuité et CVU
- Remarque : c'est faux en général si on a seulement CVS. Le théorème de continuité permet d'échanger la limite de la suite et celle de la variable (théorème de la double limite)
- Théorème : dérivation et CVU
- Application : développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$
- Théorème de Dini
- Exemple : approximation polynomiale uniforme de $x \mapsto \sqrt{x}$ (utilisé dans la preuve de Stone-Weierstrass)

1.2 Utilisation de la compacité

- Théorème de Heine
- Application : continuité des translations dans L^p
- Application : calcul de la différentielle de la fonction intervenant dans le dvt flot
- (soit $f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. f est localement lipschitzienne ssi elle est lipschitzienne sur tout compact)

1.3 Utilisation de la théorie de Baire

- Théorème de Baire
- Théorème de Banach-Steinhaus
- Application : soit $(T_n)_n \in \mathcal{L}_c(E, F)^\mathbb{N}$ où E est un Banach. On suppose que (T_n) converge simplement vers $T : E \rightarrow F$. Alors T est linéaire continue, et $\|T\|_{\mathcal{L}_c(E, F)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}$.

2 Séries numériques

- Produit de Cauchy des séries absolument convergentes (interversion produit somme)
- Exemple : calcul du nombre de partitions d'un entier en parts fixées
- Théorème de sommation des relations de comparaison
- Exemple : développement asymptotique de la série harmonique
- Exemple : nombre moyen de sites visités par la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ (**DVT 1**)
- Exemple : vitesse de convergence de la suite récurrente $x_{n+1} = x_n - x_n^d$

3 Théorie de l'intégration

- Lemme de Fatou
- Application : Théorème de Riesz-Fischer
- Théorème de convergence dominée
- Exemple : limite de la suite $I_n(\alpha) = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-\alpha x} dx$
- Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors $\int_{\mathbb{R}} f \varphi' = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} dx$.
- Théorème de dérivation sous l'intégrale

- Application : calcul de l'intégrale de Dirichlet (**DVT 2** possible)
- Application : calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne (**DVT 2** possible)
- Théorèmes de Fubini (admis)
- Exemple : calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$
- Application : formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (**DVT 2** possible)

236 – Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Sources :

- Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020 [25]
 - Martine QUEFFÉLEC and Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. Calvage et Mounet, 2023 [35]
 - Michelle SCHATZMAN. *Analyse numérique - Une approche mathématique*. Dunod, 2004 [42]
 - Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
-

1 Techniques issues de la théorie de l'intégration / techniques élémentaires

- Décomposition en éléments simples pour se ramener à des primitives élémentaires (exemple dans Gourdon)
- Intégration par parties (pour se ramener à une intégrale connue ou obtenir une formule de récurrence)
- Exemple : moments de la loi exponentielle, intégrales de Wallis
- Exemple : intégrale de Dirichlet (**DVT 1**)
- Théorèmes de Fubini
- Exemple dans le Gourdon (intégrale sur des domaines)
- Théorème de changement de variable
- Exemple : intégrale de la gaussienne par changement de variable polaire

2 Techniques issues de l'analyse complexe

- Théorie de Cauchy : un théorème type ouvert étoilé
- Application : transformée de Fourier de la gaussienne (**DVT 2**)
- Théorème des résidus
- Application : $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4}$, transformée de Fourier de $\frac{1}{1+x^2}$.

3 Techniques de calcul approché d'intégrales

- Sommes de Riemann, méthode des rectangles
- Méthode des trapèzes et analyse d'erreur
- Méthode de Monte-Carlo

239 – Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Sources :

- Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024 [32]
 - Marc BRIANE and Gilles PAGÈS. *Théorie de l'intégration*. Deboeck, 2023 [8]
 - Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018 [6]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
-

1 Exemples de fonctions définies par une intégrale à paramètre

- Fonctions spéciales telles que la fonction Γ , les primitives de fonctions
- Transformée de Fourier de fonctions L^1
- Transformée de Laplace (d'une fonction $L^\infty([0, +\infty[))$)
- Produit de convolution : bonne définition $L^1_{\text{loc}} - \mathcal{C}_c^k$ et $L^p - L^q$

2 Continuité

- Théorème de continuité découlant du TCD
- Exemple : TF d'une fonction L^1
- Exemple : continuité de $\int_a^x f$, $f \in L^1$ (utilise presque partout)
- Parfois insuffisant : convolution $L^p - L^q$

3 Dérivabilité

- Théorème de dérivation découlant du TCD
- Exemple : formule de dérivation de la TF
- Théorème "itéré"
- Exemple : fonction Γ
- Théorème d'holomorphic
- Exemple : transformation de Laplace
- Application : calcul de la valeur de l'intégrale de Dirichlet (**DVT 1**)

4 Étude asymptotique

- Lemme de Riemann-Lebesgue pour la TF
- Méthode de Laplace et application à l'équivalent de Stirling (**DVT 2**)

241 – Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Sources :

- Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2025 [17]
 - Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Analyse et probabilités*. Deboeck, 2023 [40]
 - Marc BRIANE and Gilles PAGÈS. *Théorie de l'intégration*. Deboeck, 2023 [8]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
-

1 Modes de convergence simple et uniforme, critères de convergence

1.1 Suites de fonctions

- Définition : convergence simple
- Remarque : unicité de la limite
- Définition : convergence uniforme
- Proposition : convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple
- Exemple : $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto 1$ si $x = 1$ et 0 sinon. Mais (f_n) ne converge pas uniformément puisque $\|f_n - f\|_{\text{inf}} = 1$ pour tout n .
- Exemple (utilisation d'une suite de points) : la suite $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ converge simplement mais non uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.
- Théorème : critère de Cauchy uniforme
- Application : convergence normale (cf paragraphe suivant)
- Théorèmes de Dini
- Exemple : la suite de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ $f_n : x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$ converge uniformément vers $\exp$ sur tout compact de $\mathbb{R}$.
- Contre-exemples : cette même suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ (nécessité de la compacité). Le premier exemple montre que la continuité de la limite est nécessaire. $f_n : x \mapsto -\frac{1}{1+nx}$ est une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers 0 sur $]0, 1[$, mais $f_n(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{2}$ donc la convergence n'est pas uniforme.

