Introduction aux équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires

Pierre Le Barbenchon

Contents

1 Rappels

1.1 Notations

Pour I intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, Ω ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$ on note :
- $\mathcal{C}_c^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I à support compact.
- $\|.\|_{L^p(I)}$ la norme p sur I soit $\|u\|_{L^p(I)} = (\int_I |u|^p)^{1/p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$
- ∇u le gradient de u, soit $\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_N} \end{pmatrix}$
- $\|\nabla u\|_{L^p} := \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}$
- ∂I (respectivement $\partial\Omega$) désigne le bord de I (respectivement de Ω)
- $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que $\bar{\omega}$ est compact et $\bar{\omega} \subset \Omega$
- $\tau_h u$ est la translation de u de la distance h, i.e. $\tau_h u(x) = u(x+h) \ \ \forall x$
- $\mathbb{B}$ désigne la boule unité fermé de $\mathbb{R}^N$, soit $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leqslant 1\}$
- $\mathbb{S}$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^N$, soit $\mathbb{S} = \partial\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = 1\}$
- $A : B$ désigne le produit scalaire de Frobénius, soit $A : B = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} b_{i,j}$
- $\mathcal{H}u$ désigne la matrice hessienne de u, soit $(\mathcal{H}u)_{i,j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$
- $L^1_{\text{loc}}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions L^1 sur tout compact de I

1.2 Définitions

Définition 1.1 (Ouvert de Classe $\mathcal{C}^1$)**.**
Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit de classe $\mathcal{C}^1$, si au voisinage de tout point de $\partial\Omega$, il existe un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ qui redresse la frontière en un hyperplan de $\mathbb{R}^{N-1}$ et Ω en un des demi-espaces limité par cet hyperplan.

Définition 1.2 (Application compacte)**.**

Une application $\varphi \ : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$ est dite compacte si φ est continue et que l'image par φ d'un borné de E est relativement compacte.

Définition 1.3 (Enveloppe convexe)**.**

Soit $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un sous-ensemble fini d'un espace vectoriel normé. Alors $\text{conv}(F)$, l'enveloppe convexe, est définie par :

$$\text{conv}(F) = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \ / \ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1, t_j \geqslant 0 \Big\} \tag{1}$$

Définition 1.4 (opérateur coercif)**.**

Soit $p \geqslant 1$. On dit d'un opérateur a qu'il est coercif s'il vérifie :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(\xi).\xi \geqslant \alpha |\xi|^p$$

Définition 1.5 (opérateur monotone)**.**

On dit d'un opérateur a qu'il est monotone s'il est continue et qu'il vérifie :

$$\forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N \quad \Big(a(\xi) - a(\xi')\Big).\Big(\xi - \xi'\Big) \geqslant 0$$

1.3 Outils

Lemme 1.1.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$,

Alors il existe un $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{|b-a|} \displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

Preuve du lemme 1.1.

Si f est de moyenne nulle (i.e $\dfrac{1}{|b-a|} \displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$),

Si f est identiquement nulle, il existe un $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = 0$, c'est fini

Si f n'est pas identiquement nulle, comme $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, il existe d tel que $f(d) > 0$ et il existe e tel que $f(e) < 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = 0$, c'est fini

Si f n'est pas de moyenne nulle, on pose $\tilde{f}(x) = f(x) - \dfrac{1}{|b-a|} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, $\dfrac{1}{|b-a|} \displaystyle\int_a^b \tilde{f}(x)dx = \dfrac{1}{|b-a|} \displaystyle\int_a^b f(x)dx \ - \ \dfrac{1}{|b-a|} \displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, donc $\tilde{f}$ est de moyenne nulle, ainsi il existe $c \in]a;b[$ tel que $\tilde{f}(c) = 0$ donc $f(c) = \dfrac{1}{|b-a|} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

■

Proposition 1.1 (Inégalité de Hölder)**.**

Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et p' tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
Alors $fg \in L^1$ et

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \tag{2}$$

Corollaire 1.1 (Inégalité d'Interpolation)**.**

Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$,
Alors $f \in L^r(\Omega) \quad \forall r \in [p; q]$ et on a l'inégalité d'interpolation suivante :

$$\|f\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \tag{3}$$

Proposition 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, soient f, g dans un hilbert $\mathcal{H}$

$$\int_{\Omega} |fg| \leqslant \|f\|_{\mathcal{H}} \|g\|_{\mathcal{H}} \tag{4}$$

Propriété 1.1.

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$, si $\displaystyle\int_I fu = 0 \quad \forall u \in \mathcal{C}_c(I)$
Alors $f = 0$ *p.p.* sur I.

Preuve de la propriété 1.1.

On va raisonner par l'absurde, on suppose qu'il existe un ensemble $A \subset I$ tel que $\lambda(A) \neq 0$ et $f > 0$ sur A (avec λ la mesure de Lebesgue). (Sans perte de généralité, car on aurait pu prendre $-f$, s'il n'existait pas de tel ensemble)
Si I est borné, on pose $a = inf\ I$ et $b = sup\ I$ et on prend la suite de segments $\left([a + \frac{1}{n}; b - \frac{1}{n}]\right)_n$. $\lambda(A \cap [a + \frac{1}{n}; b - \frac{1}{n}]) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(A) \neq 0$, alors il existe n_0 tel que $\lambda(A \cap [a + \frac{1}{n_0}; b - \frac{1}{n_0}]) \neq 0$.
Si I n'est ni borné à droite ni à gauche, on utilise la suite de segment $\left([-n; n]\right)_n$.
Alors il existe n_0 tel que $\lambda(A \cap [-n_0; n_0]) \neq 0$, par les mêmes considérations que lorsque I est borné.
Si I est d'une autre forme, on peut se ramener à une suite de segment de la forme $\left([a - \frac{1}{n}; n]\right)_n$.
Ainsi on peut toujours trouver un segment $[c; d] \subset I$ tel que $\lambda(A \cap [c; d]) \neq 0$.
On prend une fonction continue u qui vaut 1 sur $[c; d]$ et 0 sur $[c - \frac{1}{n}; d + \frac{1}{n}]^{\complement}$ avec n suffisamment grand pour rester dans I.
Donc $\displaystyle\int_I fu = 0$ car $u \in \mathcal{C}_c(I)$.
Or

$$\int_I fu \geqslant \int_{A \cap [c;d]} fu = \int_{A \cap [c;d]} f > 0$$

car $f > 0$ sur A. Il y a contradiction, donc $f = 0$ *p.p* sur I. ∎

1.4 Théorèmes

Théorème 1.1 (Ascoli)**.**
Soient K un espace métrique compact et $\mathcal{H}$ un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}(K)$. On suppose que $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinu i.e.

$$\forall\epsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \text{tel que} \;\; \|x_1 - x_2\|_K < \delta \;\; \Longrightarrow \;\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{H} \tag{5}$$

Alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(K)$.

Corollaire 1.2 (Version L^p du Théorème d'Ascoli)**.**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p < \infty$
On suppose

$$\begin{cases} \forall\epsilon > 0 \;\; \forall\, \omega \subset\subset \Omega, \quad \exists\delta > 0 \;\; \text{avec} \quad \delta < \text{dist}(\omega, \Omega^c) \;\; \text{tel que} \\ \qquad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \;\; \text{avec } |h| < \delta \quad \forall f \in \mathcal{F}, \end{cases} \tag{6}$$

$$\forall\epsilon > 0 \;\; \exists\, \omega \subset\subset \Omega \quad \text{tel que} \;\; \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{7}$$

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.2 (Représentation de Riesz)**.**
Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p)'$
Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que $\langle \varphi, f \rangle = \displaystyle\int uf \quad \forall f \in L^p$
De plus, on a $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$

2 Espaces de Sobolev

2.1 En dimension 1

Définition 2.1 ($W^{1,p}(I)$)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ comme ci-après :

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) / \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \;\; \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)\} \tag{8}$$

On notera $H^1(I) := W^{1,2}(I)$.

Remarque 2.1. $W^{1,p}(I)$ peut être vu comme $\{u \in L^p(I), u' \in L^p(I)$ (au sens des distributions)$\}$. Dorénavant, on notera u' la dérivation au sens des distributions (cela correspond au g de la définition 2.1).

On munit l'espace $W^{1,p}(I)$ de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \tag{9}$$

On munit l'espace $H^1(I)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1(I)} := \langle u, v\rangle_{L^2(I)} + \langle u', v'\rangle_{L^2(I)} \tag{10}$$

associé à la norme suivante (équivalente à la norme de $W^{1,2}(I)$) :

$$\|u\|_{H^1(I)} := (\|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)})^{1/2} \tag{11}$$

Propriété 2.1.

$W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, est réflexif pour $1 < p < \infty$, est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.

$H^1(I)$ est un Hilbert séparable.

Théorème 2.1 (Représentant continu)**.**

Soit $u \in W^{1,p}(I)$.

Alors il existe $\tilde{u} \in \mathcal{C}(I)$ telle que $u = \tilde{u}$ pp sur I

et $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \displaystyle\int_y^x u'(t)dt \quad \forall x, y \in \bar{I}$

Preuve du théorème 2.1.

