

Introduction à la géométrie non-euclidienne à travers l'étude des sphères de la géométrie Sol

Pierre LARIVÉ

Année 2023-2024

Introduction

La géométrie non-euclidienne fait son apparition dès que l'on s'intéresse à des espaces métriques différents des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ habituels. L'objectif de mon stage était de se familiariser avec l'étude de telles géométries, à travers plusieurs exemples, afin d'en observer certaines propriétés.

Tout d'abord, je me suis intéressé à la géométrie hyperbolique dans le plan pour comprendre la notion de modèle d'une géométrie et l'intérêt de disposer de plusieurs modèles. Cela m'a permis d'introduire les notions fondamentales d'isométries, de géodésiques, ou encore de métrique locale. Le but était ensuite d'utiliser ces outils pour prouver grâce à la géométrie hyperbolique un théorème de géométrie s'énonçant de façon classique.

Ensuite, j'ai étudié l'exemple de la géométrie Sol en dimension 3. L'objectif de ce développement était de comprendre la forme des sphères métriques de cet espace, en caractérisant les géodésiques par les équations différentielles.

Par contrainte de longueur du rapport, j'ai choisi de ne présenter que cette deuxième partie. On introduit un exemple de géométrie non-euclidienne en dimension 3 : la géométrie Sol. On va plus particulièrement s'intéresser à la forme des sphères métriques de Sol et se demander si elles sont homéomorphes ou difféomorphes à la sphère euclidienne.

Tout d'abord, on motive et on définit la géométrie Sol. Ensuite, on s'appuie sur la caractérisation des géodésiques par des équations différentielles pour construire un lien entre les sphères euclidiennes et les sphères de Sol, à travers l'application exponentielle riemannienne. L'enjeu est alors de comprendre sur quels ensembles cette application exponentielle pourra jouer le rôle d'homéomorphisme ou de difféomorphisme, pour établir enfin la forme des sphères de Sol.

Remerciements

Je remercie l'Institut Mathématique de Bourgogne pour l'accueil chaleureux qui m'a été réservé, et mon maître de stage Rémi COULON pour son encadrement et sa disponibilité.

Table des matières

1	La géométrie Sol	4
2	Caractérisation des géodésiques par les équations différentielles	4
2.1	Lien entre géodésiques et équations différentielles	4
2.2	Réduction à un système dynamique sur la sphère unité	7
2.3	Étude du système dynamique	8
2.4	Résolution numérique	10
3	Application exponentielle	11
3.1	Vecteurs petits, parfaits, grands	12
3.2	À quoi ressemble l'exponentielle d'un vecteur ?	15
4	Le théorème de cut locus	22
4.1	Vers l'application exponentielle comme difféomorphisme	22
4.1.1	Application exponentielle sur les vecteurs parfaits	22
4.1.2	Application exponentielle sur les vecteurs petits	25
4.1.3	Séparation des images des vecteurs petits et parfaits	28
4.2	Fonction propre et difféomorphisme	29
4.3	Le théorème de cut locus	30
5	La forme des sphères de Sol	31

1 La géométrie Sol

On munit $\mathbb{R}^3$ d'une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{z_1}x_2 + x_1 \\ e^{-z_1}y_2 + y_1 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

On vérifie que $(\mathbb{R}^3, *)$ est un groupe non commutatif, de neutre $(0, 0, 0)$. On notera dans toute la suite X ce groupe.

La motivation de la géométrie Sol est de munir X d'une métrique telle que X agisse à gauche sur lui-même par isométrie.

Proposition 1 *Choix de la métrique adaptée*

On munit X de la métrique locale $ds^2 = e^{-2z}dx^2 + e^{2z}dy^2 + dz^2$.

Alors pour tout $P \in X$, l'application

$$L_P : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \\ Q & \mapsto & P * Q \end{array}$$

est une isométrie.

Preuve.

Soit $P = (a, b, c) \in X$, et $\gamma = (x, y, z) : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin $\mathcal{C}^1$.

Alors :

$$\begin{aligned} L(L_P \circ \gamma) &= \int_0^1 \sqrt{e^{-2(z+c)}e^{2c}\dot{x}(t)^2 + e^{2(z+c)}e^{-2c}\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{e^{-2z}\dot{x}(t)^2 + e^{2z}\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

D'après la caractérisation des isométries par la longueur des chemins (lemme ...), L_P est une isométrie. 

2 Caractérisation des géodésiques par les équations différentielles

2.1 Lien entre géodésiques et équations différentielles

Dans cette partie, on va caractériser les géodésiques par des équations différentielles en étudiant leur propriété de minimisation.

Définition 2 *Géodésique*

Soit $\gamma : I \rightarrow X$ un chemin de classe $\mathcal{C}^2$.

On dit que γ est une géodésique s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall t_0 \in I, \exists \delta > 0, \forall t, t' \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], d(\gamma(t), \gamma(t')) = c|t - t'|.$$

Cette définition signifie que la géodésique minimise localement la longueur entre ses points. Elle impose que le chemin qui parcourt la géodésique soit paramétré proportionnellement à la longueur d'arc, i.e. $\|\dot{\gamma}(t)\| = c$. On commence par caractériser un segment géodésique entre deux points par la minimisation d'une quantité appelée énergie.

Définition 3 Énergie

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un chemin de classe $\mathcal{C}^2$.

On appelle énergie associée à γ la quantité :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \in \mathbb{R}_+.$$

Dans Sol, conformément à la métrique locale, en notant $\gamma = (x, y, z)$, on a $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = e^{-2z(t)} \dot{x}(t)^2 + e^{2z(t)} \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2$.

Lemme 4 Lien entre énergie et géodésiques

Soit $a < b$ deux réels,

P, Q deux points de X ,

$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}^2([a, b], X) \mid \gamma(a) = P, \gamma(b) = Q\}$,

$\gamma_0 \in \Gamma$.

Alors $E(\gamma_0) = \inf_{\gamma \in \Gamma} E(\gamma) \Leftrightarrow \gamma_0$ est une géodésique.

Preuve.

Pour $\gamma \in \Gamma$, on applique à $L(\gamma)$ l'inégalité de Cauchy-Schwartz associée au produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ sur $\mathcal{C}^2([a, b], X)$:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \left(\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2(b-a)E(\gamma)}$$

avec égalité si et seulement si γ est paramétré proportionnellement à la longueur d'arc.

Supposons que γ_0 soit une géodésique. Soit $\gamma \in \Gamma$. Alors, γ_0 étant paramétré proportionnellement à la longueur d'arc :

$$E(\gamma_0) = \frac{L(\gamma_0)^2}{2(b-a)} \leq \frac{L(\gamma)^2}{2(b-a)} \leq E(\gamma).$$

Donc γ_0 minimise l'énergie.

Réciproquement, supposons que γ_0 minimise l'énergie sur Γ . Si $\gamma \in \Gamma$, on note $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ le chemin γ reparamétré proportionnellement à la longueur d'arc. Soit $\gamma \in \Gamma$. Alors :

$$L(\gamma_0) \leq \sqrt{2(b-a)E(\gamma_0)} \leq \sqrt{2(b-a)E(\tilde{\gamma})} = L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma).$$

Donc γ_0 minimise la longueur. γ_0 est bien paramétré proportionnellement à la longueur d'arc car sinon $E(\tilde{\gamma}_0) < E(\gamma_0)$. γ_0 est une géodésique. 

Pour caractériser les géodésiques entre deux points P et Q de X fixés, on cherche donc à minimiser l'application

$$E : \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \gamma \mapsto \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \end{array} \right. \quad \text{où} \quad F : \left\{ \begin{array}{l} TX \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y, z, \xi, \eta, \tau) \mapsto \frac{1}{2} (e^{-2z}\xi^2 + e^{2z}\eta^2 + \tau^2) \end{array} \right.$$

Dans la fonction F ci-dessus, $TX = \{(P, V) \mid P \in X, V \in T_P X\}$ est appelé fibré tangent de X . Notre étude ici est grandement simplifiée par le fait que $TX = \mathbb{R}^6$ car pour tout $P \in X$, $T_P X = \mathbb{R}^3$. On peut donc perturber librement un chemin tracé dans X sans risquer de sortir de X .

On fixe à présent $\gamma \in \Gamma$, et on suppose que γ est un minimum local de E .

Soit $\nu \in \mathcal{C}^2([a, b], X)$ telle que $\nu(a) = \nu(b) = 0$ une perturbation. On pose, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\gamma_\varepsilon = \gamma + \varepsilon\nu$. Comme γ est un minimum local, on a $\frac{dE(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon}(0) = 0$.

On vérifie que le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{dE(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon}(0) &= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(\gamma_\varepsilon(t), \dot{\gamma}_\varepsilon(t))|_{\varepsilon=0} dt \\ &= \int_a^b [\partial_P F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \nu(t) + \partial_V F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\nu}(t)] dt \end{aligned}$$

où $\partial_P F$ et $\partial_V F$ désignent les gradients partiels de F selon $P \in X$ et $V \in T_P X$, et $\cdot$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

On procède à une intégration par parties sur la deuxième partie de l'intégrale, le produit scalaire étant bilinéaire :

$$\begin{aligned} \int_a^b \partial_V F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\nu}(t) dt &= [\partial_V F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \nu(t)]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \partial_V F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \nu(t) dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} \partial_V F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \cdot \nu(t) dt \end{aligned}$$

car $\nu(a) = \nu(b) = 0$.

On obtient finalement :

$$\int_a^b \left[\partial_P F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \partial_V F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] \cdot \nu(t) dt = 0.$$

En appliquant le lemme ci-dessous, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\partial_P F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \partial_V F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$$

Lemme 5

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^d)$ telle que $\forall g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^d), \int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle dt = 0$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire habituel dans $\mathbb{R}^d$).

Alors $f = 0$.

Preuve.

Supposons $f \neq 0$. Alors par continuité de f , quitte à permuter les coordonnées et à changer le signe de f , il existe $[t_1, t_2] \subset]a, b[$ tel que la première coordonnée de f soit strictement positive sur $[t_1, t_2]$.

On définit alors $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^d)$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la première coordonnée qui est nulle en dehors de $]t_1, t_2[$, et strictement positive sur $]t_1, t_2[$. Alors

$$\int_a^b \langle f(t), g(t) \rangle dt > 0.$$

En calculant les dérivées apparaissant dans l'équation d'Euler-Lagrange, on trouve que si $\gamma = (x, y, z)$ est une géodésique, alors elle vérifie :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 2\dot{x}\dot{z} \\ \ddot{y} &= -2\dot{y}\dot{z} \\ \ddot{z} &= -e^{-2z}\dot{x}^2 + e^{2z}\dot{y}^2 \end{cases}$$

On admet qu'il existe un chemin $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $E(\gamma_0) = \inf_{\gamma \in \Gamma} E(\gamma)$. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 6 *Caractérisation des géodésiques par les équations différentielles*

Une courbe $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ est une géodésique si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 2\dot{x}\dot{z} \\ \ddot{y} &= -2\dot{y}\dot{z} \\ \ddot{z} &= -e^{-2z}\dot{x}^2 + e^{2z}\dot{y}^2 \end{cases} \quad (1)$$

Étudions à présent l'existence et l'unicité de solutions globales à (1). On vectorise le système en écrivant $(1) \Leftrightarrow \dot{U} = F(U)$ où

$$U = (x, y, z, \xi, \eta, \tau) \text{ et } F(U) = (\xi, \eta, \tau, 2\xi\tau, -2\eta\tau, -e^{-2z}\xi^2 + e^{2z}\eta^2)$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ donc est continue, localement lipschitzienne. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (local), tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale $(]T_-, T_+[, U)$.

Supposons un instant $T_+ < +\infty$. D'après le théorème de sortie de tout compact, $\|U(t)\| \rightarrow +\infty$ lorsque t tend vers T_+ . Nécessairement, $|x(t)| \rightarrow +\infty$, $|y(t)| \rightarrow +\infty$ ou $|z(t)| \rightarrow +\infty$. En effet, l'une des coordonnées de U tend vers $+\infty$, et si par exemple $|\dot{x}(t)| \rightarrow +\infty$, alors $|x(t)| \rightarrow +\infty$.