1.2 Séries de fonctions

- Adaptation des définitions de convergence simple, uniforme
- Exemple : définition de l'exponentielle comme somme de série entière
- Exemple : $\sum x e^{-nx}$ converge simplement, mais pas uniformément, vers $\frac{x}{1-e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Définition : convergence normale
- Théorème : convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme
- Contre-exemple : série de fonctions $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}[}$.

1.3 Séries entières

- Définition
- Lemme d'Abel, rayon de convergence
- Définition : fonction développable en série entière
- Théorème : CNS de DSE en 0
- Théorème de Bernstein-Valiron (**DVT 1**)

2 Propriétés conservées par convergence simple et uniforme, théorèmes opératoires

2.1 Continuité et limite

- Proposition : La convergence simple préserve les propriétés de croissance, convexité, périodicité
- Théorème : La convergence uniforme préserve la propriété de continuité
- Remarque : ce n'est pas le cas de la convergence simple, comme on l'a vu dans le premier exemple. On peut utiliser la contraposée de ce théorème pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme.
- Exemple : construction de l'escalier de Cantor. Il s'agit d'une fonction f continue, croissante, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, dérivable presque partout et de dérivée nulle.
- Théorème de la double limite (ressemble au résultat de continuité). Version série (permutation série et limite)
- Exemple : ? (voir séries)

2.2 Dérivation et intégration

- Théorème de dérivabilité. Version séries
- Exemple : ? (voir séries)
- Théorème d'holomorphicité
- Exemple : fonction ζ de Riemann
- Théorème de convergence dominée
- Exemple : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Application : de nouveaux développements en série entière

3 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières

- Théorème : théorème de Weierstrass (par les polynômes de Bernstein)
- Exemple : approximation de $|\cdot|$ ou $\sqrt{\cdot}$ par une suite de polynômes
- Utilisation de la convolution : théorème de Féjer (pour les séries de Fourier) (**DVT 2**)
- Application : densité des polynômes trigonométriques dans les fonctions continues sur un segment
- Théorème de Cauchy-Peano par régularisation

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Définition 1 : On appelle série entière associée à une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum a_n z^n$. On appelle somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ définie en tout point z où cela a un sens.

Exemple 2 : La série $\sum z^n$ est une série entière. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ vaut $\frac{1}{1-z}$.

Exemple 3 : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X , et on note G_X la somme de la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n) z^n$.

I Rayon de convergence

Définition 4 : On appelle rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ l'élément $R \in \bar{\mathbb{R}}_+$ défini par $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$ et disque de convergence le disque $\mathbb{D}(0, R)$.

Exemple 5 : Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est égal à 1.

Exemple 6 : Le rayon de convergence de la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est au moins 1.

Proposition 7 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

- si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement ;
- si $|z| = R$, alors on ne peut rien dire a priori.

Exemple 8 : La série entière $\sum z^n/n$ a pour rayon de convergence 1, diverge en $z = 1$, mais converge en $z = -1$ (série alternée).

Exemple 9 : La fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire discrète X est bien définie pour $|z| \leq 1$ et $G_X(1) = 1$.

Théorème 10 : (Formule de Hadamard) Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Théorème 11 : (Théorème radial d'Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Alors la série entière réelle $x \mapsto \sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$. En particulier,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Exemple 12 : On a $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ en utilisant le DSE en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ établi plus loin.

Proposition 13 : Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b .

Le rayon de convergence R de leur somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a < R_b$, et pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Proposition 14 : Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b .

Le rayon de convergence R de leur produit de Cauchy $\sum c_n z^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$, vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

Exemple 15 : On peut avoir des inégalités strictes dans les deux résultats précédents : la somme des séries $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ est de rayon de convergence infini alors que les deux séries sont de rayon de convergence 1. De même, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2, b_0 = -1$ et pour $n \geq 1$, $a_n = 2^n$ et $b_n = 1$. Alors $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $\frac{1}{2}$, $\sum b_n z^n$ est de rayon de convergence 1, mais leur produit de Cauchy est nul, donc de rayon de convergence infini.

Application 16 : Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Exemple 17 : Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètre respectif $\lambda, \mu > 0$. Alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exemple 18 : On ne peut piper deux dés indépendants de sorte que leur somme suive une loi uniforme.

Application 19 : (Nombre de partitions à parts fixées d'un entier) Soit $k \geq 1$ et $a_1, \dots, a_k$ des entiers non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \geq 1$, on note u_n le nombre de k -uplets $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n$. Alors, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$u_n \sim \frac{1}{a_1 \cdots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

II Propriétés de la somme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $S : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ sa somme sur le disque de convergence

Proposition 20 : La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

Corollaire 21 : La somme S est continue sur $\mathbb{D}(0, R)$.

Théorème 22 : La somme S est holomorphe sur $D(0, R)$ et sa dérivée correspond à la dérivée terme à terme :

$$\forall z \in D(0, R), S'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Plus précisément, la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a encore R pour rayon de convergence.

Remarque 23 : Lorsqu'on travaille avec une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$.

Exemple 24 : On peut obtenir le développement de $\frac{1}{(1-x)^k}$ par dérivation de $\frac{1}{1-x}$.

