

2019/2020

MASTER 2 RECHERCHE FONDAMENTALE EN MATHÉMATIQUES

---

## Séminaire : Matrices de Toeplitz

---

*Encadrant* : Benjamin BOUTIN

Rédigé par Pierre LE BARBENCHON



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Définitions</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Etude du spectre</b>	<b>3</b>
3.1	Le cas Toeplitz . . . . .	3
3.2	Le cas Quasi-Toeplitz . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Lien entre les différents spectres</b>	<b>9</b>

## 1 Introduction

En s'appuyant sur la lecture des articles de Beam et Warming [BW91] et [BW93] (ainsi que d'autres articles qui y sont référencés), on va définir les matrices de Toeplitz et les matrices Quasi-Toeplitz. Notre but sera d'étudier leur spectre notamment lorsque l'on fait tendre la dimension de la matrice vers l'infini.

Pour une matrice de Toeplitz, on donnera une caractérisation du spectre asymptotique qui nous aidera à montrer qu'il ne contient pas de points isolés.

Pour une matrice Quasi-Toeplitz, on pourra séparer le spectre asymptotique en deux ensembles :

- le premier est égal au spectre asymptotique de la matrice de Toeplitz associée ;
- le deuxième est fini et indépendant de la dimension de la matrice.

Enfin, on localisera le spectre asymptotique d'une matrice Toeplitz. Il se situera « à l'intérieur » du spectre de la matrice circulante associée.

## 2 Définitions

On fixe  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $a_{-p}, a_{-p+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_q \in \mathbb{C}$ .

**Définition 1** (Matrice Toeplitz). Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle matrice de Toeplitz la matrice suivante

$$T(n) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_q & 0 & \dots & 0 \\ a_{-1} & a_0 & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 0 \\ a_{-p} & & & \ddots & & & a_q \\ 0 & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & a_0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_{-p} & \dots & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On note  $\sigma_n$  le spectre de la matrice  $T(n)$ .

**Définition 2** (Matrice Quasi-Toeplitz). Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r \leq n$ , des coefficients  $(b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$  et  $(c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}}$ .

On appelle matrice Quasi-Toeplitz la matrice suivante

$$\tilde{T}(n) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,r} & 0 & \dots & 0 \\ a_{-p} & \dots & a_0 & \dots & a_q & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & a_{-p} & \dots & a_0 & \dots & a_q \\ 0 & \dots & 0 & c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,r} \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{q,1} & c_{q,2} & \dots & c_{q,r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,r} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,r} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,r} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{q,1} & c_{q,2} & \dots & c_{q,r} \end{pmatrix}$$

On note  $\tilde{\sigma}_n$  le spectre de la matrice  $\tilde{T}(n)$ .

**Remarque 3 :**

On peut supposer que  $r \geq \max(p, q)$ .

**Définition 4** (Matrice circulante). Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle matrice circulante la matrice suivante

$$T^\circ(n) = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_q & 0 & a_{-p} & \dots & a_{-1} \\ \vdots & a_0 & & & \ddots & & \vdots \\ a_{-p} & & \ddots & & & \ddots & a_{-p} \\ 0 & & & \ddots & & & 0 \\ a_q & \ddots & & & \ddots & & a_q \\ \vdots & & \ddots & & & a_0 & \vdots \\ a_1 & \dots & a_q & 0 & a_{-p} & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On note  $\sigma_n^\circ$  le spectre de la matrice  $T^\circ(n)$ .

**Définition 5** (Opérateur sur  $\mathbb{Z}$ ). On définit l'opérateur suivant :

$$T : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{Z}) & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} & \mapsto & ((Tu)_n)_{n \in \mathbb{Z}} = \left( \sum_{i=-p}^q a_i u_{n+i} \right)_{n \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

On note  $\sigma$  le spectre de l'opérateur  $T$ .

**Définition 6** (Opérateur sur  $\mathbb{N}$ ). On définit l'opérateur suivant :

$$T^+ : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & ((T^+u)_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

$$\text{avec } \forall n \in \mathbb{N}, \quad (T^+u)_n = \begin{cases} \sum_{i=-p}^q a_i u_{n+i} & \text{si } n \geq p \\ \sum_{i=-n}^q a_i u_{n+i} & \text{si } n < p \end{cases}$$

On note  $\sigma^+$  le spectre de l'opérateur  $T^+$ .

**Exemple 7.** On va prendre pour exemple la matrice  $\tilde{T}(n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  où  $p = q = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 0$  et  $a_{-1} = -1$ .

$$\tilde{T}(n) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3 Etude du spectre

On veut étudier le spectre des matrices Toeplitz et Quasi-Toeplitz, notamment leur comportement quand on fait tendre la dimension vers l'infini.