Mais par ailleurs, en utilisant la métrique de Sol, $d(0, (x(t), y(t), z(t))) \leq L(\gamma|_{[0,t]}) = t \leq T_+$: contradiction car $d(0, (x(t), y(t), z(t))) \rightarrow +\infty$.

2.2 Réduction à un système dynamique sur la sphère unité

Si $\gamma = (x, y, z)$ est une solution de (1), on observe que la fonction $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = e^{-2z(t)}\dot{x}(t)^2 + e^{2z(t)}\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2$ est une intégrale première du mouvement. Cela signifie qu'en ramenant le vecteur vitesse à chaque instant en 0 par les isométries d'action à gauche de X , on obtient un système dynamique évoluant sur une sphère euclidienne (car T_0X est l'espace euclidien). En se limitant à des géodésiques paramétrées par longueur d'arc, le système obtenu évolue sur la sphère unité. Cette démarche est un premier rapprochement entre la géométrie de Sol et celle de l'espace euclidien.

Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ une courbe paramétrée tracée dans X , de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $u : t \mapsto (u_x(t), u_y(t), u_z(t))$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, d_0 L_{\gamma(t)} \cdot \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Comme $[d_0 L_\gamma(t)] = \begin{bmatrix} e^{z(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-z(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on en déduit :

$$\begin{cases} \dot{x} = e^z u_x \\ \dot{y} = e^{-z} u_y \\ \dot{z} = u_z \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \ddot{x} = e^z (\dot{u}_x + u_x u_z) \\ \ddot{y} = e^{-z} (\dot{u}_y - u_y u_z) \\ \ddot{z} = \dot{u}_z \end{cases}$$

En remplaçant, dans la caractérisation des géodésiques, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ par les expressions ci-dessus, on obtient la caractérisation suivante.

Théorème 7 *Caractérisation par un système dynamique sur la sphère unité*

Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ une courbe de classe $\mathcal{C}^2$.

On définit $u : t \mapsto \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix} = d_{\gamma(t)} L_{\gamma(t)}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$ le flot tiré en arrière.

Alors γ est une géodésique si et seulement si :

$$\begin{cases} \dot{u}_x = u_x u_z \\ \dot{u}_y = -u_y u_z \\ \dot{u}_z = -u_x^2 + u_y^2 \end{cases} \quad (2)$$

2.3 Étude du système dynamique

On étudie ici les points d'équilibre et les courbes intégrales du système dynamique (2).

On pose

$$F : \begin{matrix} \mathbb{S}^2 \\ (u_x, u_y, u_z) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \\ (u_x u_z, -u_y u_z, -u_x^2 + u_y^2) \end{matrix} \quad \text{ainsi que} \quad f : \begin{matrix} \mathbb{S}^2 \\ (u_x, u_y, u_z) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R} \\ u_x u_y \end{matrix}.$$

Proposition 8 *Courbes intégrales du système (2)*

Le système dynamique (2) admet six points d'équilibre :

- les points $(0, 0, \pm 1)$ sont instables. Les géodésiques associées sont les droites verticales de X .
- les points $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ sont stables mais pas asymptotiquement stables.

Les géodésiques associées aux courbes intégrales reliant les points d'équilibre $(0, 0, \pm 1)$ évoluent dans les plans $x = x_0$ ou $y = y_0$, et sont isométriques à des géodésiques hyperboliques. Les courbes intégrales restantes sont périodiques et parcourent l'une des lignes de niveaux de l'application $f : (x, y, z) \mapsto xy$.

Preuve.

On vérifie que les points u_0 proposés vérifient $F(u_0) = 0$.

Pour montrer l'instabilité des points $u_{\pm} = (0, 0, \pm 1)$, on calcule $[d_{u_{\pm}} F] = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ces

matrices admettent chacune une valeur propre de partie réelle strictement positive, donc d'après le théorème de linéarisation de Lyapounov, les points d'équilibre sont instables.

Par ailleurs, pour tout $P \in X$, $d_0 L_P \cdot u_{\pm} = u_{\pm}$, donc les géodésiques associées sont bien des droites verticales.

Si $u = (u_x, u_y, u_z)$ est une courbe intégrale, on observe que $u_x u_y$ est une intégrale première du mouvement. Donc u évolue sur la ligne de niveau $u_x(0)u_y(0)$ de f . Si $|u_x(0)|, |u_y(0)| > 0$, cette ligne de niveau est formée de deux boucles encerclant deux points d'équilibre opposés parmi les quatre points $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Cela justifie la stabilité de ces derniers points d'équilibre, ainsi que le domaine d'évolution des courbes intégrales restantes.

Les courbes intégrales reliant les points d'équilibre $(0, 0, \pm 1)$ évoluent sur les cercles unités des plans $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$. Elles sont donc associées à une condition initiale de la forme $u(0) = (0, b, c)$ avec $b = \sqrt{1 - c^2}$. On résout explicitement le système (2) dans ce cas.

Toute fonction $u = (u_x, u_y, u_z)$ avec $u_x = 0$ satisfait $\dot{u}_x = u_x u_z$ et $u_x(0) = 0$. Le système (2) devient :

$$\begin{cases} \dot{u}_y &= -u_y u_z \\ \dot{u}_z &= u_y^2 \end{cases}$$

On observe alors que $\ddot{u}_z = 2\dot{u}_y u_y = -2u_y^2 u_z = -2\dot{u}_z u_z = -\frac{d}{dt}(u_z^2)$. Donc $\dot{u}_z(t) - \dot{u}_z(0) = c^2 - u_z^2(t)$. Or $\dot{u}_z(0) = b^2$ et $b^2 + c^2 = 1$ d'où :

$$\frac{\dot{u}_z}{1 - u_z^2} = 1 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\dot{u}_z}{u_z + 1} - \frac{\dot{u}_z}{u_z - 1} = 2$$

On intègre et on utilise $\text{th}(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ pour obtenir :

$$u_z(t) = \frac{c \text{ch}(t) + \text{sh}(t)}{\text{ch}(t) + c \text{sh}(t)}$$

Puis comme $u_y = -u_y u_z$, on obtient $u_y(t) = \frac{b}{\text{ch}(t) + c \text{sh}(t)}$. Pour revenir aux géodésiques, on utilise :

$$\begin{cases} \dot{y} &= e^{-z} u_y \\ \dot{z} &= u_z \end{cases}$$

Après calculs, on obtient $\gamma(t) = (0, \frac{b \text{th}(t)}{1 + c \text{th}(t)}, \ln(\text{ch}(t) + c \text{sh}(t)))$. Si l'on envoie cette géodésique dans le demi-plan supérieur par l'homéomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y, e^{-z})$, on obtient l'expression d'une géodésique hyperbolique dans le modèle du demi-plan de Poincaré.

Soit enfin $u = (u_x, u_y, u_z)$ une courbe intégrale telle que $u_x, u_y \neq 0$, ne correspondant pas à un point d'équilibre. Alors u est périodique. En effet, u fait nécessairement un tour complet de la boucle sur laquelle elle évolue, car si jamais elle s'accumulait en un point, ce point serait un point d'équilibre. En notant alors $T > 0$ tel que $u(T) = u(0)$, les courbes u et $\tilde{u} : t \mapsto u(t + T)$ satisfont toutes deux le système (2) avec mêmes conditions initiales : elles sont égales. ■

N.B.

On observe que si $u = (u_x, u_y, u_z)$ est une courbe intégrale avec $u_x(0), u_y(0) \neq 0$, u_x et u_y sont de signe constant.

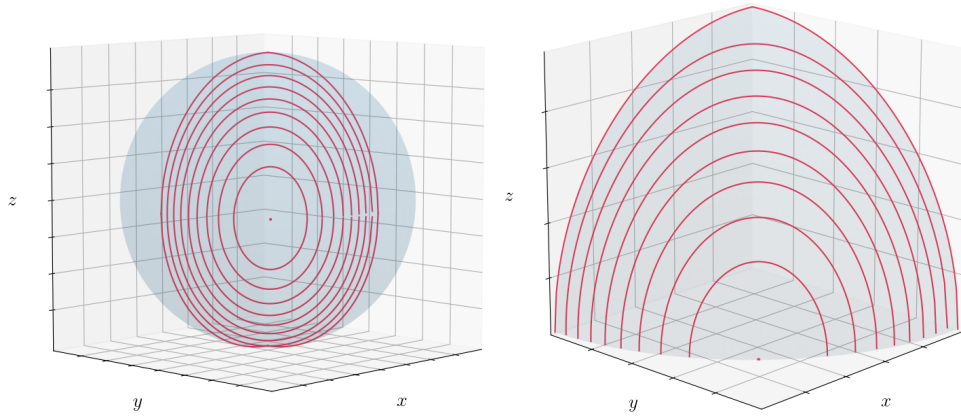


FIGURE 1 – Tracé des courbes intégrales (en rouge) sur la sphère unité (en bleu). On ne représente que les courbes avec $x, y \geq 0$ pour plus de lisibilité.

2.4 Résolution numérique

La caractérisation des géodésiques par les équations différentielles offre l'opportunité d'utiliser des méthodes de résolution numériques afin de visualiser les géodésiques de la géométrie Sol. En anticipant un peu, on peut aussi utiliser ces géodésiques pour tracer les sphères de Sol.

On utilise, pour réaliser les illustrations ci-dessous, un schéma numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 sur le système (1).

Pour tracer les sphères de Sol, on suit sur une longueur donnée un grand nombre de géodésiques minimisantes (qu'on détermine ci-dessous) partant dans toutes les directions.

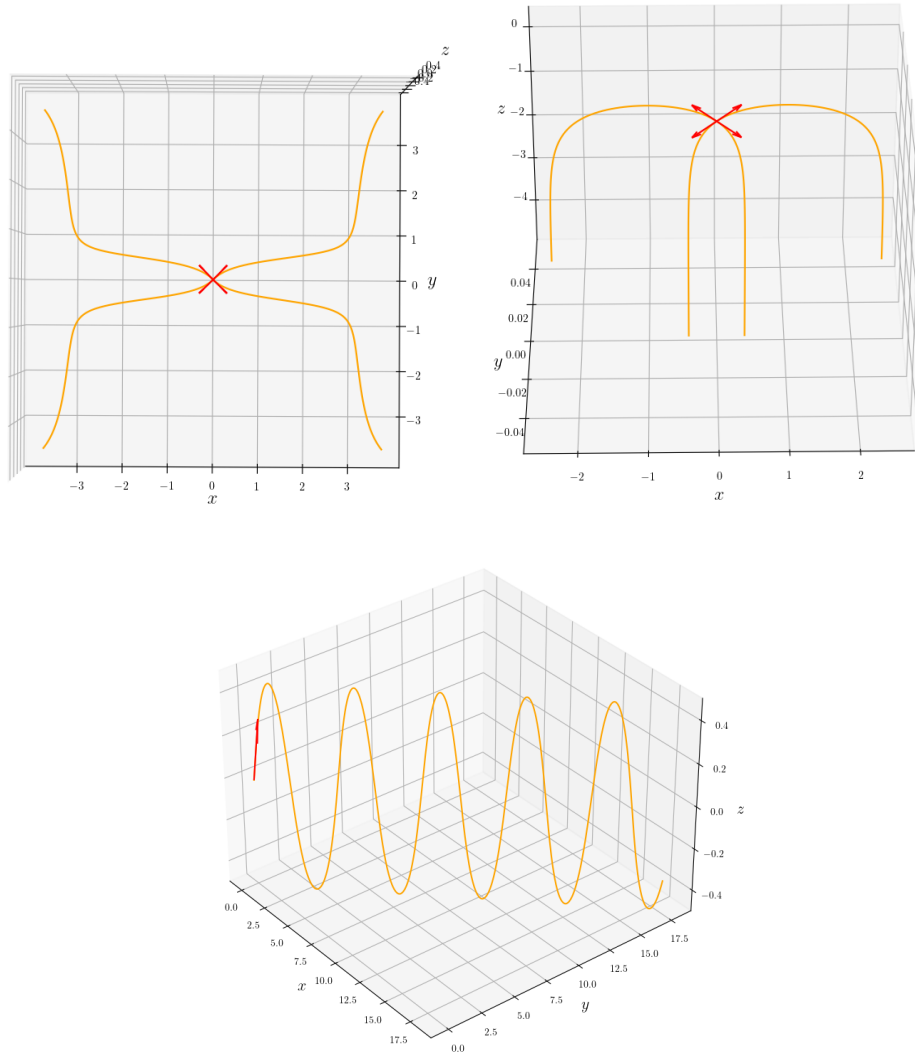


FIGURE 2 – Géodésiques (en orange) issues de 0 pour différents vecteurs initiaux (en rouge). A gauche, on observe la stabilité des secteurs $\{x > 0, y > 0\}$, $\{x > 0, y < 0\}$, $\{x < 0, y > 0\}$, $\{x < 0, y < 0\}$. A droite, on observe des géodésiques hyperboliques qui restent bien contenues dans les plans verticaux. En bas, on constate la périodicité du vecteur vitesse d’une géodésique.