Proposition 25 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X . Alors G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$. De plus, X admet une espérance si et seulement si G_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et dans ce cas, $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$.

Théorème 26 : Soit $[a, b] \subset]-R, R[$. Alors $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Application 27 : On obtient le développement en série entière en 0 de $\ln(1+x)$, $\arctan$ en intégrant le développement déjà connu de leur dérivée.

Proposition 28 : (Formule de Cauchy pour les coefficients) Soit $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

Application 29 : (Égalité de Parseval) Pour tout $r \in]0, R[$, la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

III Fonctions développables en série entière

Définition 30 : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie sur un voisinage de z_0 dans $\mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Remarque 31 : On adapte la définition pour les fonctions de la variable réelle en utilisant des séries entières de la variable réelle.

Proposition 32 : Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0, développable en une série entière $\sum a_n z^n$ en 0. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire 33 : Le développement en série entière d'une fonction f en un point, lorsqu'il existe, est donc unique.

Exemple 34 : ($\mathcal{C}^\infty$ n'implique pas développable en série entière) L'application $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Application 35 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors $X_n \rightarrow X$ en loi si et seulement si G_{X_n} converge simplement vers G_X sur $[0, 1[$.

Exemple 36 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{n}$. Alors X_n converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1.

Théorème 37 : Soit f une fonction de la variable réelle définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Alors f est développable en série entière en 0 si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que :

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$;
- La suite de fonctions $R_n : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ converge simplement vers 0 sur $] -r, r[$.

Théorème 38 : (Bernstein-Valiron, Développement 1) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)}$ est positive. Alors f est développable en série entière au voisinage de tout point $x_0 \in I$.

Exemple 39 : La fonction $\tan$ est développable en série entière en tout point de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Remarque 40 : Une façon d'obtenir un développement en série entière est d'utiliser une équation différentielle vérifiée par la fonction que l'on étudie. Cette technique est illustrée par les deux exemples suivants.

Exemple 41 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et pour tout $x \in] -1, 1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Application 42 : (Développement 2) Soit l'équation différentielle (E) :

$(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0$. Sur chaque intervalle $] -\infty, -1[,] -1, 0[$ et $] 0, +\infty[$, l'ensemble des solutions de (E) forme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{\ln(|t|)}{1+t}$.

IV Fonctions analytiques

Définition 43 : Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de U .

Exemple 44 : La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ et pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n$.

Théorème 45 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f : \mathbb{D}(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$. Alors f est analytique sur $\mathbb{D}(0, R)$.

Théorème 46 : Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est analytique.

Théorème 47 : (Principe des zéros isolés) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors les zéros de f sont isolés.

Exemple 48 : Il n'existe aucune fonction analytique f définie sur un ouvert contenant 0 telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Corollaire 49 : (Principe du prolongement analytique) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$. Si f et g coïncident sur un ensemble admettant un point d'accumulation, alors f et g coïncident sur U .

Application 50 : Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et la transformée de Fourier de f , notée $\hat{f}$, est $\hat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Théorème 51 : (Principe du maximum) Soit U un ouvert connexe borné et f une fonction continue sur $\bar{U}$, analytique sur U . Alors f atteint son maximum sur ∂U .

Exemple 52 : Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(0, 1))$. Alors on ne peut avoir $\lim_{|z| \rightarrow 1^-} |f(z)| = +\infty$.

Références :

- Mohammed El Amrani, *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*
- Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la Licence 3*
- Hervé et Martine Queffélec, *Analyse complexe et applications*
- Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Oraux X-ENS* (partie sur les séries entières)
- Xavier Gourdon, *Analyse* (notamment pour le développement 1)
- Florent Berthelin, *Équations différentielles* (développement 2)

245 – Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Sources :

- Patrice TAUVEL. *Analyse complexe pour la licence 3*. Dunod, 2020 [44]
 - Martine QUEFFÉLEC and Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. Calvage et Mounet, 2023 [35]
 - Walter APPEL. *Mathématiques pour l'agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024 [1]
 - Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
 - Hervé QUEFFÉLEC. *Topologie*. Dunod, 2025 [34]
-

1 Définition et premiers exemples

1.1 Définition et lien avec la différentiabilité

- Définition
- Condition de Cauchy-Riemann (holomorphic > différentiabilité)
- Le module n'est pas holomorphe

1.2 Séries entières

- Holomorphic des séries entières
- Exemple : fonctions usuelles holomorphes
- Fonctions génératrices

1.3 Détermination du logarithme

- Détermination du logarithme
- Fonctions puissance
- Application de la détermination du logarithme : développement limité dans le TCL

2 Théorie de Cauchy et applications

2.1 Théorie de Cauchy

- Existence de primitives
- Lemme de Goursat et théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés
- Transformée de Fourier de la gaussienne (**DVT 2**)
- Formules de Cauchy
- Application : théorème d'holomorphic sous l'intégrale (exemple : transformée de Laplace)
- Deuxième application : théorème de Weierstrass (application ?)

2.2 Propriétés remarquables des fonctions holomorphes

- Analyticité
- Application : indécomposabilité des lois de Poisson (**DVT 2**)
- Principe des zéros isolés
- Application : prolongement analytique (exemple de la fonction ζ ?)
- Principe du maximum
- Exemple (contre-exemple au théorème de Runge) : soit K un compact et ω une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Alors pour tout $a \in \omega$, la fonction $\varphi_a : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ n'est pas limite uniforme sur K de polynômes.
- Théorème de Liouville (application : théorème de d'Alembert Gauss)

3 Théorie des résidus

- Définition de singularités et fonctions méromorphes (exemple des fractions rationnelles)
- Développement en série de Laurent (application ?)
- Indice et résidu
- Théorème des résidus
- Application : calcul d'une intégrale

246 – Séries de Fourier. Exemples et applications.