On va commencer par prouver deux lemmes :

Lemme 2.1.

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ qui vérifie $\displaystyle\int_I f\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I)$

Alors il existe une constante C telle que $f = C$ $p.p.$

Preuve du lemme 2.1.

Soit une fonction $\psi \in \mathcal{C}_c(I)$ telle que $\displaystyle\int \psi = 1$.

Pour tout $w \in \mathcal{C}_c(I)$, on pose la fonction $h = w - \big(\int_I w\big)\psi \in \mathcal{C}_c(I)$

Donc il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(I)$ telle que $\varphi' = w - \big(\int_I w\big)\psi$

D'où $\displaystyle\int_I f\varphi' = 0$

$$\int_I f(x)\left(w(x) - \Big(\int_I w(t)dt\Big)\psi(x)\right)dx = 0$$

$$\int_I f(t)w(t)dt - \int_I\int_I w(t)\psi(x)f(x)dtdx = 0$$

$$\int_I w(t)\left(f(t) - \int_I f(x)\psi(x)dx\right)dt = 0$$

Par la propriété (1.1), comme l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $w \in \mathcal{C}_c(I)$, on a $f(t) - \displaystyle\int_I f(x)\psi(x)dx = 0$ $p.p.$ $t \in I$

Donc $f = C$ $p.p.$ I avec $C = \displaystyle\int_I f(x)\psi(x)dx$. ∎

Lemme 2.2.

Soit $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$, soit y_0 dans I, on pose $v(x) = \displaystyle\int_{y_0}^{x} g(t)dt \quad \forall x \in I$

Alors $v \in \mathcal{C}(I)$ et

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I)$$

Preuve du lemme 2.2.

On note $a := \inf I$ et $b := \sup I$.

$$\int_I v\varphi' = \int_a^b \Big(\int_{y_0}^x g(t)dt\Big)\varphi'(x)dx = \int_a^{y_0}\int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx + \int_{y_0}^b\int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx$$

Par le théorème de Fubini, on trouve que :

$$\int_I v\varphi' = \int_a^{y_0} g(t)\int_a^t \varphi'(x)\ dx\ dt\ + \int_{y_0}^b g(t)\int_t^b \varphi'(x)\ dx\ dt = -\int_I g\varphi$$

car $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ puisque $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(I)$. ■

Pour démontrer le théorème 2.1,

On fixe $y_0 \in I$ et on pose $\bar{u}(x) = \displaystyle\int_{y_0}^x u'(t)dt$.

Le lemme 2.2 nous donne que

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I)$$

Donc $\displaystyle\int_I (u-\bar{u})\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(I)$, par intégration par parties. Ainsi, par le lemme (2.1), on trouve que $u - \bar{u} = C \quad p.p.\ I$. La fonction $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ possède les propriétés désirées. ■

Définition 2.2 ($W^{1,p}_0(I)$)**.**

Pour $1 \leqslant p < \infty$, on définit $W^{1,p}_0(I)$ comme la fermeture de $\mathcal{C}^1_c(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H^1_0(I) := W^{1,2}_0(I)$

Théorème 2.2 (Caractérisation de $W^{1,p}_0(I)$)**.**

Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors $\big(u \in W^{1,p}_0(I)$ si et seulement si $\tilde{u} = 0$ sur $\partial I\big)$

Avec $\tilde{u}$ le représentant continu de u (voir le théorème 2.1).

Définition 2.3 ($W^{m,p}(I)$)**.**

Soit $m \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on définit par récurrence

$$W^{m,p}(I) := \big\{u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I)\big\}$$

On pose alors $H^m(I) := W^{m,2}(I)$

2.2 En dimension N

Définition 2.4 ($W^{1,p}(\Omega)$)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ comme ci-après :

$$W^{1,p}(\Omega) := \begin{array}{l} \{u \in L^p(\Omega), \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ telles que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega) \quad \forall i \in [\![1;N]\!]\} \end{array} \tag{12}$$

On notera $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

Remarque 2.2. $W^{1,p}(\Omega)$ peut être vu comme $\{u \in L^p(\Omega), \forall i \in [\![1;N]\!] \ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ (au sens des distributions)$\}$. Dorénavant, on notera ∇u le gradient au sens des distributions (cela correspond au vecteur $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}$ avec les g_i de la définition 2.4).

On munit l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{13}$$

On munit l'espace $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} := \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)} \tag{14}$$

associé à la norme suivante (équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$) :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} \tag{15}$$

Remarque 2.3. Il n'y pas de théorème du représentant continu comme en dimension 1 (voir le théorème 2.1).

Définition 2.5 ($W_0^{1,p}(\Omega)$)**.**
Pour $1 \leqslant p < \infty$, on définit $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$

Théorème 2.3 (Caractérisation de $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.**
Soit Ω un ouvert de classe $\mathcal{C}^1$, soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ avec $1 \leqslant p < \infty$, alors $\big(u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega\big)$

Définition 2.6 ($W^{m,p}(\Omega)$)**.**
Soit $m \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i \in [\![1;N]\!]\right\}$$

On pose alors $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$

2.3 Inégalités

2.3.1 Inégalité de Poincaré

Proposition 2.1 (en dimension 1)**.**
Soit I un intervalle borné
Alors il existe une constante C (dépendant de $\bar{I}$) telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leqslant C\|u'\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I) \tag{16}$$

Preuve de la proposition 2.1.
$I = [a, b]$ $u \in W_0^{1,p}(I)$ donc on peut considérer que u est continue (voir le théorème 2.1), d'où $u(a) = 0$

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \int_a^x u'(t)dt \leqslant \|u'\|_{L^1} \quad \forall x \in I$$

d'où $\|u\|_{L^\infty} \leqslant \|u'\|_{L^1} \leqslant \|u'\|_{L^p} \times C_1$ par l'inégalité de Hölder

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} = \big(\int_I u^p\big)^{1/p} + \|u'\|_{L^p} \leqslant (|I|\|u^p\|_{L^\infty})^{1/p} + \|u'\|_{L^p}$$
$$\leqslant |I|^{1/p}\|u\|_{L^\infty} + \|u'\|_{L^p} \leqslant \big(|I|^{1/p} \times C_1 + 1\big)\|u'\|_{L^p}$$

■

Proposition 2.2 (en dimension N)**.**
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et de p) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \;\; 1 \leqslant p < \infty \tag{17}$$

Preuve de la proposition 2.2.
Ω est un ouvert borné, donc il existe α et β tel que $\forall x \in \Omega, \alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$.
Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$. Pour $x \in \Omega$, on note $x' = (x_1, ..., x_{N-1})$:

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)| &= \int_{\alpha}^{x_N} \frac{d}{dt}\phi(x',t)dt \\
&\leqslant (x_N-\alpha)^{1/p'}\Big(\int_{\alpha}^{x_N}\big|\frac{\partial}{\partial x_N}\phi(x',t)\big|^p dt\Big)^{1/p} \text{par l'inégalité de Hölder} \\
\int_{\Omega}|\phi(x)|^p dx &\leqslant \int_{\Omega}(x_N-\alpha)^{p-1}\int_{\alpha}^{\beta}\big|\frac{\partial}{\partial x_N}\phi(x',t)\big|^p dtdx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\alpha}^{\beta}(x_N-\alpha)^{p-1}dx_N\int_{\alpha}^{\beta}\big|\nabla\phi(x',t)\big|^p dtdx' \\
&\leqslant \frac{(\beta-\alpha)^p}{p}\int_{\Omega}\big|\nabla\phi(x)\big|^p dx \\
\|\phi\|_p^p &\leqslant \frac{(\beta-\alpha)^p}{p}\|\nabla\phi\|_p^p
\end{aligned}
$$

Or $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ par définition de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Donc, par densité, on obtient l'inégalité (17).

■

2.3.2 Inégalité de Poincaré-Wirtinger

Proposition 2.3 (en dimension 1)**.**

Soit I un intervalle borné, soit $u \in L^1(I)$, on pose $\bar{u} = \frac{1}{|I|}\int_I u$
Alors, on a :

$$\|u-\bar{u}\|_{L^\infty(I)} \leqslant \|u'\|_{L^1(I)} \quad \forall u \in W^{1,1}(I) \tag{18}$$

Preuve de la proposition 2.3. Grâce au théorème 2.1, on sait qu'il existe un représentant continu de u, on peut appliquer le lemme 1.1 et ainsi obtenir un $c \in]a;b[\ / \ u(c) = \frac{1}{|I|}\int_I u$.

D'où pour tout $x \in I$, $|u(x)-\bar{u}| = |u(x)-u(c)| = \int_c^x u'(t)dt \leqslant \|u'\|_{L^1}$

Donc $\|u-\bar{u}\|_{L^\infty} \leqslant \|u'\|_{L^1} \quad \forall u \in W^{1,1}(I)$. ■

Proposition 2.4 (en dimension N)**.**

Soit Ω un ouvert connexe de classe $\mathcal{C}^1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, soit $u \in L^p(\Omega)$, on pose $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u$

Alors, il existe C telle que :

$$\|u-\bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \tag{19}$$

2.3.3 Inégalité de Sobolev

Proposition 2.5 (en dimension N)**.**
Soit $1 \leqslant p < N$
Alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ où p^* est donné par $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$

$$\text{et} \quad \exists C = C(p,N) \ / \ \|u\|_{L^{p^*}} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{20}$$

Remarque 2.4.
Une preuve de cette inégalité se trouve dans le livre [1] à la page 162.