3 Application exponentielle

L’application exponentielle riemannienne est l’outil fondamental qui va permettre de relier sphères euclidiennes de l’espace tangent et sphères métriques de Sol.

On introduit les notions que l’on va utiliser dans toute cette partie.

Définition 9 *Segment géodésique associé à un vecteur*

Soit $V \in T_0X$.

On appelle segment géodésique associé au vecteur V le chemin $\gamma_V : [0, \|V\|] \rightarrow X$ solution de (1) avec les conditions initiales $\gamma(0) = 0$, $\dot{\gamma}(0) = \frac{V}{\|V\|}$.

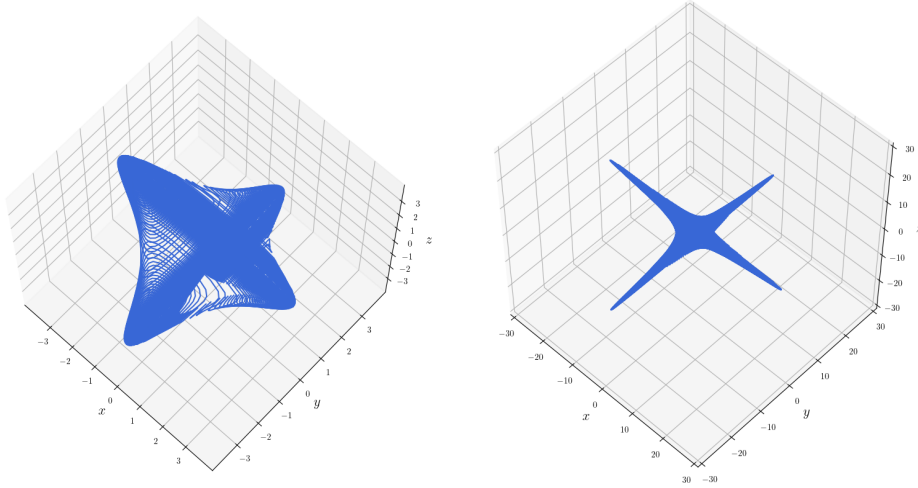


FIGURE 3 – Sphères de Sol de rayon 2 et 4.

Définition 10 *Ligne de flot associée à un vecteur*

Soit $V \in T_0X$.

On appelle ligne de flot associée au vecteur V le chemin $g_V : [0, \|V\|] \rightarrow \mathbb{S}^2$ solution de (2) avec les conditions initiales $g(0) = \frac{V}{\|V\|}$.

Si $V \in T_0X$, on a $\gamma_V = \gamma_{g(0)}$.

Une ligne de flot n'est rien d'autre qu'une courbe intégrale solution de (2) restreinte à un segment $[0, T]$.

Définition 11 *Application exponentielle*

On définit l'application exponentielle par :

$$\exp : \begin{cases} T_0X & \rightarrow & X \\ V & \mapsto & \gamma_V(\|V\|) \end{cases}.$$

On veut maintenant comprendre comment agit l'application exponentielle.

On commence par introduire une nouvelle grandeur associée aux vecteurs de l'espace tangent à l'origine, permettant de distinguer les vecteurs selon la façon dont l'application exponentielle agit sur eux.

3.1 Vecteurs petits, parfaits, grands

Définition 12 *Moyenne arithmético-géométrique*

Soit $\alpha_0, \beta_0 \geq 0$.

La moyenne arithmético-géométrique de α_0 et β_0 , notée $\text{AGM}(\alpha_0, \beta_0)$ est définie par :

$$\text{AGM}(\alpha_0, \beta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n, \text{ où } \begin{cases} \alpha_{n+1} &= \sqrt{\alpha_n \beta_n} \\ \beta_{n+1} &= \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n) \end{cases}$$

Pour $V = (x, y, z) \in T_0X$, on pose $\mu(V) = \text{AGM}(\sqrt{|xy|}, \frac{1}{2}\sqrt{(|x| + |y|)^2 + z^2})$.

Lemme 13 *Propriétés élémentaires de μ*

Soit $V = (x, y, z) \in T_0X$, $r \in \mathbb{R}$.

Alors :

- $\mu(rV) = |r|\mu(V)$;
- si $x, y \geq 0$ et $z = 0$, $\mu(V) = \text{AGM}(x, y)$.

Définition 14 *Vecteurs petits, parfaits, grands*

Soit $V \in T_0X$.

On dit que V est :

- petit si $\mu(V) < \pi$;
- parfait si $\mu(V) = \pi$;
- grand si $\mu(V) > \pi$.

Les résultats suivants visent à établir comment se répartissent les vecteurs petits, parfaits et grands dans T_0X .

Proposition 15 *Régularité de la période*

On définit la fonction période T , qui à un réel $a \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$ associe la période de la courbe intégrale partant de $(a, a, \sqrt{1 - 2a^2})$, solution de (2). Alors T est dérivable et :

$$\forall a \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[, T_a = \frac{\pi}{\text{AGM}(a, \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2a^2})} = \frac{\pi}{\mu\left((a, a, \sqrt{1 - 2a^2})\right)}, \text{ et } \frac{dT_a}{da}(a) < 0.$$

Preuve.

On admet la formule de la période, qui découle de la résolution explicite du système (2) à l'aide des intégrales elliptiques.

On montre que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 t + \beta^2 \sin^2 t}} = \frac{\pi}{2 \text{AGM}(\alpha, \beta)}$$

La formule étant vraie pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, on peut les supposer non nuls. On note $(\alpha_n), (\beta_n)$ les suites associées à α, β dans la définition de l'AGM. Pour $n \geq 1$, on effectue le changement de variable $u = \beta_n \tan(t)$ pour obtenir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha_n^2 \cos^2 t + \beta_n^2 \sin^2 t}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2 + \alpha_n^2)(u^2 + \beta_n^2)}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{\sqrt{(u^2 + \alpha_n^2)(u^2 + \beta_n^2)}}$$

On remplace alors dans la dernière intégrale $\alpha_n = \sqrt{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}$ et $\beta_n = \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2}$, puis on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{2} \left(v - \frac{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}{v} \right)$. On obtient après calculs la deuxième intégrale au rang $n - 1$. De là :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha_n^2 \cos(t) + \beta_n^2 \sin(t)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 t + \beta^2 \sin^2 t}}$$

On applique le théorème de convergence dominée à l'intégrale de gauche pour obtenir la formule voulue, en observant que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n, \beta_n \geq \min(\alpha, \beta)$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 \cos^2(t) + \beta_n^2 \sin^2(t)}} \leq \frac{1}{\min(\alpha, \beta)} \quad \text{qui est intégrable sur le segment } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ainsi, on obtient une expression plus pratique de T :

$$T : a \mapsto 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + \frac{1}{4}(1 + 2a^2) \sin^2 t}}$$

On applique le théorème de dérivation sous le signe somme. ■

Lemme 16 *Invariance de μ sur les lignes de niveaux*

Soit Θ une boucle d'une ligne de niveau non nul de l'application f définie en début de section 2.3,

$U, V \in \Theta$.

Alors $\mu(U) = \mu(V)$.

Preuve.

Soit $u = (u_x, u_y, u_z)$ une courbe intégrale parcourant Θ .

Si $u_x(0), u_y(0) > 0$, d'après la remarque en fin de section 2.3, $u_x, u_y > 0$. On vérifie alors que $u_x u_y$ et $(u_x + u_y)^2 + u_z^2$ sont deux intégrales premières du mouvement. Dans les autres cas, on adapte les deux intégrales premières choisies en observant la définition de μ . ■

Proposition 17 *Norme d'un vecteur petit, parfait, grand*

Soit $V = (x, y, z) \in T_0 X$ tel que $x, y \neq 0$,

T_V la période de la solution à (2) avec $u(0) = \frac{V}{\|V\|}$.

Alors :

- V est petit si et seulement si $\|V\| < T_V$;
- V est parfait si et seulement si $\|V\| = T_V$;
- V est grand si et seulement si $\|V\| > T_V$.

Preuve.

D'après le lemme 16 et la propriété 15, on sait que :

$$T_V = \frac{\pi}{\mu(\frac{V}{\|V\|})} = \frac{\pi}{\mu(V)} \|V\|.$$

Il suffit à présent de confronter cette formule à la définition 14 de vecteur petit, parfait, grand. ■

Cette propriété, associée à la régularité de la fonction période, permet de comprendre comment se répartissent les différents types de vecteurs dans l'espace tangent.

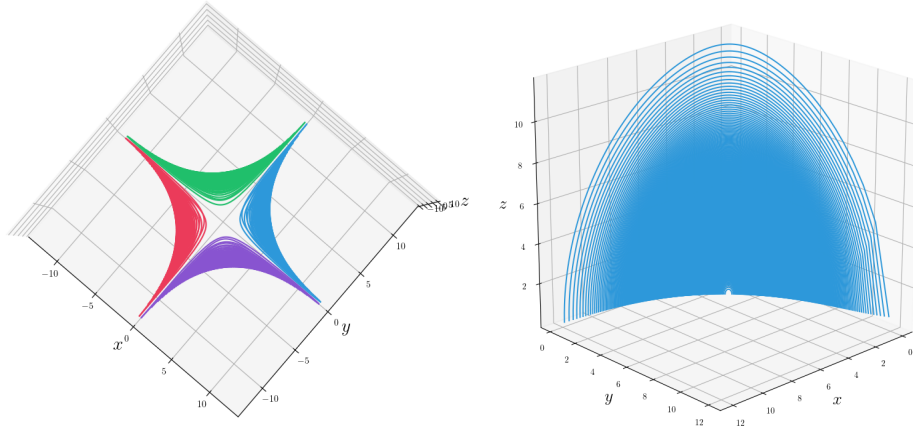


FIGURE 4 – Représentation de l'ensemble des vecteurs parfaits dans l'espace tangent T_0X . Il se divise en quatre surfaces dans chacun des quatre secteurs délimités par le signe de x et y , et on représente à droite les vecteurs parfaits à coordonnées positives. L'espace T_0X privé des vecteurs parfaits admet 5 composantes connexes. Celle contenant 0 forme l'ensemble des petits vecteurs, tandis que les quatre restantes forment l'ensemble des grands vecteurs.

Corollaire 18

Soit $V = (x, y, z) \in T_0X$ tel que $x, y \neq 0$,

g_V la ligne de flot associée à V ,

Θ la boucle d'une ligne de niveau de f contenant $\frac{V}{\|V\|}$.

Alors g_V parcourt...

- moins d'une fois Θ si et seulement si V est petit ;
- exactement une fois Θ si et seulement si V est parfait ;
- plus d'une fois Θ si et seulement si V est grand.

3.2 À quoi ressemble l'exponentielle d'un vecteur ?

Pour établir les résultats suivants, on va découper les lignes de flot de façon judicieuse et les suivre les unes après les autres. Cette démarche et son intérêt sont l'objet des deux lemmes suivants.

Lemme 19 Concaténation de lignes de flot

Soit $g_1 : [0, T_1] \rightarrow \mathbb{S}^2, g_2 : [0, T_2] \rightarrow \mathbb{S}^2$ deux lignes de flot telles que $g_1(T_1) = g_2(0)$.