Sources :

- Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
 - Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017 [7]
-

1 Coefficients de Fourier

- Définition des coefficients de Fourier dans $L^1(]0, 2\pi[)$
- Exemple du triangle ou de la fonction $x \mapsto e^{-ax}$ (pour voir l'aspect vitesse)
- Propriétés opératoires (dérivation, translation)
- Interprétation $L^2(]0, 2\pi[)$

2 Convergence de la série de Fourier

- Définition de la série de Fourier
- Définition du noyau de Dirichlet, commentaire sur ses (mauvaises) propriétés

2.1 Convergence au sens de Cesaro

- Noyau de Fejer, caractère régularisant
- Théorème de Féjer (**DVT 1**)
- Conséquences sur la théorie hilbertienne

2.2 Critère de convergence uniforme

- Théorème de convergence uniforme
- Vitesse de convergence en fonction de la régularité

2.3 Critère de convergence ponctuelle

- Théorème de Dirichlet
- Application au signal carré

3 Applications

- Calcul de $\zeta(2k)$ (**DVT 2**)
- Exemple : résolution d'une équation différentielle (exo du El Amrani)
- Théorème : résolution de l'équation de la chaleur

250 – Transformation de Fourier. Applications.

Sources :

- Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008 [15]
 - Walter APPEL. *Mathématiques pour l'agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024 [1]
-

1 Définition et premières propriétés dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

- Définition dans L^1 et linéarité
- Exemple : fonction caractéristique d'une variable aléatoire à densité
- Lemme de Riemann-Lebesgue
- Propriétés opératoires : dérivation et décroissance, homothétie, translation, convolution et produit
- Exemples : indicatrice (TF pas L^1), $x \mapsto \exp^{-a|x|}$
- Exemple : Fonction caractéristique
- Transformée de Fourier d'une gaussienne et théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (**DVT 1**)
- Application : résolution de l'équation de la chaleur 1D sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$.

2 Classe de Schwartz

- But : avoir une TF bijective.
- Définition de la classe de Schwartz
- Inclusion dans tous les espaces L^p
- Densité de $S(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < +\infty$ (contient $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$)
- Stabilité par transformée de Fourier
- Théorème d'inversion dans Schwartz
- Exemple de l'équation $-\Delta u + u = f$: existence d'une unique solution dans $S(\mathbb{R}^d)$ pour $f \in S(\mathbb{R}^d)$

3 Prolongement sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et aspect hilbertien

- Formule de Plancherel dans $S(\mathbb{R}^d)$
- Prolongement par densité de la TF sur L^2
- Inversion de Fourier sur L^2

3.1 Application à l'échantillonnage

- Espace des fonctions dont la transformée de Fourier est à support borné
- Hilbert (**DVT 2**)
- Théorème d'échantillonnage de Shannon (**DVT 2**)

261 – Loi d’une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Sources :

- Walter APPEL. *Mathématiques pour l’agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024 [1]
 - Walter APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2024 [2]
 - Vincent RIVOIRARD and Gilles STOLTZ. *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2012 [36]
-

1 Loi d’une variable aléatoire

1.1 Définition et premiers exemples

- Définition / proposition : on appelle loi d’une variable aléatoire $X : \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rightarrow (E, \mathcal{E})$ la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{E} \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \in [0, 1]$.
- Exemple / définition : loi de Bernoulli vue comme résultat d’un pile ou face
- Exemple / lemme : soit X l’indice du premier succès dans une succession d’épreuves de Bernoulli indépendantes. Alors $X \in \mathbb{N}^*$ presque sûrement.
- Définition : loi géométrique
- Théorème : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X = n) \neq 0$. Alors X suit une loi géométrique si et seulement si X est sans mémoire, i.e. $\forall k, l \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k + l \mid X > l) = \mathbb{P}(X > k)$.

1.2 Fonction de répartition

- Définition : fonction de répartition d’une variable aléatoire réelle
- Exemple / définition : fonction de répartition d’une loi exponentielle (introduite par l’exemple de la radioactivité)
- Proposition : la fonction de répartition est croissante, continue à droite, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
- Définition : variable aléatoire à densité, absolument continue
- Exemple : densité de la loi exponentielle
- Proposition : soit X une variable aléatoire à densité. Alors F_X est continue.
- Théorème : la fonction de répartition caractérise la loi.
- Application : Soit X une variable aléatoire positive, à densité. On suppose que $\forall x \geq 0, F_X(x) < 1$. Alors X suit une loi exponentielle si et seulement si X est sans mémoire.

1.3 Moments d’une variable aléatoire

- Définition d’un moment d’une variable aléatoire
- Théorème de transfert
- Application : méthode de Monte-Carlo
- Exemple : espérance, variance des lois usuelles (en annexe)
- Contre-exemple : une loi de Cauchy n’admet pas d’espérance
- (Problème des moments dans le cas discret)

2 Fonctions caractérisant la loi

2.1 Fonction génératrice pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

- Définition : fonction génératrice
- Exemple : fonctions génératrices des lois usuelles (en annexe)
- Proposition : le rayon de convergence de la fonction génératrice est 1, et G_X est définie sur $\bar{D}(0, 1)$. Toutes les dérivées de G_X sont positives sur $[0, 1[$. En particulier, G_X est croissante et convexe.
- Théorème : la fonction génératrice caractérise la loi.
- Proposition : fonction génératrice et somme de variables aléatoires indépendantes
- Application : somme de lois de Poisson et indécomposabilité des lois de Poisson (**DVT 1**)