2.4 Injections

2.4.1 Dimension 1

Proposition 2.6.
Soit I intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
Il y a injection continue de $W^{1,p}(I)$ dans $L^\infty(I)$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Remarque 2.5. Autrement dit, il existe une constante C (dépendant seulement de I), telle que $\|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Preuve de la remarque 2.5.

On veut prouver le caractère continu de l'application $\varphi \ : \begin{array}{ccc} W^{1,p}(I) & \to & L^\infty(I) \\ u & \mapsto & u \end{array}$

Or φ est clairement linéaire, donc pour que φ soit continue, il faut et suffit qu'il existe une constante C telle que $\forall u \in W^{1,p}(I)$, $\|\varphi(u)\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, soit $\|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, ce qui prouve la remarque 2.5.

■

Proposition 2.7.
Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
Alors l'injection $W^{1,p}(I) \subset \mathcal{C}(\bar{I})$ est compacte pour $1 < p \leqslant \infty$ et l'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour $1 \leqslant q < \infty$

Preuve de la proposition 2.7.

- On va utiliser le théorème d'Ascoli (Théorème 1.1),
avec $K = \bar{I}$, $\mathcal{H} = \{u \in W^{1,p}(I) \ / \ \|u\|_{W^{1,p}(I)} \leqslant 1\}$ pour $1 < p \leqslant \infty$. On va maintenant vérifier l'uniforme équicontinuité de $\mathcal{H}$:
Soit $\epsilon > 0$, on pose $\delta = \epsilon^{p'}$, pour x, y tels que $|x - y| < \delta$:
$|u(x) - u(y)| = \displaystyle\int_y^x u'(t)dt \leqslant \|u'\|_{L^p}|x-y|^{1/p'} \leqslant |x-y|^{1/p'} < \epsilon \quad \forall u \in \mathcal{H}$
On a utilisé l'inégalité de Hölder et le fait que $\|u'\|_{L^p} \leqslant \|u\|_{W^{1,p}} \leqslant 1$ dans $\mathcal{H}$.
Donc par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\bar{I})$.

- On va utiliser un corollaire du théorème d'Ascoli (Corollaire 1.2), avec $\mathcal{F} = \{u \in W^{1,1}(I) \ / \ \|u\|_{W^{1,1}(I)} \leqslant 1\}$

Lemme 2.3. Si $u \in W^{1,1}$, alors :

$$\begin{cases} \forall \ \omega \subset\subset I \ \text{ et } \ \forall h \in \mathbb{R} \ \text{ avec } \ |h| < \text{dist}(\omega, I^c), \\ \text{on a } \ \|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leqslant \|u'\|_{L^1(I)}|h| \end{cases} \tag{21}$$

Preuve du lemme 2.3.

Grâce au théorème 2.1, on peut écrire $u(x+h) - u(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} u'(t)dt = h \int_0^1 u'(x+sh)ds$

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} &= \int_\omega |u(x+h) - u(x)|dx \\ &= |h| \int_\omega \Big| \int_0^1 u'(x+sh)ds \Big| dx \\ &\leqslant |h| \int_\omega \int_0^1 |u'(x+sh)|dsdx \\ &\leqslant |h| \int_0^1 \int_\omega |u'(x+sh)|dxds \\ \int_\omega |u'(x+sh)|dx &= \int_{\omega+sh} |u'(y)|dy \\ &\leqslant \int_I |u'(y)|dy = \|u'\|_{L^1(I)} \end{aligned}$$

d'où $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leqslant |h| \|u'\|_{L^1(I)}$.

■

Ainsi, grâce au lemme 2.3, on obtient $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leqslant |h|$, puisque dans $\mathcal{F}, \|u'\|_{L^1(I)} \leqslant \|u\|_{W^{1,1}(I)} \leqslant 1$.

$\displaystyle\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q dx \leqslant (2\|u\|_{L^\infty})^{q-1} \int_\omega |u(x+h) - u(x)|dx \leqslant C|h|$

Donc $\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leqslant C^{1/q}|h|^{1/q} < \epsilon$ si $|h| < \delta$

De ce fait la condition 6 du corollaire 1.2 est vérifiée.

On vérifie maintenant la condition 7 du corollaire 1.2.

$\|u\|_{L^q(I \backslash \omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(I)} |I \backslash \omega|^{1/q} \leqslant C|I \backslash \omega|^{1/q} < \epsilon$ en choisissant correctement ω.

On applique donc le corollaire 1.2 et on obtient l'injection compacte de $W^{1,1}(I)$ dans $L^q(I)$.

$\blacksquare$

2.4.2 Dimension N

Théorème 2.4 (Morrey)**.**
Soit $p > N$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec injection continue
et pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a $|u(x)-u(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p}$ p.p $x, y \in \mathbb{R}^N$ avec $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ et C une constante ne dépendant que de p et N.

Remarque 2.6.
Une preuve de ce théorème se trouve dans le livre de Brezis [1] à la page 166.

Théorème 2.5 (Rellich-Kondrachov)**.**
Pour Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a :
Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1 : p^*[$ où $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$
Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1; \infty[$
Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega})$
avec injections compactes.

Preuve du théorème 2.5.

- Si $p > N$, on admettra que le théorème de Morrey (2.4) s'applique pour Ω (par un argument de prolongement que l'on ne développera pas ici, voir Brezis [1]). On veut appliquer le théorème d'Ascoli (1.1), $\bar{\Omega}$ est un espace métrique complet car Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{H} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \ / \ \|u\|_{W^{1,p}} \leqslant 1\}$ est borné dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ car u est hölderienne (grâce au théorème de Morrey(2.4)) donc continue. $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinue car :

  Pour tout $\epsilon > 0$, on prend $\delta = \sqrt[\alpha]{\dfrac{\epsilon}{C}}$, pour $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$, on a
  $|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}}|x_1 - x_2|^\alpha \leqslant \epsilon \quad \forall u \in \mathcal{H}$
  Donc $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$, d'où l'injection compacte de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

- Si $p < N$, on va utiliser le corollaire 1.2 du théorème d'Ascoli (1.1), on prend $\mathcal{F} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \ / \ \|u\|_{W^{1,p}} \leqslant 1\}$ borné dans $L^p(\Omega)$, on veut vérifier la condition 6, soit $1 \leqslant q < p^*$ donc $1 \geqslant \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p^*}$ ainsi on peut écrire $\dfrac{1}{q} = 1 \times \alpha + \dfrac{1}{p^*}(1-\alpha)$ avec $\alpha \in]0; 1]$
  Soit $\omega \subset\subset \Omega$, $u \in \mathcal{F}$ et $|h| <$ dist(ω, Ω^c), on utilise l'inégalité d'interpolation (3) :

  $$\|f\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$$

ici

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leqslant \|\tau_h u - u\|^{\alpha}_{L^1(\omega)} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\omega)}$$

Or $u \in W^{1,p}(\omega)$, donc $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leqslant \|\nabla u\|_{L^1(\omega)}|h|$ par le lemme (2.3) qui peut s'étendre à $u \in W^{1,p}(\omega)$ (même type de preuve)

Donc
$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} &\leqslant \left(\|\nabla u\|_{L^1(\omega)}|h|\right)^{\alpha} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\omega)} \\ &\leqslant \left(\|\nabla u\|_{L^1(\omega)}|h|\right)^{\alpha} \left(2\|u\|_{L^{p^*}(\omega)}\right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$\|\nabla u\|_{L^1} \leqslant \|\nabla u\|_{L^p}\|1\|_{L^{p'}} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}} \leqslant C$

$\|u\|_{L^{p^*}} \leqslant \|u\|_{W^{1,p}} \leqslant$ car il a injection continue de $W^{1,p}$ dans L^{p^*}

d'où$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leqslant |h|^{\alpha} C^{\alpha} 2^{1-\alpha} \leqslant \epsilon$ pour $|h|$ assez petit.

La condition (6) du corollaire (1.2) est ainsi vérifiée.

On vérifie maintenant la condition (7) de ce corollaire:

Par Hölder, on a $\|u\|_{L^q(\Omega\backslash\omega)} \leqslant \|u\|_{L^{p^*}(\Omega\backslash\omega)} \left|\Omega\backslash\omega\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}} \leqslant \left|\Omega\backslash\omega\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p^*}} \leqslant \epsilon$ pour ω bien choisi

Ainsi en appliquant le corollaire (1.2), $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^q(\Omega)$.

- Si $p = N$, on peut utiliser le résultat précédent, en passant à la limite quand $p \to N$ alors $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N} \to 0$ ainsi $p^* \to \infty$ d'où $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1;\infty[$ avec injection compacte.