On note $g = g_1|g_2 : [0, T_1 + T_2] \rightarrow \mathbb{S}^2$ la concaténation des deux lignes de flot, i.e telle que :

$$\begin{cases} g(t) = g_1(t) & , t \in [0, T_1] \\ g(t) = g_2(t - T_1) & , t \in [T_1, T_1 + T_2] \end{cases}$$

On note $T = T_1 + T_2$.

Alors $\exp(Tg(0)) = \exp(T_1g_1(0)) * \exp(T_2g_2(0))$.

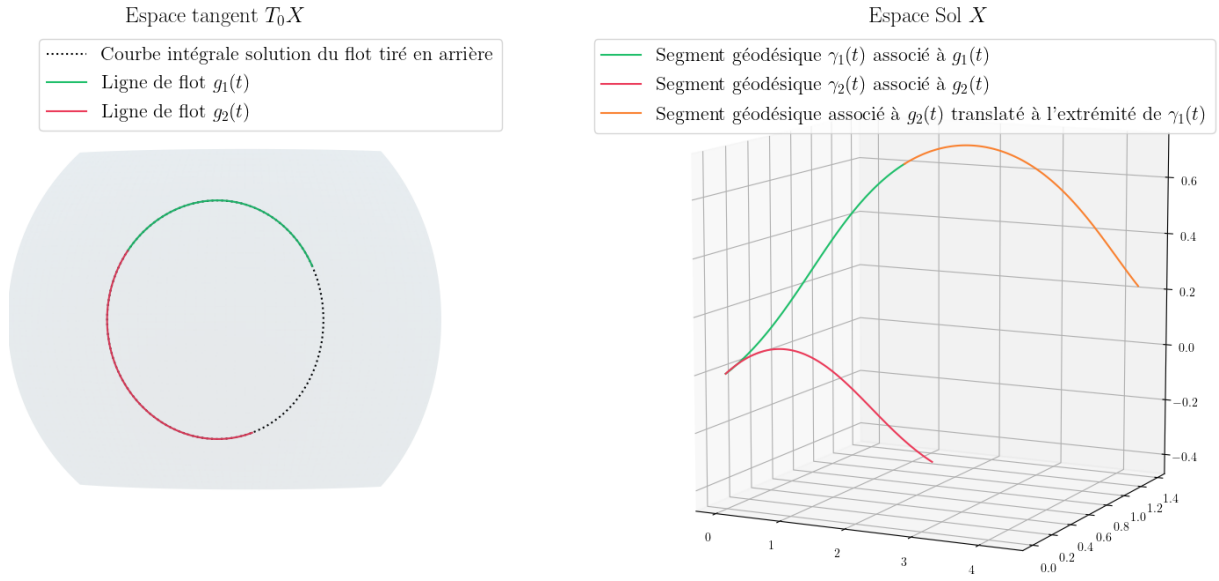


FIGURE 5 – Illustration de la concaténation de deux lignes de flots (en rouge et vert, à gauche). La translation de la deuxième géodésique est à comprendre au sens d'isométrie par action à gauche.

Preuve.

On note γ_1, γ_2 les géodésiques associées aux conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma_1(0) = 0 \\ \dot{\gamma}_1(0) = g_1(0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma_2(0) = 0 \\ \dot{\gamma}_2(0) = g_2(0) \end{cases}$$

On rappelle que si $P \in X$, L_P est l'isométrie $L_P : Q \in X \mapsto P * Q$.

On pose $\nu_1 : t \mapsto \gamma_1(t + T)$ et $\nu_2 : t \mapsto L_{\gamma_1(T_1)} \circ \gamma_2(t)$. Justifions que $\nu_1 = \nu_2$ en montrant que ce sont deux solutions de (1) avec mêmes conditions initiales.

Ce sont bien des solutions de (1) car γ_1, γ_2 le sont et car $L_{\gamma_1(T_1)}$ est une isométrie, donc envoie une géodésique sur une géodésique.

Ensuite, on a :

- $\nu_1(0) = \nu_2(0) = \gamma_1(T_1)$.
- $\dot{\nu}_1(0) = \dot{\gamma}_1(T_1) = d_0 L_{\gamma_1(T_1)} \cdot g_1(T_1)$ par définition de g_1 .
- d'après le théorème des fonctions composées, $\dot{\nu}_2(0) = d_{\gamma_2(0)} L_{\gamma_1(T_1)} \cdot \dot{\gamma}_2(0) = d_0 L_{\gamma_1(T_1)} \cdot g_2(0) = d_0 L_{\gamma_1(T_1)} \cdot g_1(T_1)$.

Ainsi, $\nu_1(T_2) = \nu_2(T_2)$ i.e. $\gamma_1(T_1 + T_2) = \gamma_1(T_1) * \gamma_2(T_2)$. ■

🔗 Lemme 20 Projection sur l'axe (Oz) et concaténation

Soit $g_1 : [0, T_1] \rightarrow \mathbb{S}^2, g_2 : [0, T_2] \rightarrow \mathbb{S}^2$ deux lignes de flot telles que $g_1(T_1) = g_2(0)$.

On note $g = g_1 | g_2$ la concaténation de g_1 et g_2 , $T = T_1 + T_2$ et π_z la projection sur l'axe (Oz).

Alors :

- $\pi_z[\exp(Tg(0))] = \pi_z[\exp(T_1 g_1(0))] + \pi_z[\exp(T_2 g_2(0))]$
- $\pi_z[\exp(Tg(0))] = \int_0^T \pi_z[g(t)] dt$.

Preuve.

Le premier point découle du lemme précédent et de la définition de la loi $*$, l'application π_z étant linéaire.

Pour le deuxième point, en rappelant que γ_V désigne la géodésique telle que $\gamma(0) = 0, \dot{\gamma}(0) = \frac{V}{\|V\|}$, on définit deux fonctions

$$A(T) = \int_0^T \pi_z(g(t))dt \quad \text{et} \quad B(T) = \pi_z(\gamma_{g(0)}(T)).$$

Montrons que A et B ont la même dérivée, ce qui montrera que $A = B$ car $A(0) = B(0)$.

D'une part, $\dot{A}(T) = \pi_z(g(T))$.

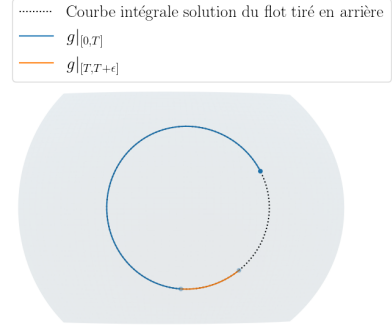
D'autre part, pour $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned} B(T + \varepsilon) - B(T) &= \pi_z(\gamma_{g(0)}(T + \varepsilon)) - \pi_z(\gamma_{g(0)}(T)) \\ &= \pi_z(\gamma_{g(T)}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

Donc $\frac{B(T+\varepsilon)-B(T)}{\varepsilon} = \pi_z\left(\frac{\gamma_{g(T)}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \rightarrow \pi_z(\dot{\gamma}_{g(T)}(0)) = \pi_z(g(T))$ lorsque ε tend vers 0.

D'où $\dot{B}(T) = \pi_z(g(T)) = \dot{A}(T)$. ■

Regarder la dernière coordonnée de l'exponentielle nous renseigne sur le moment où la géodésique que l'on suit recoupe le plan $\Pi = \{z = 0\} \subset X$.



Définition 21 Ligne de flot symétrique

Soit $V \in T_0X$.

On dit que la ligne de flot g_V est symétrique si ses extrémités sont de la forme (x, y, z) et $(x, y, -z)$. Deux vecteurs de cette forme sont dits partenaires.

On dira aussi que V est symétrique.

Lemme 22 Petites lignes de flot symétriques

Une petite ligne de flot $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ est symétrique si et seulement si $\exp(Tg(0)) \in \Pi$.

Preuve.

On suppose g symétrique. Montrons que $\int_0^T \pi_z(g(t))dt = 0$.

Soit $\sigma : (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ la symétrie par rapport au plan $\Pi = \{z = 0\}$. On définit $h : t \mapsto \sigma \circ g(T - t)$: il s'agit de la courbe symétrique à la ligne de flot g par rapport au plan Π , que l'on parcourt dans le sens inverse. Montrons que $g = h$ en montrant que h satisfait (2) et que $g(0) = h(0)$.

D'abord, $h(0) = \sigma \circ g(T) = g(0)$ car les extrémités de g sont partenaires.

Ensuite, en notant $g(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, on a $h(t) = (x_1(-t), y_1(-t), -z_1(-t)) =: (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$. On calcule alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = -\dot{x}_1(-t) = -x_1(-t)z_1(-t) = x_2(t)z_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -\dot{y}_1(-t) = y_1(-t)z_1(-t) = -y_2(t)z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = \dot{z}_1(-t) = -x_1^2(-t) + y_1^2(-t) = -x_2^2(t) + y_2^2(t) \end{cases}$$

Donc $g = h$. On note t_0 tel que $z_1(t_0) = 0$. On en déduit $z_2(t_0) = -z_1(T - t_0) = 0$. Ainsi, $t_0 = T - t_0$ d'où $t_0 = \frac{T}{2}$. Finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^T z_1(t) dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} z_1(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T z_1(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} z_1(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -z_1(T - t) dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} z_1(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^0 z_1(u) du \quad \text{en posant } u = T - t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, si g n'est pas symétrique, on découpe $g = g_1|g_2|g_3$ où g_1, g_3 sont symétriques, éventuellement vides, et g_2 est entièrement au-dessus ou en-dessous de Π . Alors, si g_i est définie sur $[0, T_i]$:

$$\begin{aligned} \pi_z[\exp(Tg)] &= \pi_z[\exp(T_1g_1)] + \pi_z[\exp(T_2g_2)] + \pi_z[\exp(T_3g_3)] \\ &= 0 + \int_0^{T_2} z_2(t) dt + 0 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Lemme 23 *Exponentielle d'un vecteur parfait (1)*

Si $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ est une ligne de flot associée à un vecteur parfait, alors $\exp(Tg(0)) \in \Pi$. De plus, si V_1, V_2 sont deux vecteurs parfaits tels que $\frac{V_1}{\|V_1\|}$ et $\frac{V_2}{\|V_2\|}$ sont sur une même boucle d'une ligne de niveau de f , en notant $\exp(V_1) = (a_1, b_1, 0)$ et $\exp(V_2) = (a_2, b_2, 0)$, on a $a_1b_1 = a_2b_2$.

Preuve.

On écrit $g = g_1|g_2$, où g_1, g_2 sont deux lignes de flot symétriques et petites. Par les lemmes 20 et 22, $\pi_z[\exp(Tg(t_0))] = 0$.

On note g_1, g_2 les deux lignes de flot associées à V_1, V_2 . On peut écrire $g_1 = u|v$ et $g_2 = v|u$ où $u : [0, T_u] \rightarrow \mathbb{S}^2$ et $v : [0, T_v] \rightarrow \mathbb{S}^2$ sont deux petites lignes de flot dont les extrémités sont les extrémités de g_1 et g_2 . On en déduit $\exp(V_1) = \exp(T_u u(0)) * \exp(T_v v(0))$ et $\exp(V_2) = \exp(T_v v(0)) * \exp(T_u u(0))$. Donc $\exp(V_2) = \exp(T_v v(0))^{-1} * \exp(V_1) * \exp(T_v v(0))$. En notant $\exp(T_v v(0)) = (x, y, z)$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-z}a_1 \\ e^z b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

D'où $a_1b_1 = a_2b_2$.

Lemme 24 *Exponentielle de vecteurs partenaires*

Soit V_+, V_- deux vecteurs partenaires.
Alors $\exp(V_+) = \exp(V_-)$.

Preuve.