2.2 Fonction caractéristique

- Définition : fonction caractéristique
- Exemple : fonctions caractéristiques des lois usuelles (en annexe)
- Proposition : dans le cas d'une variable à densité, la fonction caractéristique est la TF de la densité (à inversion près $\pm i$).
- Proposition : $\varphi_X(0) = 1$, φ_X est uniformément continue
- Théorème : la fonction caractéristique caractérise la loi.
- Proposition : moments et fonction caractéristique
- Proposition : fonction caractéristique et indépendance, somme
- Exemple : la somme de lois normales indépendantes est une loi normale

3 Convergence en loi et caractérisations

- Définition : convergence en loi (par les fonctions de répartition)
- Théorème : pour des variables aléatoires discrètes, $X_n \rightarrow X$ en loi ssi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$.
- Application aux chaînes de Markov
- (Théorème : $X_n \rightarrow X$ en loi ssi la suite de fonctions (G_{X_n}) converge simplement vers G_X sur $[0, 1[$)
- (Exemple : voir leçon 229)
- Théorème : $X_n \rightarrow X$ en loi $\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$
- Remarque : on peut se limiter aux fonctions lipschitziennes bornées.
- Théorème de Lévy
- Théorème central limite
- Application 1 : construction d'un intervalle de confiance asymptotique
- Application 2 : estimation d'erreur de la méthode de Monte-Carlo

4 Test du χ^2 d'adéquation

4.1 Vecteurs gaussiens

- Définition : vecteur gaussien (par combinaisons linéaires de ses composantes)
- Contre-exemple : $(Z, \varepsilon Z)$, où $Z \sim N(0, 1)$ et $\varepsilon \sim R(1/2)$ n'est pas un vecteur gaussien. Il ne suffit pas que chaque composante suive une loi normale.
- Définition : vecteur moyen, matrice de covariance
- Théorème : fonction caractéristique d'un vecteur gaussien
- Proposition : linéarité
- Proposition : caractérisation de l'indépendance
- Contre-exemple : pour le vecteur $(Z, \varepsilon Z)$, on a $\text{Cov}(Z, \varepsilon Z) = 0$ mais Z et εZ ne sont pas indépendants.
- Théorème central limite multiD
- Définition : loi du χ^2
- Lemme : la loi du χ^2 ne dépend que de $\|m\|$ et de d
- Théorème de Cochran (**DVT 2**)

4.2 Application au test du χ^2 d'adéquation

- Lemme : soit X une va de loi p sur un ensemble fini $\llbracket 1, d \rrbracket$. Alors p est entièrement caractérisée par le vecteur $(\mathbb{P}(X = 1), \dots, \mathbb{P}(X = d))$, et la somme des coordonnées de ce vecteur vaut 1.

Soit $p = (p_1, \dots, p_d)$ une loi sur l'ensemble fini $\llbracket 1, d \rrbracket$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires iid de loi p . Soit p^{ref} une loi telle que $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $p_i^{\text{ref}} > 0$.

On cherche à créer, à partir de l'observation de $(X_1, \dots, X_n)$, un test pour les hypothèses $H_0 : p = p^{\text{ref}}$ et $H_1 : p \neq p^{\text{ref}}$.

- Définition de l'estimateur $\hat{p}_n$ et de la distance D_n
- Théorème : sous H_0 , $D_n^2(\hat{p}_n, p^{\text{ref}}) \rightarrow \chi^2(d-1)$ en loi. Sous H_1 , $D_n^2(\hat{p}_n, p^{\text{ref}}) \rightarrow +\infty$ ps. (**DVT 2**)

262 – Convergences d’une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Sources :

- Walter APPEL. *Mathématiques pour l’agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024 [1]
 - Walter APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2024 [2]
 - Vincent RIVOIRARD and Gilles STOLTZ. *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2012 [36]
-

1 Modes de convergence des suites de variables aléatoires

1.1 Convergence presque sure

- Lemme : l’ensemble $\{X_n \rightarrow X\}$ est un événement
- Définition : convergence presque sure
- Exemple : sur $([0, 1], B([0, 1]), \lambda)$, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_n(\omega) = \omega^n$ converge presque sûrement vers 0.
- Proposition : il y a unicité de la limite (au sens p.s.), stabilité par une application continue, et le passage à la limite est linéaire.
- Proposition : Si pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la série $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ est convergente, alors $X_n \rightarrow X$ p.s.
- Proposition : Si $\sum_n \mathbb{E}[|X_n - X|]$ est convergente, alors $X_n \rightarrow X$ p.s.
- Application : dans la partie suivante (réciproque cv proba $\Rightarrow$ sous-suite cv ps)
- Contre-exemple : sur $([0, 1], B([0, 1]), \lambda)$, la suite $(X_n)_n = (\mathbb{1}_{]0, \frac{1}{n}[})_n$ converge p.s. vers 0 mais ne vérifie pas les propriétés précédentes.

1.2 Convergence en probabilités

- Définition : convergence en probabilité
- Théorème : unicité de la limite (au sens p.s.)
- Proposition : le passage à la limite en proba est linéaire et stable par application continue
- Théorème : si (X_n) converge presque sûrement vers X , alors (X_n) converge en probabilité vers X
- Contre-exemple : plateau de taille $1/n$ qui se déplace, sur $([0, 1], B([0, 1]), \lambda)$
- Théorème : si (X_n) converge en probabilité vers X , alors il existe une sous-suite $(X_{\varphi(n)})$ convergeant presque sûrement vers X .