■

2.4.3 Résumé

dimension 1			
I quelconque	Injections Continues	$W^{1,p}(I) \subset L^{\infty}(I)$	$1 \leqslant p \leqslant \infty$
I borné	Injections Compactes	$W^{1,p}(I) \subset \mathcal{C}(\bar{I})$ $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$	$1 < p \leqslant \infty$ $1 \leqslant q < \infty$

dimension N		$1 \leqslant p < N$	$p = N$	$p > N$
$\Omega = \mathbb{R}^N$	Injections Continues	$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ $\forall q \in [p;p^*]$	$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ $\forall q \in [N;\infty[$	$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$
Ω borné ou $\Omega = \mathbb{R}^N_+$	Injections Continues	$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$	$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [N;\infty[$	$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$
	Injections Compactes	$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1;p^*[$	$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1;\infty[$	$W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega})$

3 Équations linéaires

3.1 Définitions

Une équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre est une équation du type :

$$A(x) : \mathcal{H}u(x) + F(x).\nabla u(x) + g(x)u(x) = h(x) \tag{22}$$

avec $A(x)$ une matrice $N \times N$ symétrique, $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ et $g, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Définition 3.1 (Conditions de Dirichlet)**.**
Les conditions de Dirichlet sont des conditions aux limites que l'on impose à u sur le bord de l'ouvert dans lequel on se place.

Définition 3.2 (Conditions de Neumann)**.**
Les conditions de Neumann sont des conditions aux limites que l'on impose à $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.\vec{n}$ sur le bord de l'ouvert dans lequel on se place (avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale extérieure au bord de l'ouvert)

On va s'intéresser à des problèmes mettant en jeu le laplacien. Soit le problème suivant, on cherche une solution u (dite *solution forte*) appartenant à $H^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{23}$$

On va en fait s'intéresser à la formulation variationnelle des problèmes. La **formulation variationnelle** du problème (23) est :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{24}$$

Pour trouver la formulation variationnelle, **en dimension 1**, il suffit de multiplier l'équation du problème par v une fonction de $H_0^1(I)$, ce qui donne pour notre exemple :

$$-u''v + uv = fv$$

Puis, on intègre chaque membre de l'équation pour obtenir :

$$-\int_I u''v + \int_I uv = \int_I fv$$

Ensuite, par une intégration par parties, on obtient :

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

En dimension supérieure, on va avoir besoin de la formule de Green :

$$\int_\Omega (\Delta u)v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v \quad \forall v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$$

On multiplie de nouveau l'équation par une fonction de $H_0^1(\Omega)$, puis on intègre chaque membre de l'équation, on a :

$$-\int_\Omega (\Delta u)v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

On utilise la formule de Green pour obtenir :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; d\sigma + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

Or ici v appartient à $H_0^1(\Omega)$ donc $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; d\sigma = 0$ Donc on obtient alors la formule variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Dans toute la suite, le but sera de trouver des solutions faibles aux différents problèmes, ce qui permet grâce à des notions de régularités de revenir à des solutions fortes (mais ce ne sera pas l'objet de ce document). On s'intéresse donc au problème (24).

Pour prouver l'existence et l'unicité de ce problème, on va utiliser le théorème de Lax-Milgram.

3.2 Théorème de Lax-Milgram

3.2.1 Théorème de Stampacchia

Théorème 3.1 (Stampacchia)**.**
Soient H un hilbert, $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive ($\exists \alpha > 0 \; / a(v,v) \geqslant \alpha |v|^2 \;\; \forall v \in H$) et $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide de H.

Alors $\forall \varphi \in H'$, il existe un unique $u \in \mathcal{C}$ tel que $a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u) \;\; \forall v \in \mathcal{C}$

Et si a est symétrique, alors u est caractérisé par :

$$u \in \mathcal{C} \;\; \text{et} \;\; \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \underset{v \in \mathcal{C}}{min}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\} \tag{25}$$

Preuve du théorème 3.1.

- φ est une forme linéaire continue sur H. Les fonctions $v \mapsto a(u,v)$ sont des formes linéaires continues sur H, $\forall u \in H$.

  En vertu du théorème de représentation de Riesz (Théorème (1.2)), il existe un unique b appartenant à H tel que $\varphi(v) = \langle v, b \rangle \;\; \forall v \in H$. De même, pour tout $u \in H$, on notera Au l'unique élément de H tel que $a(u,v) = \langle Au, v \rangle \;\; \forall v \in H$.

Par unicité de Au, l'opérateur A est une application de H dans H.
$\|Au\|^2 = a(u, Au) \leqslant C\|u\|\|Au\|$ car a est une forme bilinéaire continue. D'où $\|Au\| \leqslant C\|u\|$. Donc $A : H \to H$ est une application linéaire continue.

Grâce au théorème de projection orthogonale sur un convexe fermé, on peut définir l'application $g \; : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ u & \mapsto & P_{\mathcal{C}}(\rho a - \rho Au + u) \end{array} \quad \forall \rho > 0$

On va maintenant utiliser un théorème de point fixe, on sait que $\mathcal{C}$ est complet (car c'est un fermé de l'espace H complet), g est une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Il faut maintenant vérifier la contractance de g : $\forall u, u' \in \mathcal{C}$

$$\begin{array}{rcl} \|g(u) - g(u')\|^2 & = & \|P_{\mathcal{C}}(\rho a - \rho Au + u) - P_{\mathcal{C}}(\rho a - \rho Au' + u')\|^2 \\ & \leqslant & \|u - u' - \rho A(u - u')\|^2 \text{ car } P_{\mathcal{C}} \text{ est 1 - lipschitzienne} \\ & = & \|u - u'\|^2 - 2\rho\langle A(u - u'), u - u'\rangle + \rho^2\|A(u - u')\|^2 \end{array}$$

Or $\|Ax\| \leqslant C\|x\|$ et $\langle Ax, x\rangle = a(x, x) \geqslant \alpha\|x\|^2$ par coercivité de a. $(\forall x \in \mathcal{C})$

$$\begin{array}{rcl} \|g(u) - g(u')\|^2 & \leqslant & \|u - u'\|^2 - 2\rho\alpha\|u - u'\|^2 + \rho^2C^2\|u - u'\|^2 \\ & = & (1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2)\|u - u'\|^2 \end{array}$$

Donc pour $\rho \in]0; \dfrac{2\alpha}{C}[$, g est contractante, donc admet un unique point fixe : $u = P_{\mathcal{C}}(\rho a - \rho Au + u)$.

Par caractérisation du projeté orthogonal, on sait que

$$\begin{array}{rcl} \langle(\rho a - \rho Au + u) - u, v - u\rangle & \leqslant & 0 \quad \forall v \in \mathcal{C} \\ \langle \rho a - \rho Au, v - u\rangle & \leqslant & 0 \\ \langle a - Au, v - u\rangle & \leqslant & 0 \quad \text{car } \rho \text{ est positif} \\ \langle Au, v - u\rangle & \geqslant & \langle a, v - u\rangle \\ a(u, v - u) & \geqslant & \varphi(v - u) \quad \forall v \in \mathcal{C} \end{array}$$

- On veut maintenant établir (25) lorsque a est symétrique.
  Soit $v \in \mathcal{C}$

  $$\begin{array}{rl} & \frac{1}{2}a(u,u) - \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(u - v) \\ \leqslant & \frac{1}{2}a(u,u) - \frac{1}{2}a(v,v) - a(u, u - v) \qquad \text{par définition de } u \\ = & -\frac{1}{2}a(u,u) - \frac{1}{2}a(v,v) + a(u,v) \\ = & -\frac{1}{2}a(u - v, u - v) \leqslant 0 \end{array}$$

  Car $a(u - v, u - v) \geqslant \alpha\|u - v\|^2 \geqslant 0$ par coercivité de a.
  D'où $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) \leqslant \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)$

On obtient alors l'expression (25) souhaitée.

$\blacksquare$

3.2.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 3.2 (Lax-Milgram)**.**
Soient H un hilbert, $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive ($\exists \alpha > 0 \ / a(v,v) \geqslant \alpha |v|^2 \ \ \forall v \in H$).
Alors, pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique u appartenant à H tel que : $a(u,v) = \varphi(v) \quad \forall v \in H$
Et si a est symétrique, alors u est caractérisé par :

$$u \in H \ \text{ et } \ \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \underset{v \in \mathcal{C}}{min}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\} \tag{26}$$

Preuve du théorème 3.2.

- On utilise le théorème de Stampacchia avec $\mathcal{C} = H$. Ainsi il existe un unique $u \in H$ tel que $a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u) \quad \forall v \in H$
On pose $w = v - u$,

$$\begin{array}{rrcll} \forall w \in H & a(u,w) & \geqslant & \varphi(w) & \\ & a(u,-w) & \geqslant & \varphi(-w) & \text{car } -w \in H \\ & -a(u,w) & \geqslant & -\varphi(w) & \text{par linéarité} \\ & a(u,w) & \leqslant & \varphi(w) & \end{array}$$

D'où $a(u,w) = \varphi(w) \quad \forall w \in H$

- On veut maintenant établir (26) lorsque a est symétrique. On a $u \in H$ immédiatement.