**Définition 8** (Spectre asymptotique de la matrice Toeplitz). On appelle spectre asymptotique de la matrice Toeplitz l'ensemble suivant

$$\mathcal{S} = \left\{ \lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_m, \lambda_m \in \sigma_{i_m}, \lim_{m \rightarrow \infty} i_m = +\infty \right\}.$$

**Définition 9** (Spectre asymptotique de la matrice Quasi-Toeplitz). On appelle spectre asymptotique de la matrice Quasi-Toeplitz l'ensemble suivant

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ \lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_m, \lambda_m \in \tilde{\sigma}_{i_m}, \lim_{m \rightarrow \infty} i_m = +\infty \right\}.$$

#### 3.1 Le cas Toeplitz

On veut résoudre le problème suivant

$$T(n)\phi = \lambda\phi$$

où  $\lambda$  est une valeur propre de  $T(n)$  et  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ .

Ce qui revient à résoudre le système

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \sum_{m=-p}^q a_m \phi_{j+m} = \lambda \phi_j$$

avec des conditions de bords nulles pour  $\phi_m$  avec  $m \in \{-p-1, \dots, 0\} \cup \{n+1, \dots, n+q\}$ .

On voit donc apparaître une suite récurrente linéaire d'ordre  $p+q$ . En remplaçant  $\phi_j$  par  $r^j$ , on trouve alors l'équation caractéristique que l'on veut résoudre

$$\lambda = \sum_{m=-p}^q a_m r^m.$$

En multipliant par  $r^p$ , on se ramène à chercher les racines du polynôme

$$a_q r^{p+q} + \dots + a_1 r^{p+1} + (a_0 - \lambda) r^p + a_{-1} r^{p-1} + \dots + a_{-p} = 0. \quad (1)$$

On note  $(\kappa_m(\lambda))_{m=1}^{p+q}$  les  $p+q$  racines de ce polynôme (il faut faire attention les racines dépendent de  $\lambda$ ) que l'on va ranger par modules croissants.

$$|\kappa_1(\lambda)| \leq \dots \leq |\kappa_p(\lambda)| \leq |\kappa_{p+1}(\lambda)| \leq \dots \leq |\kappa_{p+q}(\lambda)|$$

On peut alors exprimer les coordonnées du vecteur propre  $\phi$  (qui correspondent à la solution de la suite récurrente linéaire)

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \phi_j = \sum_{m=1}^{p+q} \beta_m \kappa_m^j \text{ où } \beta_1, \dots, \beta_{p+q} \in \mathbb{R}$$

Enfin en utilisant les  $p+q$  conditions de bords nulles, on peut trouver les coefficients  $(\beta_m)$ .

**Remarque 10 :**

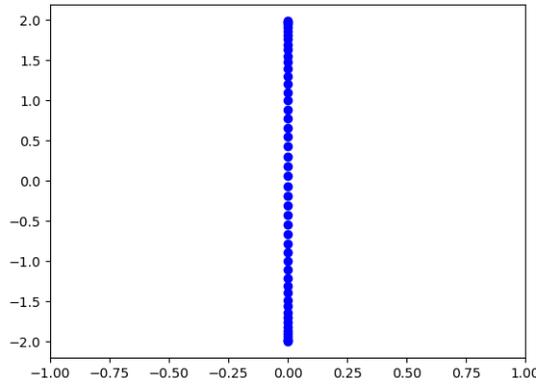
Pour simplifier, on suppose que les racines du polynôme (1) sont distinctes afin de faciliter l'étude du spectre asymptotique des matrices Quasi-Toeplitz. Si on avait des racines multiples pour l'équation caractéristique, on aurait des solutions de la forme  $\phi_j = \sum_{m=1}^s \left( \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} \beta_{m,l} j^l \right) \kappa_m^j$  où  $s$  est le nombre de racines distinctes et  $\alpha_s$  est la multiplicité de chaque racine.

**Exemple 11.** Pour la matrice  $T(n)$  associée à notre exemple, on trouve

$$\sigma_n = \left\{ \lambda_k := 2i \cos \left( \frac{\pi k}{n+1} \right), \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \right\}$$

et pour chaque valeur propre  $\lambda_k \in \sigma_n$ , on a

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \phi_j(\lambda_k) = 2i^{j+1} \sin \left( \frac{2\pi k j}{n+1} \right)$$



Spectre de  $T(n)$  pour  $n = 50$ .

En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient que le spectre asymptotique de notre matrice sera le segment  $[-2i, 2i]$ , on remarque donc que le spectre asymptotique ne contient pas de points isolés.

