

Introduction à la géométrie non-euclidienne

encadré par Rémi COULON à Dijon (Institut Mathématiques de Bourgogne)

Pierre LARIVÉ

Mai-Juin 2024

Exemples explorés

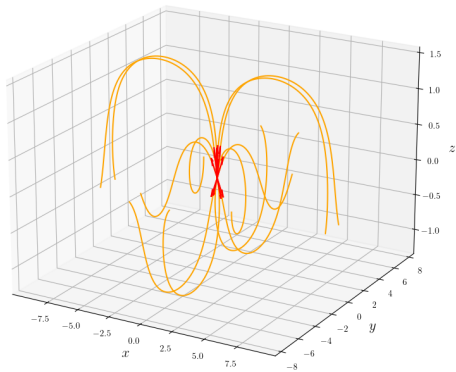
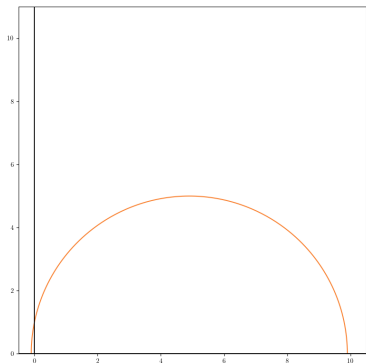


Figure – Modèle du demi-plan de Poincaré de la géométrie hyperbolique (à gauche) ; géométrie Sol (à droite). Tracé de quelques géodésiques (en orange).

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la loi de composition interne :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{z_1} x_2 + x_1 \\ e^{-z_1} y_2 + y_1 \\ z_2 + z_1 \end{bmatrix}$$

🔗 Propriété 1 *Choix de la métrique de Sol*

On munit $\mathbb{R}^3$ de la métrique locale $ds^2 = e^{-2z} dx^2 + e^{2z} dy^2 + dz^2$.
Alors pour tout $P \in \mathbb{R}^3$, l'application

$$L_P : \begin{array}{l|l} X & \rightarrow \\ Q & \mapsto P * Q \end{array}$$

est une isométrie.

Définition 1 *Géodésique*

Soit $\gamma : I \rightarrow X$ un chemin de classe $\mathcal{C}^2$.

On dit que γ est une géodésique s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall t_0 \in I, \exists \delta > 0, \forall t, t' \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], d(\gamma(t), \gamma(t')) = c|t - t'|.$$

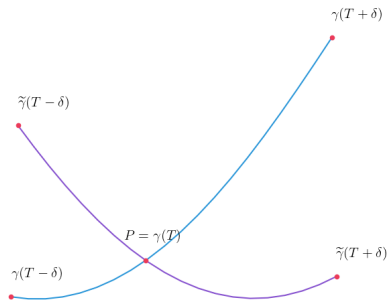
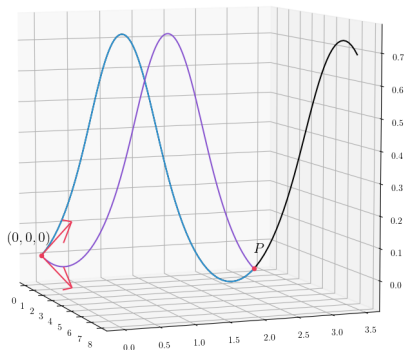
Théorème 1 *Caractérisation des géodésiques par les équations différentielles*

Une courbe $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ est une géodésique si et seulement si elle vérifie :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 2\dot{x}\dot{z} \\ \ddot{y} &= -2\dot{y}\dot{z} \\ \ddot{z} &= -e^{-2z}\dot{x}^2 + e^{2z}\dot{y}^2 \end{cases}$$

Propriété 2

Il existe des segments géodésiques ne minimisant pas la distance entre leurs extrémités.



Géodésique non minimisante

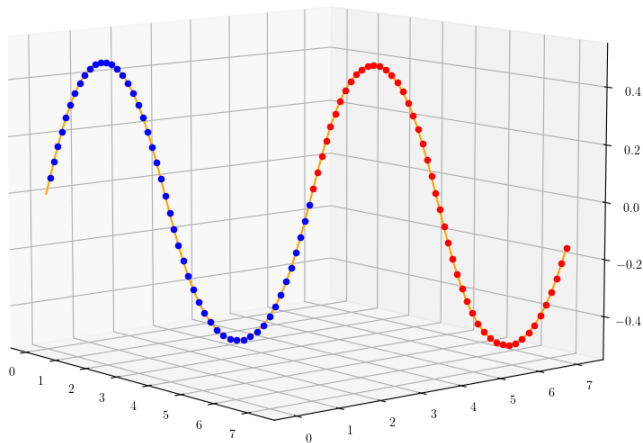


Figure – Géodésique issue de 0 minimisante (en bleu) puis non minimisante (en rouge).

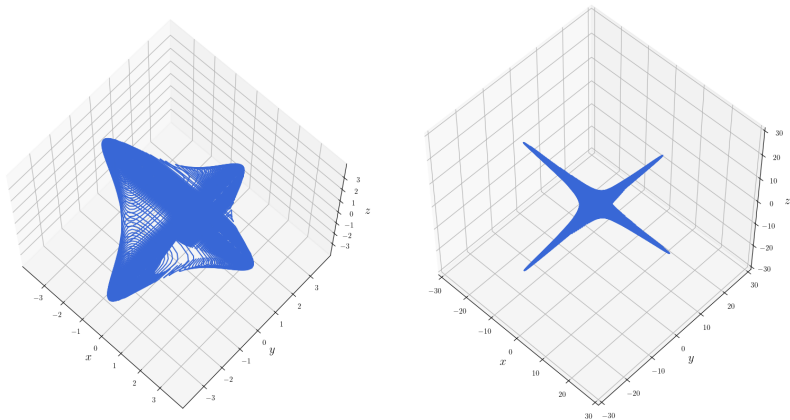


Figure – Sphères de Sol centrées en l'origine, de rayon 2 et 4.

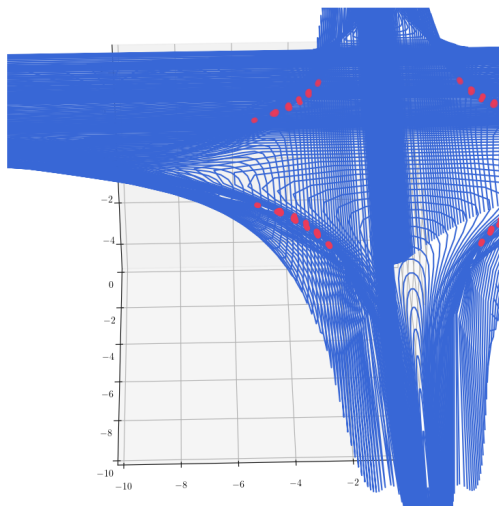


Figure – Zone non lisse des sphères de Sol lorsque le rayon dépasse $\pi\sqrt{2}$.