On pose $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \quad \forall v \in H$

$$\begin{array}{rcl} \forall w \in H \quad J(u+w) & = & \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - \varphi(u+w) \\ & = & \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) + a(u,w) - \varphi(w) + \frac{1}{2}a(w,w) \end{array}$$

(Grâce à la symétrie de a)

$$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w,w)$$

car, par définition de u, $a(u,w) - \varphi(w) = 0 \quad \forall w \in H$.

$$J(u+w) \geqslant J(u) + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2$$

par coercivité de a.
Donc $J(u) \leqslant J(v) \quad \forall v \in H$.

On obtient alors l'expression (26) souhaitée.

■

3.3 Résolution sur un exemple linéaire

Théorème 3.3 (de Dirichlet)**.**
Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ unique solution de (24). De plus, u s'obtient par :

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \Big\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_\Omega fv \Big\} \tag{27}$$

Preuve du théorème 3.3.
On applique le théorème de Lax-Milgram dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ avec la forme bilinéaire $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv)$ et la forme linéaire $\varphi(v) = \displaystyle\int_\Omega fv$.
a correspond au produit scalaire sur $H^1(\Omega)$ donc c'est bien une forme bilinéaire continue (par Cauchy Schwarz), de plus $a(u,u) = \langle u, u \rangle_{H^1} = \|u\|_{H^1}^2 \geqslant 1 \times \|u\|_{H^1}^2$ donc a est coercive. Et $\varphi(v)$ est bien une forme linéaire. ■

4 Équation semi-linéaire

4.1 Exemple semi-linéaire

On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{28}$$

avec Ω un ouvert borné $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
On ne peut plus utiliser le théorème de Lax-Milgram, car f n'est pas linéaire, donc on n'est plus dans un problème linéaire. L'idée va être d'utiliser un théorème de point fixe sur une bonne application. Pour pouvoir trouver des solutions, on va introduire le théorème de point fixe de Schauder (qui peut se démontrer grâce au théorème de point fixe de Brouwer).

4.2 Théorème de point fixe de Schauder

4.2.1 Théorème de point fixe de Brouwer

Définition 4.1 (Rétraction)**.**

Soit A un ensemble, soit B un sous-ensemble de A, l'application $r : A \to B$ est une rétraction de A sur B si $r(x) = x \ \ \forall x \in B$.

Lemme 4.1.
Il n'existe par de rétraction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{B}$ sur $\mathbb{S}$.

Remarque 4.1. La preuve de ce lemme est complexe et requiert des notions poussées de topologie algébrique. On ne la détaillera pas dans ce document.

Théorème 4.1. de point fixe de Brouwer
Soit T une application continue de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$.
Alors T admet un point fixe.

Preuve du Théorème 4.1.
Étape 1 : Résultat pour $T \in \mathcal{C}^1$.
Par l'absurde, on suppose que T n'admet pas de point fixe. Soit la fonction φ qui a un point x de $\mathbb{B}$ associe le point d'intersection entre la demi-droite $[T(x), x)$ et la sphère $\mathbb{S}$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{S} \quad \varphi(x) = x$, donc φ est une rétraction de $\mathbb{B}$ sur $\mathbb{S}$.
On peut écrire $\varphi(x) = T(x) + \lambda(x)(x - T(x))$ avec $\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.
$\|\varphi(x)\|^2 = 1$
$\|T(x)\|^2 + 2\lambda(x)\langle x - T(x), T(x)\rangle + \lambda(x)^2\|T(x) - x\|^2 = 1$
Donc $\lambda(x) = \dfrac{-2\langle x - T(x), T(x)\rangle + \sqrt{\Delta}}{4\|T(x) - x\|^2}$
avec $\Delta = 4\langle x - T(x), T(x)\rangle^2 + 4\|T(x) - x\|^2(1 - \|T(x)\|^2) > 0$
λ est bien défini (car $T(x) \neq x$ par hypothèse) et $\mathcal{C}^1$.
Donc φ est une rétraction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{B}$ sur $\mathbb{S}$.
Or par le lemme 4.1, ce n'est pas possible, donc T admet un point fixe.

Étape 2 : le cas général.
On peut approcher par limite uniforme une fonction continue par une suite de fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (C^1)^{\mathbb{N}}$ telle que $T_n \overset{\text{CU}}{\to} T$ sur $\mathbb{B}$.
On pose $g_n = \dfrac{T_n}{1 + \|T - T_n\|}$ de façon à ce que la suite soit dans $\mathbb{B}$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n vérifie les hypothèses du théorème et donc $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists y_n \in \mathbb{B} \ \ / \ \ g_n(y_n) = y_n$ Comme $\mathbb{B}$ est compacte, on peut extraire une sous-suite convergente de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette extraction qui converge vers $x \in \mathbb{B}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \|g_n(x_n) - T(x_n)\| = \|x_n - T(x_n)\| \to 0$
Ainsi, $T(x_n) \sim x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ et $T(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} T(x)$ par continuité de T, puis par unicité de la limite $T(x) = x$. ■

Corollaire 4.1.
Soit $\mathcal{C}$ un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^N$ et T une fonction continue de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Alors T admet un point fixe.

Preuve du corollaire 4.1.

Comme $\mathcal{C}$ est compact, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{C} \subset B(0, r)$
On définit la fonction g par : $g(x) = \dfrac{T(P_{\mathcal{C}}(rx))}{r}$ $\quad \forall x \in \mathbb{B}$ avec $P_{\mathcal{C}}$ la projection sur $\mathcal{C}$.
g est une fonction continue, et qui va de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$, ainsi g vérifie le théorème de point fixe de Brouwer (4.1).
D'où il existe x_0 tel que $g(x_0) = x_0$ soit $T(P_{\mathcal{C}}(rx_0)) = rx_0$, or $T(P_{\mathcal{C}}(rx_0)) \in \mathcal{C}$ donc $rx_0 \in \mathcal{C}$, de ce fait $P_{\mathcal{C}}(rx_0) = rx_0$, ce qui donne $T(rx_0) = rx_0$, ainsi rx_0 est un point fixe de T. ■

4.2.2 Théorème de point fixe de Schauder

Théorème 4.2 (de point fixe de Schauder)**.**
Soit X un espace de Banach, soit $M \subset X$ un convexe fermé borné non vide et T une application compacte de M dans M. Alors T admet un point fixe.

Preuve du théorème 4.2.
$\overline{T(M)}$ est compact par définition de la compacité de l'application T.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par Borel-Lebesgue,
il existe $c_1, c_2, ..., c_m \in M$ tels que $\overline{T(M)} \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} B(c_i, \frac{1}{n})$
On pose $C_n = \text{conv}(c_1, c_2, ..., c_m)$
Soit

$$T_n \;:\; \begin{array}{ccc} C_n & \to & C_n \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\max(0, \frac{1}{n} - \|T(x) - c_i\|)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \max(0, \frac{1}{n} - \|T(x) - c_j\|)} c_i \end{array}$$

T_n est continue car $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \max(0, \frac{1}{n} - \|T(x) - c_j\|) \neq 0$ puisque $T(C_n) \subset \overline{T(M)} \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} B(c_i, \frac{1}{n})$
L'ensemble $K = \left\{(t_1, t_2, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m \;/\; \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i = 1 \text{ et } \forall i \in [\![1; m]\!] \quad t_i \geqslant 0\right\}$ est compact (car c'est un fermé borné en dimension finie)

$$\text{Soit } f \;:\; \begin{array}{ccc} K & \to & C_n \\ (t_1, t_2, ..., t_m) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i c_i \end{array},$$

alors f est continue et comme K est compact, ainsi $f(K)$ est compact or $f(K) = C_n$.