On note $g_{\pm} : [0, T_{\pm}] \rightarrow \mathbb{S}^2$ les lignes de flot associées à $V_{\pm}$. De même que dans la preuve précédente, on peut écrire $g_+ = u|v$ et $g_- = v|u$ où u et v sont deux petites lignes de flot symétriques. On a donc la formule (3) avec $z = 0$, en vertu du lemme 22, d'où $\exp(V_+) = \exp(V_-)$. ■

Grâce à ce dernier lemme, on va pouvoir montrer qu'un segment géodésique associé à un vecteur grand ne peut être le chemin de longueur minimale entre ses deux extrémités. Ce résultat est important pour notre étude des sphères, car lorsqu'on décrira les sphères métriques de Sol par des images de vecteurs par l'application exponentielle, il faudra retirer les vecteurs grands, qui ne sont pas à la distance souhaitée de l'origine.

Définition 25 *Minimiseur*

Soit $\gamma : [T_1, T_2] \rightarrow X$ un segment géodésique.

On dit que γ est un minimiseur lorsque $L(\gamma) = d(\gamma(T_1), \gamma(T_2))$.

Proposition 26 *Segments géodésiques minimiseurs (1)*

Un segment géodésique associé à un vecteur grand n'est pas un minimiseur.

Preuve.

Soit $V \in T_0X$ un vecteur grand, et γ_V, g_V le segment géodésique et la ligne de flot associés à V . D'après le corollaire 18, g_V fait plus d'une fois le tour de la boucle sur laquelle elle évolue. On peut extraire de g_V une ligne de flot parfaite h associée à un vecteur parfait W tel que $\pi_z(W) \neq 0$, et dont l'extrémité finale n'est pas celle de g_V .

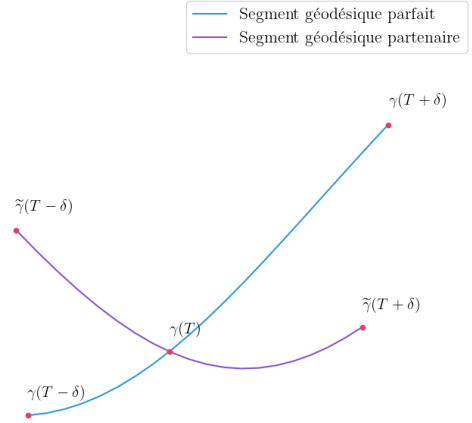
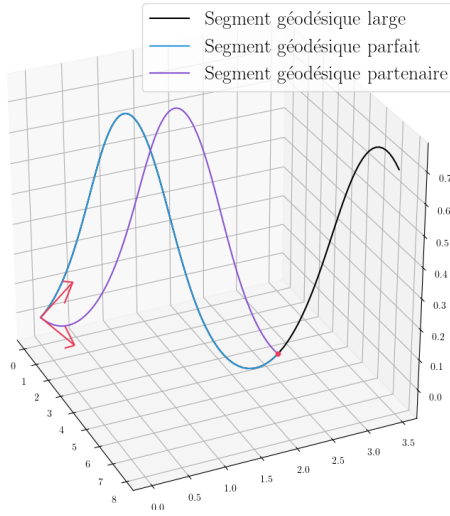
Quitte à faire agir une isométrie, on peut décaler l'origine temporelle et supposer ainsi que $h = g_V|_{[0, \|W\|]} = g_W$.

On note γ_W le segment géodésique associé à W . Si ce segment géodésique n'est pas un minimiseur, alors γ_V ne l'est pas non plus, car on peut trouver un chemin plus court reliant les extrémités de γ_W . (cf dessin, préciser avec des couleurs / légendes)

Supposons maintenant que γ_W soit un minimiseur, et montrons qu'il ne peut être prolongé en un segment géodésique minimiseur plus grand. Ainsi, γ_V ne pourra être un minimiseur.

D'après le lemme 24 sur les vecteurs partenaires, en notant $\tilde{W} \neq W$ le partenaire de W , on a $\exp(W) = \exp(\tilde{W})$. Le segment géodésique $\gamma_{\tilde{W}}$ est encore un minimiseur entre 0 et $\exp(W)$. On continue de noter $\gamma, \tilde{\gamma}$ les segments géodésiques $\gamma_W, \gamma_{\tilde{W}}$ prolongés au-delà de $[0, \|W\|]$. Pour alléger les notations, on note enfin $T = \|W\|$.

Par définition des géodésiques, il existe un voisinage $[T - \delta, T + \delta]$ sur lequel γ et $\tilde{\gamma}$ sont des minimiseurs.



Montrons que $\gamma|_{[0, T+\delta]}$ n'est pas un minimiseur. En suivant γ :

$$\begin{aligned} L(\gamma|_{[0, T+\delta]}) &= L(\gamma|_{[0, T]}) + L(\gamma|_{[T, T+\delta]}) \\ &= d(0, \gamma(T)) + d(\gamma(T), \gamma(T+\delta)) \end{aligned}$$

On remplace $d(0, \gamma(T))$ en suivant le segment géodésique $\tilde{\gamma}$:

$$L(\gamma|_{[0, T+\delta]}) = d(0, \tilde{\gamma}(T-\delta)) + d(\tilde{\gamma}(T-\delta), \tilde{\gamma}(T)) + d(\gamma(T), \gamma(T+\delta))$$

Or, la concaténation des segments géodésiques $\tilde{\gamma}|_{[T-\delta, T]}$ et $\gamma|_{[T, T+\delta]}$ n'est pas un segment géodésique, car n'est pas $\mathcal{C}^1$. Donc $d(\tilde{\gamma}(T-\delta), \gamma(T)) + d(\gamma(T), \gamma(T+\delta)) > d(\tilde{\gamma}(T-\delta), \gamma(T+\delta))$.

D'où, par inégalité triangulaire :

$$L(\gamma|_{[0, T+\delta]}) > d(0, \gamma(T+\delta))$$

Les deux derniers lemmes permettent d'obtenir des expressions plus explicites de l'exponentielle des vecteurs parfaits. ■

Lemme 27 *Exponentielle d'un vecteur parfait (2)*

Soit $x, z > 0$ tels que $V = (x, x, z)$ est un vecteur parfait.

Alors $\exp(V) = (h, h, 0)$ pour $h > 0$.

Preuve.

On note $V_+ = (x, x, z)$ et $V_- = (x, x, -z)$ son partenaire. D'après le lemme 24, $\exp(V_+) = \exp(V_-)$.

Définissons $\rho : (x, y, z) \mapsto (y, x, -z)$. On vérifie que ρ est une isométrie de Sol sur lui-même, car ρ est bijective et si γ est un chemin $\mathcal{C}^1$, $L(\rho \circ \gamma) = L(\gamma)$. Comme ρ est linéaire, sa différentielle $d_0 \rho$ lui est égale, mais est définie sur l'espace tangent en 0. On conserve donc cette notation.

Montrons que $\exp \circ d_0 \rho = \rho \circ \exp$.

Soit $U \in T_0 X$. On pose $\nu_1 = \rho \circ \gamma_U$ et $\nu_2 = \gamma_{d_0 \rho \cdot U}$. On montre que $\nu_1 = \nu_2$ en montrant que ce sont deux solutions du système (1) avec même conditions initiales. Car alors, $\nu_1(\|U\|) = \nu_2(\|U\|)$ correspond à l'égalité souhaitée.

D'une part, ν_1 et ν_2 sont solutions de (1) car $\gamma_U, \gamma_{d_0 \rho \cdot U}$ le sont, et ρ est une isométrie.

D'autre part :

- $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0$
- $\dot{\nu}_1(0) = d_0\rho \circ \dot{\gamma}_1(0) = d_0\rho \cdot \frac{U}{\|U\|}$
- $\dot{\nu}_2(0) = d_0\rho \cdot \frac{U}{\|U\|}$

On en déduit alors $\rho(\exp(V_+)) = \exp(d_0\rho \cdot V_+) = \exp(V_-) = \exp(V_+)$. De là, $\pi_z(\exp(V_+)) = 0$ et $\pi_x(\exp(V_+)) = \pi_y(\exp(V_+))$. La remarque en fin de section 2.3 donne $\pi_x(\exp(V_+)) > 0$. ■

📌 Lemme 28 *Lemme de réciprocity*

Soit $V = (x, y, z)$ un vecteur parfait.

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\exp(V) = \lambda(y, x, 0)$.

🔑 Preuve.

Soit $g : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ une courbe intégrale de (2) de période T telle que $x(0) = y(0)$ et $z(0) > 0$. On définit les fonctions a, b par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (a(t), b(t), 0) = \exp(Lg(t)).$$

Montrons que $\frac{a}{b} = \frac{y}{x}$ en montrant que ces deux fonctions satisfont le même problème de Cauchy. Tout d'abord, $\frac{a(0)}{b(0)} = \frac{y(0)}{x(0)}$ d'après le lemme précédent. Ensuite :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = -2z \frac{y}{x}.$$

Calculons finalement

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{b} \right) (t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{a(t+\varepsilon)}{b(t+\varepsilon)} - \frac{a(t)}{b(t)} \right) \right).$$

Pour mener ce calcul, on remarque, d'après le lemme 19 de concaténation de lignes de flot, que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\gamma_{g(t+\varepsilon)}(T) = \gamma_{g(t)}(\varepsilon)^{-1} * \gamma_{g(t)}(T) * \gamma_{g(t)}(\varepsilon) \quad (4)$$

car $\gamma_{g(t)}(\varepsilon)$ est la ligne de flot reliant $g(t)$ à $g(t+\varepsilon)$.

Par la formule de Taylor-Young, lorsque ε tend vers 0, $\gamma_{g(t)}(\varepsilon) = \varepsilon g(t) + o(\varepsilon)$ et $\gamma_{g(t)}(\varepsilon)^{-1} = \gamma_{g(t)}(-\varepsilon) = -\varepsilon g(t) + o(\varepsilon)$. En utilisant ces développements limités dans (4), on obtient :

$$\gamma_{g(t+\varepsilon)} = \begin{bmatrix} a(t+\varepsilon) \\ b(t+\varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon z(t))a(t) \\ (1 + \varepsilon z(t))b(t) \\ 0 \end{bmatrix} + o(\varepsilon).$$

Finalement, ces expressions donnent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{b} \right) = -2z \frac{a}{b}.$$

■

4 Le théorème de cut locus

Maintenant que l'on dispose de premiers résultats sur l'application exponentielle, on veut déterminer entre quels ensembles elle joue le rôle de difféomorphisme. L'objectif de cette section est de montrer le théorème ci-dessous.

On rappelle que $\Pi = \{z = 0\} \subset X$.

On s'intéresse aux ensembles suivants de l'espace tangent à l'origine (voir la figure 3.1 pour visualiser ces ensembles) :

- N' l'ensemble des petits vecteurs de T_0X
- $\partial N'$ l'ensemble des vecteurs parfaits de T_0X
- $\partial_0 N'$ l'ensemble des vecteurs parfaits de T_0X contenus dans le plan $\{z = 0\}$

On va les faire correspondre aux ensembles :

- $\partial_0 N = \exp(\partial_0 N') \subset \Pi$
- $\partial N \subset \Pi$ l'adhérence des points de Π que $\partial_0 N$ sépare de l'origine
- $N = X \setminus \partial N$

La bonne définition de ∂N mérite justification. Cela provient du fait que $\partial_0 N_+$ est le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^1$ en coordonnées polaires, difféomorphe à $\mathbb{R}$, dont les deux extrémités sont à l'infini. On montre ce fait dans la preuve du lemme 34.

Théorème 29 *Théorème de cut locus*

L'application exponentielle induit :

- un difféomorphisme de N' sur N ;
- un difféomorphisme local de $\partial N' \setminus \partial_0 N'$ sur $\partial N \setminus \partial_0 N$;
- un difféomorphisme de $\partial_0 N'$ sur $\partial_0 N$.

4.1 Vers l'application exponentielle comme difféomorphisme

Dans cette partie, on s'appuie sur les lemmes précédemment établis ainsi que sur de nouveaux outils pour démontrer des résultats intermédiaires permettant de prouver le théorème de cut locus.

4.1.1 Application exponentielle sur les vecteurs parfaits

Proposition 30 *Difféomorphisme local au voisinage de vecteurs parfaits*

Soit $V = (x, y, z)$ un vecteur parfait avec $x, y, z > 0$.