C'est en fait une propriété générale, le spectre asymptotique ne contient pas de points isolés. Pour le voir, on peut utiliser la propriété suivante

**Proposition 12.**

$$\mathcal{S} = \mathcal{C}$$

où l'ensemble  $\mathcal{C}$  est défini par  $\mathcal{C} := \{\lambda \in \mathbb{C}, |\kappa_p(\lambda)| = |\kappa_{p+1}(\lambda)|\}$ .

*Démonstration.* Résultat démontré dans [SS60]. □

**Proposition 13.** L'ensemble  $\mathcal{C}$  ne contient pas de points isolés.

*Démonstration.* Résultat démontré dans [SS60]. □

**Corollaire 14.** L'ensemble  $\mathcal{S}$  ne contient pas de points isolés.**Remarque 15 :**

Il ne peut donc pas y avoir de valeur propre  $\lambda$  dans le spectre asymptotique telle que

$$|\kappa_p(\lambda)| < |\kappa_{p+1}(\lambda)|.$$

**3.2 Le cas Quasi-Toeplitz**

Pour les matrices Quasi-Toeplitz, le comportement du spectre asymptotique est différent. On remarque que l'égalité  $\mathcal{S} = \mathcal{C}$  n'est plus satisfaite, car des points isolés peuvent apparaître dans le spectre asymptotique.

En effet, considérons notre exemple  $\tilde{T}(n)$ , les conditions de bords nous donne l'équation

$$-2\phi_2 + 2\phi_3 = \lambda\phi_1$$

En posant  $\phi_j = r^j$ , on a

$$-2r + 2r^2 = \lambda$$

et l'équation caractéristique donne

$$r^2 - \lambda r - 1 = 0 \tag{2}$$

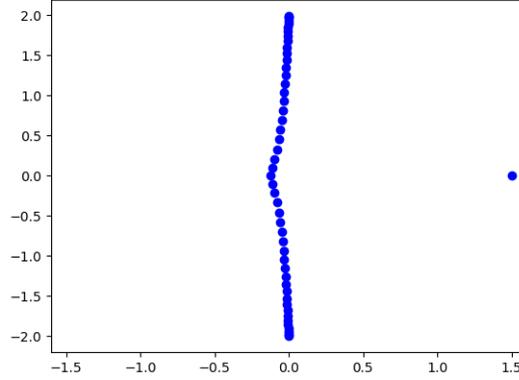
En combinant ces deux expressions, on trouve

$$(r - 1)^2(2r + 1) = 0$$

qui a pour solution 1, 1 et  $-1/2$ .

Or on sait que les deux racines  $\kappa_1, \kappa_2$  de (2) vérifient  $\kappa_1\kappa_2 = -1$ . Donc si l'on voulait  $|\kappa_1| < |\kappa_2|$ , il faudrait  $|\kappa_1| < \frac{1}{|\kappa_1|}$ , autrement dit  $|\kappa_1| < 1$ . Donc la racine  $-1/2$  fourni une valeur propre  $\lambda = 3/2$  qui n'est pas dans le spectre asymptotique de la matrice de Toeplitz associée.

Le spectre asymptotique de la matrice  $\tilde{T}(n)$  est donc l'union de la valeur  $3/2$  et du segment  $[-2i, 2i]$ .



Spectre de  $\tilde{T}(n)$  pour  $n = 50$ .

On va voir que le spectre asymptotique d'une matrice Quasi-Toeplitz peut s'écrire comme l'union disjointe de deux ensembles :

- $\mathcal{C}$  qui est indépendant des conditions de bords.
- $\mathcal{D}$  qui dépend uniquement des conditions de bords.

Afin d'étudier l'ensemble  $\mathcal{D}$ , on pose les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R}) \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$$

$$K_{rp}(\lambda) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \dots & \kappa_p \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_1^r & \dots & \kappa_p^r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R}) \quad K_{rq}(\lambda) = \begin{pmatrix} \kappa_{p+1} & \dots & \kappa_{p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_{p+1}^r & \dots & \kappa_{p+q}^r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$$

On peut alors donner la partition suivante de  $\tilde{\mathcal{S}}$  :

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ \lambda \in \tilde{\mathcal{S}}, |\kappa_p(\lambda)| = |\kappa_{p+1}(\lambda)| \right\}$$

$$\sqcup \left\{ \lambda \in \tilde{\mathcal{S}}, |\kappa_p(\lambda)| < |\kappa_{p+1}(\lambda)|, \det[(B - \lambda D)K_{rp}] = 0 \text{ ou } \det[(C - \lambda \tilde{D})K_{rq}] = 0 \right\}$$

$$\sqcup \left\{ \lambda \in \tilde{\mathcal{S}}, |\kappa_p(\lambda)| < |\kappa_{p+1}(\lambda)|, \det[(B - \lambda D)K_{rp}] \neq 0 \text{ et } \det[(C - \lambda \tilde{D})K_{rq}] \neq 0 \right\}$$

On notera respectivement  $\tilde{\mathcal{C}}$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ces trois ensembles.