1.3 Convergence en moyenne, dans L^p

- Définition : convergence dans L^p
- Proposition : il y a unicité de la limite (au sens p.s.) et le passage à la limite est linéaire
- Théorème : si $X_n \rightarrow X$ dans L^1 , alors $X_n \rightarrow X$ en proba
- Contre-exemple : sur $([0, 1], B([0, 1]), \lambda)$, la suite $(n^2 \mathbb{1}_{]0, \frac{1}{n}[})_n$ converge p.s. et en probabilité vers 0 mais $\mathbb{E}[|X_n|] = n \rightarrow +\infty$.
- Proposition : si $X_n \rightarrow X$ en proba et (X_n) est p.s. bornée, alors $X_n \rightarrow X$ dans tout L^p .
- Théorème : si $X_n \rightarrow X$ dans L^q , alors $X_n \rightarrow X$ dans L^p ($p \leq q$)

1.4 Convergence en loi

- Définition : convergence en loi (par convergence simple des fonctions de répartition)
- Remarque : la limite est cette fois-ci au sens de la loi. Contrairement aux précédents modes de convergence, les variables aléatoires considérées peuvent être définies sur des espaces probabilisés différents.
- Théorème de Skorokhod : si $X_n \rightarrow X$ en loi, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $Y_n \sim X_n$, $Y \sim X$ telles que $Y_n \rightarrow Y$ p.s.

- Théorème : $X_n \rightarrow X$ en loi $\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$
- Remarque : on peut se limiter aux fonctions lipschitziennes bornées.
- Théorème : si $X_n \rightarrow X$ en proba, alors $X_n \rightarrow X$ en loi
- Contre-exemple : $X \sim B(1/2)$ et $Y = 1 - X$. La suite constante égale à X converge en loi vers Y , mais ne converge pas en probabilité vers Y .
- Proposition : si $X_n \rightarrow c$ en loi, alors $X_n \rightarrow c$ en proba.

2 Caractérisations de la convergence en loi

2.1 Pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

- Théorème : $X_n \rightarrow X$ en loi ssi $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$.
- Application aux chaines de Markov (**DVT 1**)
- Théorème : $X_n \rightarrow X$ en loi ssi la suite de fonctions (G_{X_n}) converge simplement vers G_X sur $[0, 1[$.
- Exemple : voir leçon 229

2.2 Le cas général

- Théorème de Lévy
- Application : si $X_n \rightarrow X$ en loi et $Y_n \rightarrow Y$ en loi, et si pour tout n , X_n et Y_n sont indépendantes, et également X et Y sont indépendantes, alors (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, Y) . En particulier $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$ en loi et $X_n Y_n \rightarrow XY$ en loi.
- Contre-exemple : sans indépendance c'est faux : prendre X et $(1 - X)$ avec $X \sim B(1/2)$.

3 Lois des grands nombres

- Théorème : loi faible L^2
- Théorème : loi forte L^4
- Exemple : soit $X_n \sim N(m, \sigma^2)$. Étudier la convergence de $\frac{X_1 + \dots + X_n}{X_1^2 + \dots + X_n^2}$.

4 Théorème central limite

- Théorème central limite
- Exemple : soit $X_n \sim P(n)$. Alors $\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$ en loi.
- Application : estimation d'erreur dans Monte-Carlo

5 Test du χ^2 d'adéquation

5.1 Vecteurs gaussiens

- Définition : vecteur gaussien (par combinaisons linéaires de ses composantes)
- Contre-exemple : $(Z, \varepsilon Z)$, où $Z \sim N(0, 1)$ et $\varepsilon \sim R(1/2)$ n'est pas un vecteur gaussien. Il ne suffit pas que chaque composante suive une loi normale.
- Définition : vecteur moyen, matrice de covariance
- Théorème : fonction caractéristique d'un vecteur gaussien
- Proposition : linéarité
- Proposition : caractérisation de l'indépendance
- Contre-exemple : pour le vecteur $(Z, \varepsilon Z)$, on a $\text{Cov}(Z, \varepsilon Z) = 0$ mais Z et εZ ne sont pas indépendants.
- Théorème central limite multiD
- Définition : loi du χ^2
- Lemme : la loi du χ^2 ne dépend que de $\|m\|$ et de d
- Théorème de Cochran (**DVT 2**)

5.2 Application au test du χ^2 d'adéquation

— Lemme : soit X une va de loi p sur un ensemble fini $\llbracket 1, d \rrbracket$. Alors p est entièrement caractérisée par le vecteur $(\mathbb{P}(X = 1), \dots, \mathbb{P}(X = d))$, et la somme des coordonnées de ce vecteur vaut 1.

Soit $p = (p_1, \dots, p_d)$ une loi sur l'ensemble fini $\llbracket 1, d \rrbracket$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires iid de loi p . Soit p^{ref} une loi telle que $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, p_i^{\text{ref}} > 0$.

On cherche à créer, à partir de l'observation de $(X_1, \dots, X_n)$, un test pour les hypothèses $H_0 : p = p^{\text{ref}}$ et $H_1 : p \neq p^{\text{ref}}$.

— Définition de l'estimateur $\hat{p}_n$ et de la distance D_n

— Théorème : sous H_0 , $D_n^2(\hat{p}_n, p^{\text{ref}}) \rightarrow \chi^2(d-1)$ en loi. Sous H_1 , $D_n^2(\hat{p}_n, p^{\text{ref}}) \rightarrow +\infty$ ps. (**DVT 2**)

Sources :

- Walter APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2024 [2]
 - Walter APPEL. *Mathématiques pour l'agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024 [1]
 - Xavier GOURDON. *Algèbre et probabilités*. Ellipses, 2021 [26]
-

1 Lois de variables aléatoires discrètes

1.1 Définition

- Définition d'une variable aléatoire discrète
- $(\mathbb{P}(X = x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ caractérise la loi, où $X(\Omega) \subset \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