Ainsi les hypothèses du théorème de Brouwer 4.1 sont vérifiées, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in C_n$ tel que $T_n(x_n) = x_n$.
$\overline{T(M)}$ est compact dans M, on peut donc extraire une suite convergente à la

suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit φ l'extractrice et c la valeur limite. On a $T(x_{\varphi(n)}) \to c$, donc $\forall \epsilon\ \ \exists n_0\ /\ \|T(x_{\varphi(n)}) - c\| \leqslant \epsilon$

On veut montrer que $\forall a \in C_n\ \ \|T_n(a) - T(a)\| \leqslant \dfrac{1}{n}$

$a \in C_n$, donc $T(a) \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} B(c_i, \frac{1}{n})$

On pose l'ensemble $I = \{i \in \{1;...;m\}, f(a) \in B(c_i, \frac{1}{n})\}$ et $\forall i \in I$, on pose $y_i \in B(0,1)$ tel que $T(a) = c_i + \frac{1}{n} y_i$

$$\begin{aligned}
\|T_n(a) - T(a)\| &= \Big\| \sum_{i\in I} \frac{\frac{1}{n} - \|T(x) - c_i\|}{\sum_{j\in I} \frac{1}{n} - \|T(x) - c_j\|} c_i - T(a) \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{i\in I} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\|y_i\|}{\sum_{j\in I} \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\|y_j\|\big)} (c_i - T(a)) \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{i\in I} \frac{1 - \|y_i\|}{\sum_{j\in I} \big(1 - \|y_j\|\big)} \frac{1}{n} y_i \Big\| \\
&\leqslant \sum_{i\in I} \frac{1 - \|y_i\|}{\sum_{j\in I} \big(1 - \|y_j\|\big)} \frac{1}{n} \|y_i\| \\
&\leqslant \frac{1}{n} \text{ car } y_i \in B(0,1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|T_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - c\| &\leqslant \|T_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - T(x_{\varphi(n)})\| + \|T(x_{\varphi(n)}) - c\| \\
&\leqslant \frac{1}{\varphi(n)} + \epsilon \\
&\leqslant 2\epsilon \qquad \forall n \geqslant \max(n_0, \lfloor \tfrac{1}{\epsilon} \rfloor + 1)
\end{aligned}$$

$T_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$, donc comme $T_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$, on a $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} c$
Or T est continue, donc $T(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(c)$ et $T(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} c$, par définition de c.
D'où $T(c) = c$ par unicité de la limite, ce qui prouve le théorème. ■

4.3 Résolution du problème semi-linéaire

Théorème 4.3.
Soient Ω un ouvert borné $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors le problème (28) a une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$, i.e. u vérifie l'équation

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\phi\ dx = \int_\Omega f(u)\phi\ dx \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega)$$

Preuve du théorème 4.3.

On veut appliquer le théorème de point fixe de Schauder (4.2) à l'application

$$T \ : \ \begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & (-\Delta)^{-1}(f(u)) \end{array}$$

$(-\Delta)^{-1}(f(u))$ est une notation qui désigne la *solution faible* pour le problème **variationnel**.

Étape 1 : Prouver la continuité de T

On admet que les applications $\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & f(u) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ g & \mapsto & (-\Delta)^{-1}(g) \end{array}$ sont continues. (Pour les preuves, regarder dans [7])

Par les injections compactes du théorème de Rellich-Kondrachov (2.5), on a l'injection continue $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, donc T est continue.

Étape 2 : Trouver M, un convexe fermé borné non-vide, tel que $T : M \to M$

Comme $u \in L^2(\Omega)$,

$\|\nabla T(u)\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \nabla T(u).\nabla T(u)dx = \int_\Omega f(u)T(u)dx \leqslant a|\Omega|\|T(u)\|_{L^2(\Omega)}$ car f est borné (par un réel qu'on a appelé a), et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Par l'inégalité de Poincaré (17), on a $\|T(u)\|_{L^2}^2 \leqslant C\|\nabla T(u)\|_{L^2}^2 \leqslant Ca|\Omega|\|T(u)\|_{L^2(\Omega)}$. Soit $r = a|\Omega|C$, on pose $M := \{u \in L^2(\Omega) \ / \ \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant r\}$, on a bien $\|T(u)\|_{L^2} \leqslant r$.

Étape 3 : Prouver la compacité de T

$$\begin{array}{rcl} \|\nabla T(u)\|_{L^2}^2 & \leqslant & K\|\nabla T(u)\|_{L^2} \ \text{ par l'inégalité précédente et l'inégalité de Poincaré} \\ \|\nabla T(u)\|_{L^2} & \leqslant & K \\ \|T(u)\|_{H^1} & \leqslant & r + K \end{array}$$

Or $H^1 \subset L^2$ avec injection compacte (Théorème de Rellich Kondrachov (2.5)), donc T est compacte.

Donc, on peut utiliser le théorème de point fixe de Schauder (4.2). ■

Remarque 4.2. Sans hypothèse supplémentaire sur f, on ne sait pas si la solution est unique ou non.

5 Équation quasi-linéaire

5.1 Exemple quasi-linéaire

On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + g(\nabla u) + \mu u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{29}$$

avec Ω un ouvert borné $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ et $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ fonction lipschitzienne.

Pour pouvoir trouver des solutions faibles, on ne peut toujours pas utiliser le théorème de Lax-Milgram, il faut utiliser un théorème de point fixe de nouveau, on va alors introduire le théorème de point fixe de Schaeffer.

5.2 Théorème de point fixe de Schaeffer

Théorème 5.1 (de point fixe de Schaeffer)**.**

Soit X un espace de Banach, $T : X \to X$ une application compacte.
Si l'ensemble $\{x \in X \ / \ x = \lambda T(x) \text{ avec } \lambda \in [0;1]\}$ est borné.
Alors T admet un point fixe.

Preuve du théorème 5.1.

Par hypothèse, il existe M tel que $\|x\| < M \quad \text{si } x = \lambda T(x) \text{ pour } \lambda \in [0;1]$

$$\text{Soit } r \ : \ \begin{array}{ccc} X & \to & B(0,M) \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \leqslant M \\ \dfrac{M}{\|x\|}x & \text{si } \|x\| > M \end{cases} \end{array}$$

Or $r \circ T : B(0,M) \to B(0,M)$ est compacte car T l'est.
Soit $K = \text{conv}(r \circ T(B(0,M)))$ compact car $r \circ T(B(0,M))$ est compacte.
On applique le théorème de point fixe de Schauder à l'application $r \circ T_{|K} : K \to K$ car K est bien borné, convexe, non vide et compact.
Ainsi il existe $x \in K$ tel que $r \circ T(x) = x$.

On suppose $T(x) \notin K$ donc $\|T(x)\| > M$. $x = r(T(x)) = \dfrac{M}{\|T(x)\|}T(x)$, d'où $\|x\| = M$. Or $\dfrac{M}{\|T(x)\|} \in]0;1[$, et $x = \dfrac{M}{\|T(x)\|}T(x)$ donc $\|x\| < M$ par définition de M.

Ce qui aboutit à une contradiction, donc $\|T(x)\| < M$ c'est à dire $T(x) \in K$, alors $r(T(x)) = T(x) = x$, ainsi T admet un point fixe.

■

5.3 Résolution du problème quasi-linéaire

Théorème 5.2.

Soient Ω un ouvert borné $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ et g une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.
Si $\mu > 0$ est assez grand, alors il existe une fonction $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solution faible du problème (29).

On va utiliser un théorème de régularité elliptique :

Théorème 5.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème (29). Alors $u \in H^2(\Omega)$ et il existe K une constante ne dépendant que de Ω qui vérifie :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Remarque 5.1. On peut trouver une preuve de ce théorème dans [9], p.100.

Preuve du théorème 5.2.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose la fonction $f(u) := -g(\nabla u)$.
Comme g est lipschitzienne, g vérifie la condition :

$$|g(t)| \leqslant C(1+|t|) \quad \text{avec } C \text{ une constante} \quad \forall t \in \mathbb{R}^N$$

Donc $f(u) \in L^2(\Omega)$ car $\displaystyle\int_\Omega |f(u)|^2 dx = \int_\Omega |g(\nabla u)|^2 dx \leqslant \int_\Omega C^2(1+|\nabla u|)^2 dx \leqslant \int_\Omega C^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty$ car $u \in H_0^1(\Omega)$ et Ω est borné donc $\nabla u \in (L^2(\Omega))^N$.

Par le théorème de Lax-Milgram et dans le cadre de résolution de problème linéaire, on a une solution $w \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w = f(u) \text{ dans } \Omega \\ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{30}$$

Par le théorème de régularité elliptique, on a $w \in H^2(\Omega)$ et l'inégalité $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K\|f\|_{L^2(\Omega)}$ pour une certaine constante K.
Par les précédentes définitions et assertions, on peut définir l'application T telle que $T(u) = w$.
On veut maintenant utiliser le théorème de point fixe de Schaeffer sur l'application T pour conclure.

Étape 1 : $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ est continue et compacte.

Soit (u_n) une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$.

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_{H^2} = \|w\|_{H^2} &\leqslant K\|f\|_{L^2} \\ &\leqslant K\Big(\int_\Omega C^2(1+|\nabla u|)^2 dx\Big)^{1/2} \\ &\leqslant L(1+\|u\|_{H_0^1}) \\ &\text{car } \|\nabla u\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T(u_n)\|_{H^2} < \infty$. On pose $w_n := T(u_n)$, (w_n) est une suite bornée, donc il existe une sous-suite $w_{n'}$ qui converge faiblement vers un w appartenant à $H_0^1(\Omega)$, (voir propriété 6.1). On a :

$$\int_\Omega \nabla w_{n'}.\nabla v dx + \mu \int_\Omega w_{n'} v dx = -\int_\Omega g(\nabla u_{n'}) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On obtient alors l'expression suivante :

$$\int_\Omega \nabla w.\nabla v dx + \mu \int_\Omega w v dx = -\int_\Omega g(\nabla u) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

D'où $w = T(u)$, et donc $T(u_n) \to T(u)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Donc T est continue.
Par des arguments similaires, on prouve que T est compacte, avec (u_n) une suite

bornée dans H_0^1, qui implique $(T(u_n))$ bornée dans H^2. Par l'injection compacte de H^2 dans H_0^1, donc $(T(u_n))$ possède une sous-suite convergente dans H_0^1.

