

Retours d'oraux

Pierre LARIVÉ, année 2025-2026

Aux écrits, j'ai obtenu les notes suivantes :

- Mathématiques générales : 11.75 ;
- Analyse probabilités : 10.50.

Oral de leçon en algèbre et géométrie

J'ai tiré le couplage 101-158 et choisi la leçon 101. J'ai obtenu la note de 19.75.

Plan défendu dans les grandes lignes

1. Vocabulaire des actions de groupe
2. Théorèmes de Sylow
3. Actions de $GL_n(K)$ et classification
 - (a) Action par conjugaison et relation de similitude
 - (b) Action par congruence et formes quadratiques
4. Actions de groupes en géométrie
 - (a) Groupe d'isométrie laissant stables un polyèdre régulier
 - (b) Action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré

Mes deux développements étaient :

- Tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$;
- Action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré pour obtenir une partie génératrice de $SL_2(\mathbb{Z})$. (**Développement choisi par le jury**)

Questions

Sur le développement (notations : voir Szpirglas, *Mathématiques L3 Algèbre*, Pearson Education) :

- Réexpliquer l'inclusion $\langle S, T \rangle \subset SL_2(\mathbb{Z})$.
- Vous avez introduit du vocabulaire d'actions de groupe dans le plan (fidèle, transitive). Que peut-on dire de l'action de ce développement ?
- Comment calculer algorithmiquement une décomposition d'une matrice $A \in SL_2(\mathbb{Z})$?
- Déterminer l'image du domaine $\mathcal{D}$ par S . Que peut-on dire de l'image de droites, d'arcs de cercle par les éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$?
- Soit $\gamma(N) = \{M \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv I_2 \pmod{N}\}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe distingué de $SL_2(\mathbb{Z})$. Que peut-on dire de son action géométrique, de sa partie génératrice ?
- Qu'obtient-on en appliquant $z \mapsto e^{iz}$ au demi-plan de Poincaré ?

Sur le plan :

- Que peut-on dire d'un groupe d'ordre $2p$?
- Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

Oral de leçon en analyse et probabilités

J'ai tiré le couplage 229-235 et choisi la leçon 229. J'ai obtenu la note de 15.75.

Plan défendu dans les grandes lignes

1. Définition et caractérisations
 - (a) Fonctions monotones
 - (b) Fonctions convexes
2. Stabilités et régularités
 - (a) Stabilités
 - (b) Régularités
3. Inégalités de convexité
4. Optimisation
5. Fonctions de Lyapounov en équations différentielles

Mes deux développements étaient :

- Méthode du gradient à pas optimal (**Développement choisi par le jury**)
- Théorème de stabilité par les fonctions de Lyapounov

Questions

Sur le développement :

- Réexpliquer le début du développement (montrer que la fonctionnelle quadratique admet un unique minimum global)
- Pourquoi s'intéresse-t-on aux points critiques si l'on cherche des extrema ?

Sur le plan :

- Expliquer pourquoi la définition de la convexité correspond graphiquement à "la courbe de f se situe sous ses cordes".
- Montrer qu'une fonction monotone admet un nombre au plus dénombrable de discontinuité.
- Que devient la propriété "La courbe d'une fonction convexe se situe au-dessus de sa tangente" en un point où la fonction n'est pas dérivable ?
- Vous avez énoncé : si $f' > 0$, alors f est strictement croissante. Pourriez-vous donner une condition nécessaire et suffisante ?
- Exercice : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Oral de modélisation en option B : calcul scientifique

J'ai eu le choix entre un texte sur de l'optimisation et des moindres carrés, et un autre sur l'équation des ondes, des équations différentielles et l'étude qualitative des solutions. J'ai choisi le second texte. J'ai obtenu la note de 18.5.

Contenu du texte

Le texte portait sur les modes propres qui peuvent se propager sur une corde vibrante fixée à ses deux extrémités ou sur une membrane vibrante en forme de disque, dont le bord est fixé. Le but était de déterminer les fréquences possibles pour une configuration donnée.

Dans une première partie, on nous explique comment aboutir à l'équation des ondes en appliquant le principe fondamental de la dynamique à un élément de corde, puis on donne l'expression de la solution sous forme de série de Fourier, une estimation d'énergie et le problème stationnaire avec conditions de bord que vérifie un mode propre possible : $-u''(x) = \omega^2 u(x)$ avec $u(0) = u(L) = 0$, L étant la longueur de la corde.

Dans une deuxième partie, on passe à l'étude d'une peau de tambour, donc une surface vibrante en forme de disque de rayon R . Par analogie avec la partie 1, on cherche des solutions non nulles au problème stationnaire $-\Delta u(x, y) = \omega^2 u(x, y)$ avec $u|_{\partial D(0, R)} = 0$. On procède à un changement de variable polaire $(x, y) \leftrightarrow (\rho, \theta)$, puis à une séparation des variables grâce à un développement en série de Fourier en θ à ρ fixé. Après un adimensionnement, on se ramène à chercher une solution à l'équation différentielle $r^2 y'' + r y' + (r^2 - n^2) y = 0$ avec $y(R) = 0$ sur $]0, R]$, où la solution recherchée est l'amplitude radiale d'une onde stationnaire se propageant sur la surface vibrante. Le texte nous explique alors que l'espace des solutions de l'équation différentielle (sans la condition de bord) est de dimension 2 et contient une droite de solutions prolongeables par continuité en 0. On en obtient une par développement en série entière : $J_n(r) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(r/2)^{2k+n}}{k!(k+n)!}$.