1.2 Lois usuelles

- Présentation des lois usuelles avec exemple de modélisation à chaque fois : loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ (dé équilibré), loi de Bernoulli de paramètre p (pile ou face), loi binomiale (succession de pile ou face), loi géométrique (premier succès), loi de Poisson (loi des événements rares, exemple précis)
- Une loi binomiale est une somme de Bernoulli indépendantes
- Une loi géométrique de paramètre p peut s'écrire $\inf\{n \geq 1 \mid X_n = 1\}$ où (X_n) est une famille iid de Bernoulli de paramètre p
- Une loi géométrique est sans mémoire (et cela la caractérise)

1.3 Espérance et moments

- Définitions
- Exemple nombre moyen d'arrêts d'un ascenseur, nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev ? (et application)
- Problème du collectionneur (à étudier)

2 Fonction génératrice

- Définition
- Propriétés (rayon de convergence, croissance, convexité, lien moments-régularité en 0)
- Propriété (caractérise la loi)
- Exemple avec l'une des lois usuelles
- Propriété indépendance
- Exemple : deux dés indépendants ne peuvent être pipés pour que leur somme suive une loi uniforme
- Utilisation de la fonction génératrice pour obtenir une inégalité type Markov, exemple de la loi de Poisson (confrontation avec BT)
- Stabilité des lois binomiale et de Poisson
- Indécomposabilité des lois de Poisson (**DVT 1**)

3 Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a. iid suivant une loi de Rademacher de paramètre $1/2$. On considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour tout $n \geq 1$. On note $N_n = |\{S_0, \dots, S_n\}|$ le nombre de sites visités à l'instant n et $T = \inf\{n \geq 1 \mid S_n = 0\}$ le temps de premier retour en 0.

On veut déterminer un équivalent de $\mathbb{E}[N_n]$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- Lemme : Soit $n \geq 1$. Alors $\mathbb{E}[N_n] = 1 + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T > k)$.
- Lemme : on a le développement en série entière : pour $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n$.
- Théorème : lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\mathbb{E}[N_n] \sim 2\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$. (**DVT 1**)

Sources :

- Walter APPEL. *Mathématiques pour l'agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024 [1]
 - Vincent RIVOIRARD and Gilles STOLTZ. *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2012 [36]
-

1 Probabilités conditionnelles et notion d'indépendance

- Définition : probabilité conditionnellement à un événement A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$
- Théorème : $\mathbb{P}_A$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
- Définition : indépendance de deux événements
- Remarque : interprétation en terme de probabilités conditionnelles ($\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$).
- Définition : mutuelle indépendance d'une famille d'événements
- Contre-exemple : événements 2 à 2 indépendants mais non mutuellement indépendants
- Définition : indépendance de variables aléatoires

2 Caractérisations et propriétés de l'indépendance

2.1 Vecteurs aléatoires

- Théorème : soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire. Alors $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$.
- Application : convergence en loi d'une somme, d'un produit de variables aléatoires indépendantes
- Corollaire : soit $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires. On suppose que les X_i sont indépendantes, que les Y_i sont indépendantes, et que $X_i \sim Y_i$ pour tout i . Alors les vecteurs ont même loi.

2.2 Application à la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a.i.d. suivant une loi de Rademacher de paramètre $1/2$. On considère la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour tout $n \geq 1$. On note $N_n = |\{S_0, \dots, S_n\}|$ le nombre de sites visités à l'instant n et $T = \inf\{n \geq 1 \mid S_n = 0\}$ le temps de premier retour en 0.

On veut déterminer un équivalent de $\mathbb{E}[N_n]$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- Lemme : Soit $n \geq 1$. Alors $\mathbb{E}[N_n] = 1 + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T > k)$.
- Lemme : on a le développement en série entière : pour $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n$.
- Théorème : lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\mathbb{E}[N_n] \sim 2\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$. (**DVT 1**)

2.3 Fonctions caractéristiques

- Théorème : fonction caractéristique du vecteur aléatoire et indépendance
- Théorème : lemme des coalitions (repose sur le lemme des classes monotones, admis?)
- Application : fonction caractéristique de la somme d'une v.a. indépendante
- Exemple : stabilité des lois de Poisson ; indécomposabilité des lois de Poisson (avec les fonctions génératrices)
- Application : un calcul utile pour le TCL

2.4 Espérance et variance

- Théorème : Soit X, Y deux variables aléatoires réelles. X et Y sont indépendantes ssi pour toutes fonctions f, g mesurables positives ou bornées, $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$.
- Théorème : indépendance et espérance du produit
- Proposition : indépendance et variance de la somme
- Définition : covariance, variables non corrélées
- Proposition : indépendance implique décorrélation
- Réciproque pour les Bernoulli
- Remarque : les vecteurs gaussiens, ci-dessous, sont un exemple remarquable où l'on a la réciproque

3 Vecteurs aléatoires et vecteurs gaussiens

3.1 Vecteurs gaussiens

- Définition : vecteur gaussien (par combinaisons linéaires de ses composantes)
- Contre-exemple : $(Z, \varepsilon Z)$, où $Z \sim N(0, 1)$ et $\varepsilon \sim R(1/2)$ n'est pas un vecteur gaussien. Il ne suffit pas que chaque composante suive une loi normale.
- Définition : vecteur moyen, matrice de covariance
- Théorème : fonction caractéristique d'un vecteur gaussien
- Proposition : linéarité
- Proposition : caractérisation de l'indépendance
- Contre-exemple : pour le vecteur $(Z, \varepsilon Z)$, on a $\text{Cov}(Z, \varepsilon Z) = 0$ mais Z et εZ ne sont pas indépendants.
- Théorème central limite multiD
- Définition : loi du χ^2
- Lemme : la loi du χ^2 ne dépend que de $\|m\|$ et de d
- Théorème de Cochran (**DVT 2**)

4 Théorèmes limite et indépendance

4.1 Le lemme de Borel-Cantelli

- Théorème : Borel-Cantelli
- Contre-exemple : sans indépendance
- Exemple : dans une marche aléatoire asymétrique sur $\mathbb{Z}$, presque sûrement, on ne passe qu'un nombre fini de fois par 0.
- Application : condition suffisante de la convergence presque sûre.