**Proposition 16.** L'ensemble  $\tilde{\mathcal{C}}$  est le spectre asymptotique de la matrice de Toeplitz associé.

$$\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} = \{ \lambda \in \mathbb{C}, |\kappa_p(\lambda)| = |\kappa_{p+1}(\lambda)| \}$$

*Démonstration.* Selon [BW93], cela est démontré dans l'article [SS60]. □

**Proposition 17.**

$$\mathcal{D}_2 = \emptyset$$

*Démonstration.* Notre but va être de montrer que les conditions imposées par l'ensemble  $\mathcal{D}_2$  impliquent que les coefficients  $(\beta_m)_{m=1}^{p+q}$  sont tous nuls. Ainsi les coordonnées du vecteur propre  $\phi$  seront nulles et cela contredira le fait que  $\phi$  est un vecteur propre. Il faut faire attention aux coefficients  $(\beta_m)$  car ils dépendent a priori de  $n$ .

On sait que les vecteurs propres sont de la forme  $\phi = (\phi_j(\lambda))_{j=1}^n$  avec

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \phi_j = \sum_{m=1}^p \beta_m \kappa_m^j + \sum_{m=p+1}^{p+q} \beta_m \kappa_m^j$$

et vérifient l'équation  $\tilde{T}(n)\phi = \lambda\phi$ . Supposons que les  $(\beta_m)$  sont non tous nuls. Quitte à diviser par la norme du vecteur des  $(\beta_m)$ <sup>1</sup>, on peut supposer que

$$\left\| \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

En isolant les lignes liées aux matrices  $B$  et  $C$ , on obtient les systèmes

$$(B - \lambda D) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_r \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad (C - \lambda \tilde{D}) \begin{pmatrix} \phi_{n-r+1} \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = 0$$

Or on peut réécrire les vecteurs  $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_r \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \phi_{n-r+1} \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$  en

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \dots & \kappa_p \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_1^r & \dots & \kappa_p^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_{p+1} & \dots & \kappa_{p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_{p+1}^r & \dots & \kappa_{p+q}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{p+1} \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{n-r+1} \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1^{n-r+1} & \dots & \kappa_p^{n-r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_1^n & \dots & \kappa_p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa_{p+1}^{n-r+1} & \dots & \kappa_{p+q}^{n-r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_{p+1}^n & \dots & \kappa_{p+q}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{p+1} \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix}$$

On doit donc résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} (B - \lambda D)K_{rp} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + (B - \lambda D) \begin{pmatrix} \kappa_{p+1} & \dots & \kappa_{p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_{p+1}^r & \dots & \kappa_{p+q}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{p+1} \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ (C - \lambda \tilde{D}) \begin{pmatrix} \kappa_1^{n-r+1} & \dots & \kappa_p^{n-r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_1^n & \dots & \kappa_p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + (C - \lambda \tilde{D})K_{rq} \begin{pmatrix} \kappa_{p+1}^{n-r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_{p+q}^{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{p+1} \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Cela n'est pas contraignant car les vecteurs propres sont définis à homothétie près

Comme  $(C - \lambda\tilde{D})K_{rq}$  est inversible par hypothèse, la deuxième partie du système nous donne

$$\begin{pmatrix} \beta_{p+1} \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{p+1}^{r-n} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \kappa_{p+q}^{r-n} \end{pmatrix} \left( (C - \lambda\tilde{D})K_{rq} \right)^{-1} \left( -(C - \lambda\tilde{D}) \begin{pmatrix} \kappa_1^{n-r+1} & \dots & \kappa_p^{n-r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_1^n & \dots & \kappa_p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \right)$$

Comme on a par hypothèse que

$$|\kappa_1| \leq \dots \leq |\kappa_p| < |\kappa_{p+1}| \leq \dots \leq |\kappa_{p+q}|,$$

on a alors

$$\left\| \begin{pmatrix} \beta_{p+1} \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix} \right\| = O \left( \underbrace{\left( \frac{|\kappa_p|}{|\kappa_{p+1}|} \right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \right) \left\| \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \right\|$$