La fin de la deuxième partie est consacrée au calcul numérique de la solution J_n . On propose deux méthodes (les courbes à obtenir par ces méthodes et les paramètres utilisés figuraient dans le texte) :

- un schéma d'Euler implicite à partir de $r = 0$ où l'on calcule facilement $J_n(0)$ et $J'_n(0)$. Cela ne fonctionne plus à partir de $n = 2$ car la solution calculée est alors la solution nulle ;
- un schéma d'Euler explicite à partir de $r = h \ll R$ où l'on calcule de façon approchée $J_n(h)$, $J'_n(h)$ par les premiers termes de la série.

La dernière partie du texte consiste à localiser les zéros de la fonction J_n pour voir si celle-ci s'annule bien en $r = R$ et correspond à un mode propre admissible ou non. On localise les zéros de J_n par le théorème d'entrelacement des zéros de Sturm appliqué à la fonction $z(r) = \sqrt{r} J_n(r)$, solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sans terme d'amortissement. Cela permet de démontrer que J_n s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$, et que la suite croissante $(j_k)_k$ de ses zéros vérifie $j_{k+1} - j_k \leq \pi$ et $j_{k+1} - j_k \rightarrow \pi$ dans le cas $n = 0$, et $j_{k+1} - j_k \geq \pi$ et $j_{k+1} - j_k \rightarrow \pi$ dans le cas $n \geq 1$. On proposait ensuite d'utiliser une méthode de Newton pour localiser les zéros, en donnant l'expression de la dérivée de J_n et une formule intégrale à évaluer par méthode des rectangles à gauche.

Ma présentation et mon ressenti

J'ai proposé le plan suivant pour mon exposé intitulé "Modes propres d'instruments de musique" :

1. Modes propres d'une corde vibrante : partie modélisation par le PFD, puis explication que chercher des modes propres revient à chercher des solutions non nulles à un problème stationnaire.
2. Amplitude d'une onde stationnaire sur le tambour : j'explique rapidement qu'on passe en dimension 2 par analogie et j'admets l'expression de l'équation différentielle satisfaite par l'amplitude adimensionnée. J'écris et démontre le théorème détaillant la structure de l'espace des solutions, et j'explique les méthodes proposées pour la résolution numérique, puis je montre les courbes. J'ai dit au passage que je me demandais si les schémas convergeaient. Je savais le montrer pour le deuxième, mais pas pour le premier. J'ai essayé de réaliser une courbe d'erreur, mais ça n'a pas marché.
3. Recherche des zéros de la solution : je calcule les dérivées de la fonction z pour obtenir l'équation qu'elle satisfait, puis j'explique qu'on dispose de méthodes pour localiser les zéros de telles équations en encadrant le coefficient. Puis avec les conclusions (je ne détaille pas comment on les obtient), je propose une méthode pour trouver consécutivement les zéros de J_n en trouvant le premier par Newton en localisant graphiquement celui-ci, puis en se décalant de $+\pi$ pour initialiser une nouvelle méthode de Newton, et ainsi de suite.

J'étais content de tirer ce texte car je connaissais les méthodes de recherche des zéros et j'aime les équations différentielles. J'ai peut-être été un peu trop ambitieux en couvrant tout le texte, ce qui a rendu certains passages de ma présentation confus car je devais me dépêcher et éluder certains détails. J'ai trouvé que les indications de preuves des théorèmes figurant dans le texte étaient bien plus précises que celles des textes sur lesquels nous nous sommes entraînés dans l'année. Presque tout était déjà fait.

Le tableau était grand (deux double-tableaux à craie) et l'écran de projecteur se trouvait en plein milieu, donc il fallait cacher le tableau pour montrer des résultats. Le jury était composé de quatre personnes, et un auditeur a assisté à l'oral.

Questions pendant l'échange

- Que se passe-t-il si on calcule les zéros jusqu'à très loin par la méthode proposée ?
- Réexpliquer l'utilisation du wronskien dans la preuve de la partie 2
- Expliquer comment on étudie la convergence d'un schéma d'Euler explicite.
- Expliquer le choix du facteur $\sqrt{r}$ dans la définition de z .
- Expliquer ce que signifie le théorème d'entrelacement de Sturm et détailler son application.
- Réaliser l'estimation d'énergie proposée au début dans le texte.
- Comment montrerait-on que la solution sous forme de série de Fourier proposée au début du texte est effectivement solution ? De quelles hypothèses aurait-on besoin ?