Étape 2 : Pour un $\mu > 0$ assez élevé, $M := \{u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $u = \lambda T(u)$ pour $\lambda \in [0;1]\}$ doit être borné dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $u \in M$, il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que $\dfrac{u}{\lambda} = T(u)$ donc $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$
On a $-\nabla T(u) + \mu T(u) = f(u)$ par définition de w, donc $-\nabla u + \mu u = -\lambda g(\nabla u)$ presque partout sur Ω.
En multipliant par u et en intégrant, on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \mu \int_\Omega |u|^2 dx = -\int_\Omega \lambda g(\nabla u) u \ dx$$

Et

$$-\int_\Omega \lambda g(\nabla u) u \ dx \leqslant \int_\Omega C(|\nabla u| + 1)|u| dx$$

On va utiliser l'inégalité $ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$

$$\int_\Omega C|\nabla u||u| dx \leqslant \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} dx + C^2 \int_\Omega \frac{|u|^2}{2} dx$$

$$\int_\Omega C|u| dx \leqslant \int_\Omega \frac{|u|^2}{2} dx + \int_\Omega \frac{C^2}{2} dx$$

On trouve alors

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \mu \int_\Omega |u|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (C^2+1)\int_\Omega \frac{|u|^2}{2} dx + \int_\Omega \frac{C^2}{2} dx$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (\mu - C^2 - 1)\int_\Omega |u|^2 dx \leqslant R$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant R$$

pour μ bien choisi et par équivalence avec la norme $\|.\|_{H_0^1(\Omega)}$ donc M est borné.

Étape 3 : On peut donc appliquer le théorème de Schaeffer et trouver un point fixe de T, ainsi on trouve une solution faible, appartenant à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, au problème (29). ■

6 Équations non linéaires

On va s'intéresser à résoudre des équations du type :

$$\int_\Omega a(\nabla u).\nabla v \ dx = \int_\Omega fv \ dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

avec a un opérateur continue coercif monotone de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ qui vérifie $\exists C_1, C_2 >$

$0 \ / \ \forall \xi \quad |a(\xi)| \leqslant C_1|\xi|^{p-1} + C_2$ et f une fonction de $L^{p'}(\Omega)$

C'est la formule variationnelle du problème $\begin{cases} -\text{div}(a(\nabla u)) = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$

On pourrait étendre tout ce qu'on va voir aux opérateurs de Leray-Lions.

Définition 6.1 (Opérateur de Leray-Lions)**.** Un opérateur de Leray-Lions est une fonction $a \ : \begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R}^N \\ (x, s, \xi) & \mapsto & a(x, s, \xi) \end{array}$ qui vérifie les 4 propriétés suivantes :

(i) - a est de Carathéodory, c'est à dire mesurable en x pour tout s, ξ, et continue en s, ξ pour presque tout $x \in \Omega$.

(ii) - $\exists \alpha > 0 \quad a(x, s, \xi).\xi \geqslant \alpha|\xi|^p \quad \forall s, \xi \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \ \ p.p. \ x \in \Omega$

(iii) - $\exists b \in L^{p'}(\Omega)$ avec p' vérifiant $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1, \exists C > 0$ tel que

$$\forall s, \xi \text{ et } p.p. \ x \quad |a(x, s, \xi| \leqslant C\big(b(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big)$$

(iv) - $\forall s, \xi, \xi'$ et $p.p. \ x \quad (a(x, s, \xi) - a(x, s, \xi')).(\xi - \xi') \geqslant 0$

On ne peut pas utiliser le théorème de Lax-Milgram car l'opérateur n'est pas continu, on va alors utiliser la méthode suivante qui consiste à trouver des solutions dans un espace de dimension fini (méthode de Galerkin) et de prouver que ces solutions tendent faiblement vers une solution générale du problème.

6.1 Méthode de Galerkin

On sait que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable, donc il existe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des (w_n) soit dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $w_1, w_2, ..., w_n$ base de $\text{Vect}(w_1, w_2, ..., w_n)$.
Pour $n \geqslant 2$, on pose $\mathcal{V}_n := \{\text{Vect}(w_1, w_2, ..., w_n) \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$
Comme $w_1, w_2, ..., w_n$ est une famille libre (base de $\mathcal{V}_n$), $\mathcal{V}_n$ et $\mathbb{R}^n$ sont isomorphes. $\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \ \leftrightarrow \ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\big)$

Ainsi on se ramène à chercher $u_n \in \mathcal{V}_n$ tel que

$$\forall v_n \in \mathcal{V}_n \quad \int_\Omega a(\nabla u_n).\nabla v_n \ dx = \int_\Omega f v_n \ dx,$$

ce qui est équivalent à trouver $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \int_\Omega a(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \nabla w_j).\nabla w_i \ dx = \int_\Omega f w_i \ dx$$

On définit maintenant l'application :

$$L \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R}^N \\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) & \mapsto & \Big(\displaystyle\int_\Omega a(\sum_{j=1}^n \lambda_j \nabla w_j).\nabla w_i \; dx - \int_\Omega f w_i \; dx \Big)_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \end{array}$$

On veut montrer que L s'annule.
On rappelle que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Étape 1 : L est continue.
Soit $\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_n^{(l)} \xrightarrow[l\to\infty]{} \lambda_1, ...\lambda_n$.
Ainsi $\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j^{(l)} w_j \xrightarrow[l\to\infty]{CU} \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j w_j$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$
Comme a est continue, $a(\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j^{(l)} w_j) \xrightarrow[l\to\infty]{} a(\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j w_j)$
Donc $L(\lambda_1^{(l)}, ..., \lambda_n^{(l)}) \xrightarrow[l\to\infty]{} L(\lambda_1, ...\lambda_n)$ car les $w_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Étape 2 : On veut prouver $\exists \rho > 0 / |(\lambda_1, ...\lambda_n)|_{\mathbb{R}^n} = \rho \implies L(v_n).v_n \geqslant 0$
Par hypothèse sur a, on a $a(\xi).\xi \geqslant \alpha |\xi|^p$

$$\begin{aligned}
L(\lambda_1, ...\lambda_n).(\lambda_1, ...\lambda_n) &= \sum_{i=1}^n \Big(\int_\Omega a(\sum_{j=1}^n \lambda_j \nabla w_j).\nabla w_i \; dx - \int_\Omega f w_i \; dx \Big) \lambda_i \\
&= \int_\Omega a(\sum_{j=1}^n \lambda_j \nabla w_j). \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla w_i \; dx - \int_\Omega f \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \; dx \\
&\geqslant \alpha \int_\Omega \Big| \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla w_i \Big|^p dx - \int_\Omega f \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \; dx \\
&\geqslant \alpha \int_\Omega \Big| \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla w_i \Big|^p dx - \|f\|_{L^{p'}} \| \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \|_{L^p} \quad \text{par Hölder} \\
&\geqslant \alpha \int_\Omega \Big| \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla w_i \Big|^p dx - C\|f\|_{L^{p'}} \| \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla w_i \|_{(L^p)^n} \quad \text{par Poincaré} \\
&\geqslant \alpha \|v_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\|f\|_{L^{p'}} \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Comme $p > 1$, $\quad \alpha \; r^p - C\|f\|_{L^{p'}} r \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$.
Donc $\exists \tilde{\rho} > 0 \;/\; \|v_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \tilde{\rho} \implies L(v_n).v_n \geqslant 0$
Puis, par équivalence des normes, $\exists \rho > 0 \;/\; |(\lambda_1, ...\lambda_n)|_{\mathbb{R}^n} = \rho \implies L(v_n).v_n \geqslant 0$

Étape 3 : On veut prouver $\exists u_n \in \mathbb{R}^n \;/\; |u_n| \leqslant \rho$ et $L(u_n) = 0$
Par l'absurde, on suppose que $\forall v \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, \rho), \quad L(v) \neq 0$
On pose $G(v) = -\dfrac{\rho}{\|L(v)\|_{\mathbb{R}^n}} L(v)$
$\|G(v)\| = \rho$, donc $G(v) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, \rho)$.

Grâce à l'*étape 1*, on a que G est continue sur $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,\rho)$.
On peut alors utiliser le théorème de Brouwer pour G sur $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,\rho)$.
Il existe donc un $v_0 \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,\rho)$ tel que $G(v_0) = v_0$. On a $|v_0|_{\mathbb{R}^n} = \rho$ et $L(v_0).v_0 = -\rho \dfrac{L(v_0).L(v_0)}{\|L(v_0)\|_{\mathbb{R}^n}} < 0$
Cela contredit l'*étape 2*, donc il existe un $u_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u_n\| \leqslant \rho$ et $L(u_n) = 0$.
On a donc trouvé $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{n,i} w_i$ une solution du problème approché (c'est à dire sur $\mathcal{V}_n$).