L'application exponentielle est un difféomorphisme local d'un voisinage de V sur un voisinage de $\exp(V)$.

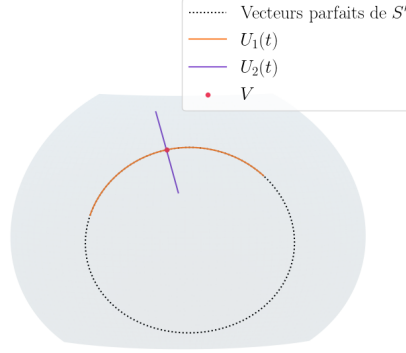
Preuve.

Appliquons le théorème d'inversion local en V , en montrant que $d_V \exp$ est inversible. On note S' la sphère centrée en 0 contenant V , T le plan tangent à S' en V , N la droite $\mathbb{R}V$, complémentaire orthogonal de T .

On admet que $d_V \exp \cdot T$ et $d_V \exp \cdot N$ sont orthogonaux (lemme de Gauss, cf lemme 3.70 de Gallot, Hulin, et Lafontaine, Riemannian geometry).

L'espace $d_V \exp \cdot N$ est de dimension 1 car l'exponentielle d'un vecteur non nul est non nulle.

Justifions alors que $d_V \exp \cdot T$ est de dimension 2 en exhibant deux vecteurs images linéairement indépendants. Pour cela, on propose deux chemins $U : t \mapsto U(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$, tracés sur S' tels que $U(0) = V$, qui fournissent $\exp(U)'(0) = d_V \exp \cdot U'(0) \in d_V \exp \cdot T$.



Soit U_1 se déplaçant à vitesse constante sur l'ensemble des vecteurs parfaits de S' , et passant par V à $t = 0$. D'après le lemme de réciprocity, on sait que si $U_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, alors on aura $\exp(U_1(t)) = \lambda(t)(y_1(t), x_1(t), 0)$, où λ est une fonction dérivable car x_1, y_1 sont dérivables et $\exp$ est différentiable.

Dans le plan $\{z = 0\}$, comme $V = (x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 > 0$, le point $(x_0, y_0, 0)$ n'est pas à une extrémité de la branche d'hyperbole décrite par $(x_1(t), y_1(t), 0)$. De là, une des alternatives suivantes est vraie :

- $x'_1(0) < 0$ et $y'_1(0) > 0$;
- $x'_1(0) > 0$ et $y'_1(0) < 0$.

$$\text{Il en découle que } d_V \exp \cdot U'_1(0) = \begin{bmatrix} \lambda'(0)y_1(0) + \lambda(0)y'_1(0) \\ \lambda'(0)x_1(0) + \lambda(0)x'_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ et ce quel que soit le signe}$$

de $\lambda'(0)$.

Ainsi, $d_V \exp \cdot T$ contient un vecteur non nul de la forme $(x, y, 0)$.

Soit U_2 se déplaçant à vitesse constante orthogonalement aux lignes de niveau de la fonction $(x, y, z) \mapsto xy$ sur la sphère, et passant par V à $t = 0$. Lorsque $t < 0$, U_2 parcourt les vecteurs grands, et lorsque $t > 0$, il parcourt les petits. On veut montrer que la troisième coordonnée de $\exp(U_2)'(0)$ est non nulle.

Soit $t > 0$. Notons g_t la ligne de flot associée à $U_2(t)$, et h_t le complémentaire de cette ligne de flot. Alors, en notant T_t la période associée à la ligne de niveau de f parcourue par g_t et h_t , et $T_0 = \|V\|$:

$$\begin{aligned} \pi_z[\exp(U_2(t))] &= \pi_z[\exp(\|U_2(t)\|g_t(0))] \\ &= -\pi_z[\exp((T_t - \|U_2(t)\|)h_t(0))] \end{aligned}$$

car $g_t|h_t$ est une ligne de flot associée à un vecteur parfait, et d'après le lemme 20

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{T_t - \|U_2(t)\|} \pi_z(h_t(s)) ds \\ &\leq -\varepsilon(T_t - T_0) \end{aligned}$$

pour t suffisamment proche de 0 et $\varepsilon > 0$.

Un raisonnement similaire donne, pour $t < 0$ suffisamment proche de 0, $\pi_z(\exp(U_2(t))) \geq \varepsilon(T_t - T_0)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\pi_z[\exp(U_2(t))] - \pi_z[\exp(V)]}{t} &= \frac{\pi_z[\exp(U_2(t))]}{t} \\ &\leq -\varepsilon \frac{T_t - T_0}{t} \\ &\rightarrow -\varepsilon \frac{dT_t}{dt} < 0 \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés de la fonction période (propriété 15).

Ainsi, $d_V \exp \cdot T$ contient un vecteur de troisième coordonnée non nulle. ■

Définition 31 *Invariant d'holonomie*

Soit V un vecteur parfait.

On note $(a, b, 0) = \exp(V)$. On définit l'invariant d'holonomie par $H(V) = \sqrt{|ab|}$.

D'après le lemme 23, H est constante sur les lignes de niveau de f , donc on peut la considérer comme fonction de la période T des courbes intégrales évoluant sur ces lignes de niveau.

Lemme 32 *Croissance et dérivabilité de l'invariant d'holonomie*

H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] \pi\sqrt{2}, +\infty[$, $H([\pi\sqrt{2}, +\infty[) =]\pi, +\infty[$ et $\frac{dH}{dT} > 0$ pour $T > \pi\sqrt{2}$.

Preuve.

On considère le chemin :

$$\gamma : \begin{cases}] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1[& \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ a & \mapsto T_a(a, a, \sqrt{1 - 2a^2}) \end{cases}$$

L'application $a \mapsto T_a$ est la fonction période définie dans la propriété 15. Le chemin γ est $\mathcal{C}^1$ car la fonction période l'est. On peut paramétrer γ différemment de sorte que $\gamma :] \pi\sqrt{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{S}^2$ soit toujours $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\forall T \in] \pi\sqrt{2}, +\infty[$, $\|\gamma(T)\| = T$.

Cela permet de définir la fonction H en fonction de T par $H : T \mapsto H(\gamma(T))$. La fonction H est alors $\mathcal{C}^1$ sur $] \pi\sqrt{2}, +\infty[$ car $\exp$ est $\mathcal{C}^1$ sur T_0X et γ sur $] \pi\sqrt{2}, +\infty[$.

Montrons que $H([\pi\sqrt{2}, +\infty[)$ n'est pas borné.

D'abord, $H(\pi\sqrt{2}) = \pi$ car $\exp((\pi, \pi, 0)) = (\pi, \pi, 0)$.

Ensuite, soit $R > \pi$, et $V = (x, y, z) \in T_0X$ le vecteur de norme minimale tel que $E(V) = (R, R, 0)$. Le segment géodésique associé à V est un minimiseur donc V est petit ou parfait. Il existe alors $\lambda \geq 1$ tel que λV soit un vecteur parfait. Comme $x, y > 0$ (car sinon $\exp(V) = 0$), la géodésique issue de 0 et de vecteur initial $\frac{V}{\|V\|}$ n'est jamais tangente aux plans $\{x = x_0\}$, $\{y = y_0\}$, donc ses coordonnées selon x et y sont croissantes. De là, en notant $\exp(\lambda V) = (a, b, 0)$, on a $a, b \geq R$, puis $H(\lambda V) \geq R$.

Finalement, montrons que $\frac{dH}{dT} > 0$ pour $T > \pi\sqrt{2}$. Avec le fait que H n'est pas bornée, on obtiendra également le deuxième point à montrer.

Supposons un instant qu'il existe $T_0 > \pi\sqrt{2}$ tel que $H'(T_0) = 0$. En utilisant le chemin γ reparamétrisé ci-dessus, on sait, d'après le lemme 27, que $\exp(\gamma(T)) = (a(T), a(T), 0)$. Comme $H'(T_0) = 0$, on a $a'(T_0) = 0$. Mais alors $d_{V(T_0)} \exp$ n'est pas inversible, ce qui contredit la propriété 30 précédente. ■

🔗 Proposition 33 *Injectivité sur les vecteurs parfaits à coordonnées positives*

L'application exponentielle est injective sur l'ensemble des vecteurs parfaits à coordonnées positives.

== Preuve.

Soit $V_1 = (x_1, y_1, z_1), V_2 = (x_2, y_2, z_2) \in T_0 X$ deux vecteurs parfaits à coordonnées positives tels que $\exp(V_1) = \exp(V_2)$. Comme V_1, V_2 sont parfaits, on sait que $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$.

Alors $H(V_1) = H(V_2)$. Par stricte croissance de H selon la période, $\|V_1\| = \|V_2\|$. Ainsi, $\frac{V_1}{\|V_1\|}$ et $\frac{V_2}{\|V_2\|}$ sont sur la même ligne de niveau de f , donc $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

Par ailleurs, d'après le lemme de réciprocity, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. On obtient ainsi $V_1 = V_2$. ■

4.1.2 Application exponentielle sur les vecteurs petits

L'objectif de cette section est de démontrer que $\exp(N') \subset N$. Comme $N = X \setminus \partial N$, où $\partial N \subset \Pi$, cette propriété consiste seulement à comprendre ce qui se passe pour les vecteurs petits associés à une ligne de flot symétrique, dont l'exponentielle se trouve dans le plan. Par symétrie, et d'après le résultat sur les vecteurs partenaires, on peut également se limiter à l'étude des vecteurs à coordonnées positives.

On note :

- $\partial_0 N'_+$ l'ensemble des vecteurs parfaits du plan $\{z = 0\}$ dont les coordonnées sont positives ;
- $\partial_0 N_+ = \exp(\partial_0 N'_+)$;
- ∂N_+ l'adhérence des points que $\partial_0 N_+$ sépare de l'origine ;
- $(N')_+^{sym}$ l'ensemble des vecteurs petits et symétriques à coordonnées positives.

On va décrire $E((N')_+^{sym})$ par un ensemble de courbes paramétrées Λ_T , qui correspondent chacune aux images des vecteurs petits symétriques dont les lignes de flot évoluent sur la même ligne de niveau de f .

Soit $T > \pi\sqrt{2}$, et Θ la ligne de niveau de f sur laquelle évolue la courbe intégrale solution de (2) de période T . On note $p_0 = (x, y, 0) \in \Theta$ tel que $x > y$.

Pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$, on pose $V_t \in (N')_+^{sym}$ le vecteur associé à une ligne de flot g_{V_t} symétrique évoluant sur Θ , définie sur $[0, 2t]$ et telle que $g_{V_t}(t) = p_0$. En notant u_{p_0} la courbe intégrale solution de (2) avec $u_{p_0} = p_0$, on a alors $V_t = 2tu_{p_0}(-t)$. **Une illustration !** On définit ainsi :

$$\Lambda_T : \left[0, \frac{T}{2} \right[\begin{matrix} \rightarrow & \Pi \\ t & \mapsto \exp(V_t) \end{matrix}$$

On a alors :

$$E((N')_+^{sym}) = \bigcup_{T > \pi\sqrt{2}} \Lambda_T \left(\left[0, \frac{T}{2} \right[\right)$$

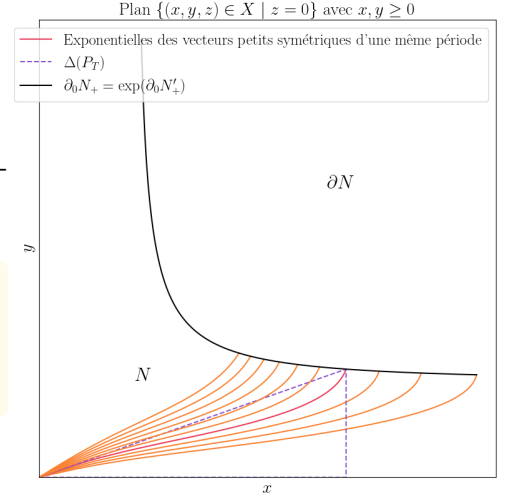
On note enfin :

- $P_T \in \Pi$ l'extrémité non nulle de Λ_T ;
- pour $P = (a, b, 0) \in \partial_0 N_+$, $\Delta(P)$ le triangle de sommets $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$ et $P = (a, b, 0)$.