4.2 La loi des grands nombres et le TCL

- Lois faible et forte des grands nombres
- Exemple : convergence d'une v.a.
- Théorème central limite
- Application 1 : intervalle de confiance asymptotique
- Application 2 : erreur Monte-Carlo

4.3 Application au test du χ^2 d'adéquation

- Lemme : soit X une va de loi p sur un ensemble fini $\llbracket 1, d \rrbracket$. Alors p est entièrement caractérisée par le vecteur $(\mathbb{P}(X = 1), \dots, \mathbb{P}(X = d))$, et la somme des coordonnées de ce vecteur vaut 1.

Soit $p = (p_1, \dots, p_d)$ une loi sur l'ensemble fini $\llbracket 1, d \rrbracket$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires iid de loi p . Soit p^{ref} une loi telle que $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, p_i^{\text{ref}} > 0$.

On cherche à créer, à partir de l'observation de $(X_1, \dots, X_n)$, un test pour les hypothèses $H_0 : p = p^{\text{ref}}$ et $H_1 : p \neq p^{\text{ref}}$.

- Définition de l'estimateur $\hat{p}_n$ et de la distance D_n
- Théorème : sous H_0 , $D_n^2(\hat{p}_n, p^{\text{ref}}) \rightarrow \chi^2(d-1)$ en loi. Sous H_1 , $D_n^2(\hat{p}_n, p^{\text{ref}}) \rightarrow +\infty$ ps. (**DVT 2**)

Références

- [1] Walter APPEL. *Mathématiques pour l'agrégation - Probabilités*. Deboeck, 2024.
- [2] Walter APPEL. *Probabilités pour les non-probabilistes*. H&K, 2024.
- [3] Michèle AUDIN. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
- [4] Vincent BECK, Jérôme MALICK, and Gabriel PEYRÉ. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005.
- [5] Sylvie BENZONI-GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2021.
- [6] Julien BERNIS and Laurent BERNIS. *Analyse pour l'agrégation - 40 développements*. Ellipses, 2018.
- [7] Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini, 2017.
- [8] Marc BRIANE and Gilles PAGÈS. *Théorie de l'intégration*. Deboeck, 2023.
- [9] Haim BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996.
- [10] Philippe CALDERO. *Carnet de voyage en Analystan*. Calvage et Mounet, 2022.
- [11] Philippe CALDERO and Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1*. Calvage et Mounet, 2017.
- [12] Philippe CALDERO and Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algébrerie*. Calvage et Mounet, 2022.
- [13] Michel DEMAZURE. *Cours d'algèbre*. Cassini, 2009.
- [14] Jean-Denis EIDEN. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009.
- [15] Mohammed EL AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.
- [16] Mohammed EL AMRANI. *Calcul différentiel*. Ellipses, 2019.
- [17] Mohammed EL AMRANI. *Suites et séries numériques - Suites et séries de fonctions*. Ellipses, 2025.
- [18] Jacques FARAUT. *Calcul intégral*. EDP Sciences, 2006.
- [19] Francis FILBET. *Analyse numérique*. Dunod, 2009.
- [20] Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, and Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS mathématiques volume 1*. Cassini, 2019.
- [21] Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, and Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS mathématiques volume 3*. Cassini, 2020.
- [22] Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA, and Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS mathématiques volume 6*. Cassini, 2022.
- [23] Olivier GARET and Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. Ellipses, 2011.
- [24] Stéphane GONNORD and Nicolas TOSEL. *Topologie et analyse fonctionnelle - Thèmes d'analyse pour l'Agrégation*. Ellipses, 1996.
- [25] Xavier GOURDON. *Analyse*. Ellipses, 2020.
- [26] Xavier GOURDON. *Algèbre et probabilités*. Ellipses, 2021.
- [27] Stéphane GOURMELEN and Hicham WADI. *Équations différentielles - Théories, algorithmes et modèles*. Ellipses, 2008.
- [28] Ivan GOZARD. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009.
- [29] Joseph GRIFONE. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2024.
- [30] Francis HIRSCH and Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2000.
- [31] Yves LADEGAILLERIE. *Géométrie - Affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, 2003.
- [32] Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2024.
- [33] Roger MANSUY and Rached MNEIMNÉ. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. Deboeck, 2022.
- [34] Hervé QUEFFÉLEC. *Topologie*. Dunod, 2025.
- [35] Martine QUEFFÉLEC and Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications*. Calvage et Mounet, 2023.
- [36] Vincent RIVOIRARD and Gilles STOLTZ. *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2012.
- [37] Jean-Étienne ROMBALDI. *Analyse matricielle*. EDP Sciences, 2019.
- [38] Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle (Deuxième édition)*. EDP Sciences, 2019.
- [39] Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. Deboeck, 2021.

- [40] Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation - Analyse et probabilités*. Deboeck, 2023.
- [41] François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2003.
- [42] Michelle SCHATZMAN. *Analyse numérique - Une approche mathématique*. Dunod, 2004.
- [43] Aviva SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009.
- [44] Patrice TAUVEL. *Analyse complexe pour la licence 3*. Dunod, 2020.
- [45] Félix ULMER. *Anneaux, corps, résultants*. Ellipses, 2018.
- [46] Félix ULMER. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2021.