6.2 Estimation a priori et extraction de sous-suite

Étape 1 : On veut prouver que $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)^N}$ est borné indépendamment de n.
Grâce à la méthode de Galerkin, on a $\forall i \in \{1,...,n\}$ $\displaystyle\int_\Omega a(\sum_j u_{n,j}\nabla w_j).\nabla w_i \; dx = \int_\Omega f w_i \; dx$. Donc $\displaystyle\int_\Omega a(\sum_{j=1}^{n} u_{n,j}\nabla w_j).\sum_{i=1}^{n} u_{n,i}\nabla w_i \; dx = \int_\Omega f \sum_{i=1}^{n} u_{n,i} w_i \; dx$

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(\nabla u_n).\nabla u_n \; dx &= \int_\Omega f u_n \; dx \\ &\leqslant \|f\|_{L^{p'}}\|u_n\|_{L^p} \text{ par l'inégalité de Hölder} \\ &\leqslant C\|f\|_{L^{p'}}\|\nabla u_n\|_{L^p} \text{ par l'inégalité de Poincaré}\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_\Omega a(\nabla u_n).\nabla(u_n) \geqslant \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p$ par coercivité de a, donc $\alpha\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant C\|f\|_{L^{p'}}$, soit $\alpha\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{p'}} \leqslant C\|f\|_{L^{p'}}$ et $\|\nabla u_n\|_{L^p} \leqslant C(\alpha,\Omega,p)\|f\|_{L^{p'}}^{\frac{p'}{p}}$.

Étape 2 : Convergence faible de u_n et $a(u_n)$
On veut utiliser la propriété suivante :

Proposition 6.1.
Si X est réflexif, toute suite bornée dans X' admet une sous-suite faiblement convergente.

On a $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u_n\|_{L^p} + \|\nabla u_n\|_{L^p} \leqslant (C+1)\|\nabla u_n\|_{L^p}$ donc (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
On a, grâce à la condition imposée à a, que

$$|a(\nabla u_n)| \leqslant C_1|\nabla u_n|^{p-1} + C_2 \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

$$|a(\nabla u_n)|^{p'} \leqslant \left(C_1|\nabla u_n|^{p-1} + C_2\right)^{\frac{p}{p-1}} \leqslant C_3|\nabla u_n|^p + C_4 \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

Donc $(a(\nabla u_n))$ est borné dans $(L^{p'}(\Omega))^N$
Ainsi, à une sous suite près que l'on note toujours par n, on a :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ (faible dans } W_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$a(\nabla u_n) \rightharpoonup \sigma \text{ (faible dans } (L^{p'}(\Omega))^N).$$

Remarque 6.1. La principale difficulté est l'identification $\sigma = a(\nabla u)$, on va l'obtenir par la méthode suivante, dite *de Minty*.

6.3 Passage à la limite et identification

Préliminaire :

$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \implies a(\nabla u) \in (L^{p'}(\Omega))^N$

car

$$\forall \xi \quad |(a(\xi)| \leqslant C_1|\xi|^{p-1} + C_2$$

d'où

$$\int_\Omega \left|a(\nabla u)\right|^{p'} \leqslant \int_\Omega C_1'\left|\nabla u\right|^{p'(p-1)} + \int_\Omega C_2'$$

Sachant que $p' = \dfrac{p}{p-1}$, on trouve :

$$\int_\Omega C_1'\left|\nabla u\right|^p + \int_\Omega C_2' < \infty.$$

Puisque $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Donc $a(\nabla u) \in (L^{p'}(\Omega))^N$. ■

Grâce à la méthode de Galerkin et les convergences faibles, on a :

$$\forall i \quad \int_\Omega \sigma.\nabla w_i \; dx = \int_\Omega f w_i \; dx$$

D'où $\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \quad \displaystyle\int_\Omega \sigma.\nabla \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \; dx = \int_\Omega f \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \; dx$

Or, par définition, les combinaisons linéaires des (w_i) sont denses dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc :

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \int_\Omega \sigma.\nabla v \; dx = \int_\Omega f v \; dx$$

On veut prouver que $\sigma = a(\nabla u)$.

$$\int_\Omega a(\nabla u_n).\nabla u_n \; dx = \int_\Omega f u_n \; dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega f u \; dx = \int_\Omega \sigma.\nabla u \; dx$$

car $u_n \rightharpoonup u$

$\forall w \in (L^p(\Omega))^N \quad \Big(a(\nabla u_n) - a(w)\Big).\Big(\nabla u_n - w\Big) \geqslant 0 \quad$ *p.p.* dans Ω, par hypothèse

$$\int_\Omega \Big(a(\nabla u_n) - a(w)\Big).\Big(\nabla u_n - w\Big) \; dx \geqslant 0$$

car $\nabla u_n - w \in (L^p(\Omega))^N$ et $a(\nabla u_n) - a(w) \in (L^{p'}(\Omega))^N$, d'où par l'inégalité de Hölder, $(a(\nabla u_n) - a(w)).(\nabla u_n - w) \in L^1(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega a(\nabla u_n).\nabla u_n \; dx - \int_\Omega a(\nabla u_n).w \; dx - \int_\Omega a(w).\nabla u_n \; dx + \int_\Omega a(w).w \; dx \geqslant 0$$

En passant à la limite $n \to \infty$ dans chaque terme, on obtient :

$$\int_\Omega \sigma.\nabla u \; dx - \int_\Omega \sigma.w \; dx - \int_\Omega a(w).\nabla u \; dx + \int_\Omega a(w).w \; dx \geqslant 0$$

$$\int_\Omega \Big(\sigma - a(w)\Big).\Big(\nabla u - w\Big) \; dx \geqslant 0$$

On pose $w = \nabla u + t\varphi$ avec $\varphi \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^N$, $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_\Omega \Bigg(\sigma - a(\nabla u + t\varphi)\Bigg).t\varphi \; dx \leqslant 0$$

$$\forall t \neq 0 \;\; \frac{t}{|t|} \int_\Omega \Bigg(\sigma - a(\nabla u + t\varphi)\Bigg).\varphi \; dx \leqslant 0$$

Par continuité de a, $a(\nabla u + t\varphi) \xrightarrow[t \to 0^\pm]{} a(\nabla u)$

On obtient quand $t \to 0^+$ que $\displaystyle\int_\Omega \Bigg(\sigma - a(\nabla u)\Bigg).\varphi \; dx \leqslant 0$

et quand $t \to 0^-$ que $\displaystyle -\int_\Omega \Bigg(\sigma - a(\nabla u)\Bigg).\varphi \; dx \leqslant 0$

Donc $\displaystyle\int_\Omega \Bigg(\sigma - a(\nabla u)\Bigg).\varphi \; dx = 0 \quad \forall \varphi \in (\mathcal{C}_0^\infty(\Omega))^N$ d'où $\sigma = a(\nabla u)$ *p.p.*

Ainsi $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et vérifie $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \displaystyle\int_\Omega a(\nabla u).\nabla v \; dx = \int_\Omega fv \; dx.$

6.4 Unicité

Si l'opérateur a est strictement monotone, c'est-à-dire qu'il est continue et qu'il vérifie :

$$\forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N \quad \Big(a(\xi) - a(\xi')\Big).\Big(\xi - \xi'\Big) > 0 \;\; \forall \xi \neq \xi',$$

alors il y a unicité de la solution.

Preuve : Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème variationnel. On va appliquer $u_1 - u_2$ comme fonction test dans le problème variationnel.

$$\int_\Omega a(\nabla u_1).(\nabla u_1 - \nabla u_2) \; dx = \int_\Omega f \; (u_1 - u_2) \; dx$$

$$\int_\Omega a(\nabla u_2).(\nabla u_1 - \nabla u_2) \; dx = \int_\Omega f \; (u_1 - u_2) \; dx$$

D'où
$$\int_\Omega \Big(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)\Big).\Big(\nabla u_1 - \nabla u_2\Big)\ dx = 0$$

Comme $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N \quad \Big(a(\xi) - a(\xi')\Big).\Big(\xi - \xi'\Big) > 0 \quad \forall \xi \neq \xi'$, alors $\nabla u_1 = \nabla u_2$ *p.p.* dans Ω.

Or $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donc comme il y a les mêmes conditions aux limites, on a $u_1 = u_2$ *p.p.* dans Ω.

■

7 Bibliographie

[1] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Ed. MASSON, (1992)

[2] F. DEMENGEL, *Introduction aux équations aux dérivées partielles elliptiques, Fonctions à dérivées mesures et application*, Ed. FONDATIONS, (1999)

[3] F. DEMENGEL & G. DEMENGEL, *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*, Ed. SPRINGER, (2012)

[4] W. P. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions*, Ed. SPRINGER-VERLAG (1989)

[5] T. GALLOUËT, *Equations aux dérivées partielles*, article, Université Aix Marseille (Master 2), (2013)

[6] O. GUIBÉ, *Equations aux dérivées partielles non linéaires*, cours

[7] Z. SMITH, *Fixed point methods in nonlinear analysis*, article, (2014)

[8] A. GIRAND, *Espace de Sobolev $H^1(I)$*, article (2012)

[9] H. LE DRET, *Équations aux dérivées partielles elliptiques*, cours, (2010)