Lemme 34 *Théorème d'évitement du triangle*

Soit $P = (a, b, 0) \in \partial_0 N_+$ tel que $a > b$.

Alors $\Delta(P) \cap \partial N_+ = \{P\}$.



Preuve.

Justifions que $\partial_0 N_+$ est le graphe d'une fonction $\mathcal{C}^1$ en coordonnées polaires, difféomorphe à $\mathbb{R}$, dont les deux extrémités sont à l'infini.

On commence d'abord par écrire $\partial_0 N'_+$ comme le graphe d'une fonction polaire. Cette fonction consiste à associer à chaque direction donnée par un angle θ la période associée à la ligne de flot rencontrée dans cette direction. On définit donc :

$$\rho : \begin{cases}]0, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \theta & \mapsto \frac{\pi}{\mu([\cos \theta, \sin \theta, 0])} \end{cases}$$

D'après la formule de la preuve de la propriété 15, on a :

$$\rho : \theta \mapsto 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 t + \sin^2 \theta \sin^2 t}}$$

On applique le théorème de dérivation sous le signe somme pour prouver que h est de classe $\mathcal{C}^1$. Enfin, ρ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers 0 ou vers $\frac{\pi}{2}$.

Passons à présent à $\partial_0 N_+$. Soit $V = (x, y, 0) \in \partial_0 N'_+$, formant un angle θ avec l'axe des abscisses. D'après le lemme de réciprocity, il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\exp(V) = \lambda(y, x, 0)$.

La fonction $r(\theta)$ que l'on cherche à définir doit donc vérifier $r(\theta) = \|\exp(V)\| = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}$. Or, $H(\rho(\theta)) = \lambda \sqrt{xy}$. On en déduit :

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy}} H(\rho(\theta)) = \sqrt{\frac{2}{\sin(2\theta)}} H(f(\theta))$$

L'application r est donc de classe $\mathcal{C}^1$. L'ensemble $\partial_0 N_+$ est alors bien difféomorphe à $\mathbb{R}$, et ses deux extrémités sont à l'infini car r tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers 0 ou $\frac{\pi}{2}$.

Venons-en à la preuve du lemme. On note $(x_\theta, y_\theta, 0)$ le point en coordonnées cartésiennes correspondant au point $(\theta, r(\theta))$ en coordonnées polaires. Alors l'application $\theta \mapsto x_\theta y_\theta$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ car ρ décroît strictement sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ d'après la propriété 15, et H est croissante.

Soit maintenant θ_0 l'angle entre l'axe des abscisses et l'hypothénuse de $\Delta(P)$. Alors $\theta_0 < \frac{\pi}{4}$ car $a > b$. Si $\theta > \theta_0$, le point $(\theta, r(\theta))$ ne peut être dans $\Delta(P)$. Si $\theta < \theta_0$, on a $x_\theta y_\theta > ab$ donc l'hyperbole $xy = ab$ sépare le point $(\theta, r(\theta))$ de $\Delta(P)$.

Donc $\Delta(P) \cap \partial_0 N_+ = \{P\}$, puis $\Delta(P) \cap \partial N_+ = \{P\}$. ■

Lemme 35 *Théorème du triangle englobant*

Pour tout $T > \pi\sqrt{2}$, on a $\Lambda_T \subset \mathring{\Delta}(P_T)$.

Preuve.

Soit $T > \pi\sqrt{2}$. On veut montrer que Λ_T n'intersecte aucun côté de $\Delta(P_T)$.

En notant $v = (x, y, z) : t \mapsto \frac{V_t}{2t} = \frac{\dot{V}_t}{\|V_t\|}$, comme $v(t) = u_{p_0}(-t)$, on sait que v satisfait le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -xz \\ \dot{y} &= yz \\ \dot{z} &= x^2 - y^2 \end{cases}$$

En utilisant le même argument que dans la preuve du lemme de réciprocity, en notant $(a(t), b(t), 0) = \exp(V_t)$, a et b vérifient :

$$\begin{cases} \dot{a} &= 2x + az \\ \dot{b} &= 2y - bz \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} \ddot{a} &= (x^2 - y^2 + z^2)a \\ \ddot{b} &= (-x^2 + y^2 + z^2)b \end{cases}$$

Comme on s'est limité aux vecteurs à coordonnées positives, on a $x, y, z, a, b > 0$. Comme $b > 0$, Λ_T n'intersecte pas le côté inférieur de $\Delta(P_T)$. Comme $\dot{a} = 2x + az > 0$, Λ_T est le graphe d'une fonction de a , donc elle n'intersecte pas le côté droit de $\Delta(P_T)$, car on sait que $\Lambda_T(t) \rightarrow P_T$ lorsque $t \rightarrow \frac{T}{2}$. Il reste donc à montrer que Λ_T n'intersecte pas l'hypothénuse de $\Delta(P_T)$, et se trouve en-dessous de celle-ci, ce qui revient à démontrer l'inégalité :

$$\forall t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[, \frac{b(t)}{a(t)} < \frac{b\left(\frac{T}{2}\right)}{a\left(\frac{T}{2}\right)} \text{ i.e. } \forall t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[, f(t) = \varphi(t) - \varphi\left(\frac{T}{2}\right) < 0$$

où $\varphi(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$.

Pour démontrer cette inégalité, on va montrer que $f(t) \rightarrow 0$ lorsque t tend vers 0 ou $\frac{T}{2}$, puis raisonner par l'absurde.

Comme a et b sont dérivables à droite en 0, et se prolongent continûment en deux fonctions nulles en 0 (car $V_t \rightarrow 0$ lorsque t tend vers 0), on applique la règle de l'Hôpital, puis on utilise le lemme de réciprocity :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{b(t)}{a(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{b}(t)}{\dot{a}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2y(t) - z(t)b(t)}{2x(t) + z(t)a(t)} = \frac{y(0)}{x(0)} = \frac{x(l)}{y(l)} = \frac{b(l)}{a(l)}.$$

Supposons à présent un instant qu'il existe $t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[$ tel que $f(t) \geq 0$. Alors il existe $t_0 \in \left]0, \frac{T}{2}\right[$ tel que f admet un maximum local en t_0 . Donc $\dot{f}(0) = 0, \ddot{f}(0) \leq 0$.

On définit $\psi = a\ddot{b} - \ddot{a}b = a^2\dot{\varphi} = a^2\dot{f}$. Alors $\dot{\psi} = 2a\dot{a}\dot{f} + a^2\ddot{f}$. Donc $\psi(t_0) = 0, \dot{\psi}(t_0) \leq 0$. On veut obtenir une contradiction sur ψ . Pour cela, on calcule $\dot{\psi}$ à partir des équations vérifiées par $\ddot{a}, \ddot{b}$:

$$\dot{\psi} = a\ddot{b} - \ddot{a}b = 2ab(y^2 - x^2)$$

On en déduit que $\dot{\psi} < 0$ sur $]0, \frac{T}{4}[$, et $\dot{\psi} > 0$ sur $]\frac{T}{4}, \frac{T}{2}[$. Donc $t_0 \leq \frac{T}{4}$. Mais alors, comme $\psi(t) \rightarrow 0$ lorsque t tend vers 0 :

$$\psi(t_0) = \int_0^{t_0} \psi'(t) dt < 0 : \text{contradiction.}$$

Proposition 36

$$\exp(N') \subset N$$

Preuve.

Soit $T > \pi\sqrt{2}$. Justifions d'abord que $\Lambda_T \cap \partial N_+ = \emptyset$.

D'après le théorème du triangle englobant, $\Lambda_T \subset \dot{\Delta}(P_T)$. En notant $P_T = (a, b, 0)$, vérifions que $a > b$ pour appliquer le théorème d'évitement du triangle. D'après le lemme de réciprocity, en notant $V_t = (x(t), y(t), z(t))$:

$$\frac{a}{b} = \frac{y\left(\frac{T}{2}\right)}{x\left(\frac{T}{2}\right)} = \frac{x(0)}{y(0)} > 1.$$

Supposons à présent par l'absurde qu'il existe un vecteur petit $V \in N'$ tel que $\exp(V) \in \partial N$. On peut supposer $x, y, z \geq 0$. Alors $\exp(V) \in \partial N_+$ et $x, y > 0$.

Si $\frac{V}{\|V\|}$ correspond au point critique $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, on a $V = (x, x, 0)$ avec $x < \pi$, puis $\exp(V) = (x, x, 0) \notin \partial N$. Ce cas est impossible.

Sinon, V est associé à une petite ligne de flot symétrique, car $\exp(V) \in \{z = 0\}$ (lemme 22). Donc $z > 0$. Mais alors, il existe $T > \pi\sqrt{2}$ et $t \in]0, \frac{T}{2}[$ tel que $V = \Lambda_T(t)$. D'où $\Lambda_T \cap \partial N_+ \neq \emptyset$: contradiction. ■

4.1.3 Séparation des images des vecteurs petits et parfaits

L'objectif est de montrer que les images par l'application exponentielle des vecteurs petits et parfaits sont disjointes. Pour cela, on commence par montrer un lemme portant sur ce qu'il se passe dans le plan, et qui resservira dans la preuve du théorème de cut locus.

Lemme 37

$$\exp(\partial N'_+ \setminus \partial_0 N'_+) \subset \partial N_+ \setminus \partial_0 N_+$$

Preuve.

Notons M' et M les deux ensembles du lemme.

On a montré que l'application exponentielle est injective sur l'ensemble $\partial N'_+$ des vecteurs parfaits à coordonnées positives. Par définition de $\partial_0 N_+$, on a $\exp(\partial_0 N'_+) = \partial_0 N_+$. On en déduit que $\exp(M') \subset \Pi \setminus \partial_0 N_+$.

L'ensemble M est une des deux composantes connexes de $\Pi \setminus \partial_0 N_+$. Comme M' est connexe et $\exp$ est continue, on sait que $\exp(M') \subset M$ ou que $\exp(M') \subset (\Pi \setminus \partial_0 N_+) \setminus M$.

D'après le lemme 27, si $(x, x, z) \in \partial N'_+$, alors $\exp((x, x, z)) = (h, h, 0)$. De plus, $H((x, x, z)) =$

$h^2 \rightarrow +\infty$ lorsque $\|(x, x, z)\|$ tend vers $+\infty$. La demi-droite formée par l'image de tels vecteurs intersecte alors nécessairement M , d'où $\exp(M') \subset M$. ■

🔗 Proposition 38

$$\exp(\partial N') \cap \exp(N') = \emptyset$$

≡ Preuve.

D'après le résultat précédent, et par symétrie, on a $\exp(\partial N' \setminus \partial_0 N') \subset \partial N$. Par définition, $\exp(\partial_0 N') = \partial_0 N \subset \partial N$. Ainsi, $\exp(\partial N') \subset \partial N$.

On a également établi que $\exp(N') \subset N$. Comme $N \cap \partial N = \emptyset$, on obtient $\exp(\partial N') \cap \exp(N') = \emptyset$. ■

🔗 Proposition 39 Segments géodésiques minimiseurs (2)

Un segment géodésique est un minimiseur si et seulement s'il est associé à un vecteur petit ou parfait.

≡ Preuve.

On a déjà montré le sens direct (propriété 26). Réciproquement, montrons que tout segment géodésique associé à un vecteur parfait est un minimiseur. Par restriction, tout segment géodésique associé à un vecteur petit sera également un minimiseur.

Soit $V_1 \in T_0 X$ un vecteur parfait, et $V_2 \in T_0 X$ de norme minimale tel que $\exp(V_1) = \exp(V_2)$. Supposons un instant que $\|V_2\| < \|V_1\|$. Par symétrie, on peut supposer que V_1 et V_2 sont tous deux à coordonnées positives.

D'après la propriété 26, V_2 est associé à un segment géodésique minimiseur donc c'est un vecteur petit ou parfait. Or $\exp(\partial N') \cap \exp(N') = \emptyset$ et $\exp(V_1) = \exp(V_2) \in \exp(\partial N')$, donc $V_2 \in \partial N'$. Par injectivité de l'application exponentielle sur les vecteurs parfaits à coordonnées positives, $V_1 = V_2$: contradiction. ■

4.2 Fonction propre et difféomorphisme

On montre ici un résultat général de topologie qu'on appliquera dans la preuve du théorème de cut locus.

Soit X un espace métrique séparé, Y un espace métrique séparé et connexe.

📖 Définition 40 Application propre

Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite propre si l'image réciproque par f de tout compact est compacte.

🔗 Lemme 41 Application propre et homéomorphisme

Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme local, propre.

Alors f est surjective.

≡ Preuve.

On montre que $f(X)$ est un ouvert-fermé non vide de Y connexe. Alors $f(X) = Y$.

Si $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x sur lequel f est un homéomorphisme. Alors $f(V)$ est un voisinage ouvert de $f(x)$ inclus dans $f(X)$. Cela montre que $f(X)$ est ouvert dans Y .

Soit $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $f(X)$ convergeant vers $l \in Y$. Montrons que $l \in f(X)$. Soit K un voisinage compact de l . Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans K . Comme f est une application propre, $f^{-1}(K)$ est encore compact, et contient la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Quitte à extraire, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $x \in K$. Alors $f(x_n) \rightarrow f(x) = l$ par unicité de la limite. Cela montre que $f(X)$ est fermé dans Y . ■

4.3 Le théorème de cut locus

On montre à présent le théorème de cut locus (théorème 29 page 22).

Premier point : *difféomorphisme de N' sur N .*

On a montré que $\exp(N') \subset N$. De plus, comme le segment géodésique associé à un vecteur petit peut être prolongé en un minimiseur associé à un vecteur parfait, il est l'unique minimiseur entre ses deux extrémités. Ainsi, l'application exponentielle est injective sur N' .

On admet qu'il s'agit d'un difféomorphisme local (corollaire 3.77 de Gallot, Hulin, et Lafontaine, Riemannian geometry).

Montrons que $\exp$ est propre de N' sur N . Soit K un compact de N . Montrons que $K' = \exp^{-1}(K)$ est un fermé-borné de $T_0X = \mathbb{R}^3$.

D'abord, K' est borné car :

- K est borné dans X : il existe $R > 0$ tel que $K \subset B_X(0, R)$.
- $K' \subset N'$ et les segments géodésiques associés aux vecteurs petits sont des minimiseurs : si $v \in K'$, alors $\|v\| = d_X(0, \exp(V)) < R$, d'où $K' \subset B_{T_0X}(0, R)$.

Soit ensuite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de K' convergeant vers $v_\infty \in T_0X$. Comme $\overline{N'} = N' \sqcup \partial N'$, $v_\infty \in N'$ ou $v_\infty \in \partial N'$. Dans le premier cas, par continuité de $\exp$, K' est fermé dans N' , donc $v_\infty \in K'$. Supposons maintenant un instant que $v_\infty \in \partial N'$. D'une part, $\exp(v_\infty) \in \exp(\partial N') \subset \partial N$. D'autre part, par continuité de $\exp$ et fermeture de K dans X , $\exp(v_\infty) \in K \subset N$. Mais $N \cap \partial N = \emptyset$: contradiction.

Deuxième point : *difféomorphisme local de $\partial N' \setminus \partial_0 N'$ sur $\partial N \setminus \partial_0 N$.*

Par symétrie et d'après le résultat sur les vecteurs partenaires, il suffit de montrer que $\exp : M' \rightarrow M$ est un difféomorphisme, où $M' = \partial N'_+ \setminus \partial_0 N'_+$ et $M = \partial N_+ \setminus \partial_0 N_+$.

On a montré que l'application exponentielle est injective sur M' (propriété 33) et que $\exp$ est un difféomorphisme local de M' sur M (propriété 30). Par le même argument que pour le premier point, l'application exponentielle est propre de M' sur M , donc $\exp$ est un difféomorphisme de M' sur M .

Troisième point : *difféomorphisme de $\partial_0 N'$ sur $\partial_0 N$.*

On a montré que $\partial_0 N'$ et $\partial_0 N$ sont la réunion de quatre graphes de fonctions $\mathcal{C}^1$ en coordonnées polaires. Justifions que $\exp : \partial_0 N'_+ \rightarrow \partial_0 N_+$ est un difféomorphisme local en appliquant le théorème d'inversion locale. Il s'agit donc de montrer que $d_P \exp$ est inversible en tout point de $\partial_0 N'_+$.

On note $\gamma(\theta) = (\theta, \rho(\theta))$ la paramétrisation en coordonnées polaires de $\partial_0 N'_+$. Alors en coordonnées cartésiennes, $\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta, 0)$. On applique le lemme de réciprocity :

$$\forall \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \exp(\gamma(\theta)) = \lambda_\theta \begin{bmatrix} \rho(\theta) \sin \theta \\ \rho(\theta) \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

où λ_θ désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

On dérive l'identité précédente :

$$\forall \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \frac{d}{d\theta} \exp(\gamma(\theta)) = \begin{bmatrix} \lambda'_\theta \rho(\theta) \sin \theta + \lambda_\theta \rho'(\theta) \sin \theta + \lambda_\theta \rho(\theta) \cos \theta \\ \lambda'_\theta \rho(\theta) \cos \theta + \lambda_\theta \rho'(\theta) \cos \theta - \lambda_\theta \rho(\theta) \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit, sachant que $\cos \theta, \sin \theta$ et $\rho(\theta)$ sont des quantités strictement positives pour tout $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[:$

$$\frac{d}{d\theta} \exp(\gamma(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_\theta}{\tan \theta} = -\lambda_\theta \tan \theta$$

Comme λ_θ et $\tan \theta$ sont strictement positifs pour tout $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, on sait que la dérivée ne s'annule jamais, donc est inversible (l'espace tangent à $\partial_0 N'_+$ en tout point est de dimension 1).

Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, $\exp : \partial_0 N' \rightarrow \partial_0 N$ est un difféomorphisme local. $\exp$ est de plus propre. En effet, si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\partial_0 N'$ sortant de tout compact, $\|v_n\| \rightarrow +\infty$ d'après la géométrie de $\partial_0 N'$. Comme le segment géodésique associé à v_n est un minimiseur, $d(0, \exp(v_n)) \rightarrow +\infty$.

On montre ainsi que l'application exponentielle est un difféomorphisme global de $\partial_0 N'$ sur $\partial_0 N$.

5 La forme des sphères de Sol

On applique à présent le théorème de cut locus pour démontrer le résultat suivant concernant les sphères de la géométrie Sol.

Théorème 42 *Forme des sphères de Sol*

Soit $R > 0$. On note $S_R = \{P \in X \mid d(0, P) = R\}$ la sphère métrique de Sol centrée en 0 et de rayon R .

Alors :

- S_R est homéomorphe à la sphère euclidienne ;
- Si $R < \pi\sqrt{2}$, S_R est difféomorphe à la sphère euclidienne ;
- Si $R = \pi\sqrt{2}$, S_R est difféomorphe à la sphère euclidienne, sauf peut-être en 4 points ;
- Si $R > \pi\sqrt{2}$, S_R est difféomorphe à la sphère euclidienne sauf sur 4 arcs tels que $z = 0$ et $|xy| = C_R$, où $C_R > \pi$ dépend de R .

Preuve.

On note $S'_R \subset T_0 X$ la sphère euclidienne de rayon R de l'espace tangent en 0.

Si $R < \pi\sqrt{2}$, on a $S'_R \subset N'$, donc $S_R = \exp(S'_R)$ car tous les vecteurs petits sont minimiseurs. Comme l'application exponentielle est un difféomorphisme de N' sur N , c'est également un difféomorphisme de S'_R sur S_R .

Si $R = \pi\sqrt{2}$, on pose $T' = \{(x, y, 0) \in T_0X \mid |x| = |y| = \pi\}$, et $T = \exp(T')$. On sait que $S'_R \subset N' \cup T'$.

Comme l'application exponentielle est un difféomorphisme de N' sur N , elle induit un difféomorphisme de $S'_R \setminus T'$ sur $S_R \setminus T$ (on utilise ici le lemme 38). Cela montre le troisième point.

De plus, $\exp : N' \cup T' \rightarrow N \cup T$ est un homéomorphisme. En effet, $\exp$ est continue sur $N' \cup T'$, bijective de $N' \cup T'$ sur $N \cup T$, et $\exp^{-1}$ est continue sur N . Montrons la continuité sur T .

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $N \cup T$ convergeant vers $x \in T$. Montrons que $\exp^{-1}(x_n) \rightarrow \exp^{-1}(x)$, en montrant que $(\exp^{-1}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et admet comme unique valeur d'adhérence $\exp^{-1}(x)$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans Sol car convergente : il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, d(0, x_n) \leq C$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|\exp^{-1}(x_n)\| \leq C$ car $\exp^{-1}(x_n) \subset N' \cup \partial N'$ est associé à un segment géodésique minimiseur, donc $\|\exp^{-1}(x_n)\| = d(0, x_n)$. Donc $(\exp^{-1}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Soit $\exp^{-1}(x_{\varphi(n)}) \rightarrow l$ une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers une valeur d'adhérence l . Alors par continuité de l'exponentielle sur $N' \cup T'$, $x_{\varphi(n)} \rightarrow \exp(l)$. Par unicité de la limite, $\exp(l) = x$.

Si $R > \pi\sqrt{2}$, on définit $S''_R = S'_R \cap (N' \cup \partial N')$. Cette opération consiste à retirer les vecteurs grands de S'_R , qui ne sont pas associés à des segments géodésiques minimiseurs, et dont l'exponentielle ne se trouve donc pas sur S_R .

D'abord, $\exp$ est un difféomorphisme de $S'_R \cap N'$ sur $S_R \setminus \exp(S'_R \cap \partial N')$.

L'application exponentielle envoie les vecteurs parfaits partenaires sur la même image, et est bijective sur les vecteurs parfaits dont la troisième coordonnée est positive. Donc S_R est homéomorphe via l'exponentielle à S''_R dont on aurait recollé les trous en associant deux à deux les vecteurs partenaires, qui est elle-même homéomorphe à une sphère euclidienne.

Pour justifier que $\exp$ est bien un homéomorphisme entre ces deux ensembles, on utilise le théorème de cut locus pour obtenir que l'application exponentielle est un homéomorphisme...

- des vecteurs petits de la sphère sur leur image ;
- des vecteurs parfaits à troisième coordonnée strictement positive sur leur image (grâce à l'énoncé plus précis démontré dans la preuve) ;
- des vecteurs parfaits à troisième coordonnée nulle sur leur image.

Puis on montre que l'application réciproque est bien continue par le même argument que celui détaillé ci-dessus.

Il reste finalement à préciser que $\exp(S''_R \cap \partial N')$ est la réunion de 4 arcs $z = 0$ et $|xy| = C_R$, car l'image de vecteurs parfaits se trouve dans le plan, et ces vecteurs parfaits sont associés à la même période donc ont le même invariant d'holonomie (définition 31).

■

Bibliographie

Références sur la géométrie hyperbolique

- DRACH, SCHWARTZ, *A hyperbolic view of the Seven Circles Theorem*, Math Intelligencer, 2020
- BRIDSON, HAEFLIGER, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, 1999 (p.2-14, p.18-21, p.81-92)
- BEARDON, *The Geometry of Discrete Groups*, 1983 (p.126-138)

Références sur la géométrie Sol

- COICULESCU, SCHWARTZ, *The spheres of Sol*, Geometry and Topology, 2022
- COULON, MATSUMOTO, SEGERMAN, TRETTEL, *Non-Euclidian Virtual Reality IV : Sol*, Bridges 2020 Conference Proceedings
- COULON, MATSUMOTO, SEGERMAN, TRETTEL, *Ray-Marching Thurston Geometries*, 2022 (p.110-114)
- SCHWARTZ, *The Gauss-Salamin Algorithm*, 2020 (p.1-4)
- JOST ET LI-JOST, *Calculus of variations*, 1998 (p.3-10)