Puisque la norme du vecteur des  $(\beta_m)$  vaut 1, on a

$$\left\| \begin{pmatrix} \beta_{p+1} \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Cependant, comme  $(B - \lambda D)K_{rp}$  est inversible par hypothèse, la première partie du système nous donne

$$\left\| \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \right\| = \left\| ((B - \lambda D)K_{rp})^{-1} (B - \lambda D) \begin{pmatrix} \kappa_{p+1} & \dots & \kappa_{p+q} \\ \vdots & & \vdots \\ \kappa_{p+1}^r & \dots & \kappa_{p+q}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{p+1} \\ \vdots \\ \beta_{p+q} \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ce qui entre en contradiction avec le fait que la norme du vecteur des  $(\beta_m)$  vaut 1. Ainsi, les  $(\beta_m)$  sont tous nuls, donc le vecteur propre serait nul ce qui est exclu par définition d'un vecteur propre. Ainsi l'ensemble  $\mathcal{D}_2$  est vide.  $\square$

### Remarque 18 :

On peut observer que l'hypothèse d'être dans le spectre asymptotique ne force pas la valeur propre  $\lambda$  à être forcément dans le spectre de toutes les matrices de Toeplitz à partir d'un certain rang. Et on obtient un résultat asymptotique pour les coefficients  $(\beta)$  (avec le grand  $O$ ) qui conforte la cohérence de la notion d'asymptotique.

**Proposition 19.** L'ensemble  $\mathcal{D}_1$  est en fait l'ensemble

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\kappa_p(\lambda)| < |\kappa_{p+1}(\lambda)|, \det[(B - \lambda D)K_{rp}] = 0 \text{ ou } \det[(C - \lambda\tilde{D})K_{rq}] = 0 \right\}$$

### Remarque 20 :

Les valeurs  $\lambda$  vivent maintenant dans  $\mathbb{C}$  et non juste dans  $\tilde{\mathcal{S}}$ .

*Démonstration.* Selon [BW93], cela est démontré dans l'article [Kre68].  $\square$

**Corollaire 21.** On a

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{C} \sqcup \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\kappa_p(\lambda)| < |\kappa_{p+1}(\lambda)|, \det[(B - \lambda D)K_{rp}] = 0 \text{ ou } \det[(C - \lambda \tilde{D})K_{rq}] = 0 \right\}$$

*Démonstration.* Par les propriétés 16, 17 et 19.  $\square$

**Conjecture 22.** Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on ait

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \lambda \in \tilde{\sigma}_n, |\kappa_p(\lambda)| < |\kappa_{p+1}(\lambda)|, \det[(B - \lambda D)K_{rp}] = 0 \right. \\ \left. \text{ou } \det[(C - \lambda \tilde{D})K_{rq}] = 0 \right\}$$

**Corollaire 23** (de la conjecture). L'ensemble  $\mathcal{D}_1$  est fini.

*Démonstration.* En effet, par la conjecture précédente, l'ensemble  $\mathcal{D}_1$  est inclus dans l'ensemble des valeurs propres de  $\tilde{T}(n_0)$ . Or  $\tilde{T}(n_0)$  possède un nombre fini de valeurs propres. Ainsi l'ensemble  $\mathcal{D}_1$  est fini.  $\square$

## 4 Lien entre les différents spectres

**Proposition 24.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^\circ = \sigma$$

**Remarque 25 :**

On note  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^\circ$  pour désigner le spectre asymptotique de  $T^\circ(n)$ , autrement dit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^\circ := \left\{ \lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_m, \lambda_m \in \sigma_{i_m}^\circ, \lim_{m \rightarrow \infty} i_m = +\infty \right\}.$$

*Démonstration.* **Étape 1 :** Calculons le spectre de  $\sigma_n^\circ$ .

On veut trouver le polynôme caractéristique de  $T^\circ(n)$  donc il faut calculer le déterminant de

$$XI_n - T^\circ(n) = \begin{pmatrix} X - a_0 & \dots & -a_q & 0 & -a_{-p} & \dots & -a_{-1} \\ \vdots & X - a_0 & & & \ddots & & \vdots \\ -a_{-p} & & \ddots & & & \ddots & -a_{-p} \\ 0 & & & \ddots & & & 0 \\ -a_q & \ddots & & & \ddots & & -a_q \\ \vdots & & \ddots & & & X - a_0 & \vdots \\ -a_1 & \dots & -a_q & 0 & -a_{-p} & \dots & X - a_0 \end{pmatrix}.$$

C'est le déterminant d'une matrice circulante, donc il vaut

$$\prod_{m=0}^{n-1} P(\omega^m)$$

où  $\omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}$  et  $P(t) = X - a_0 - a_1t - a_2t^2 - \dots - a_qt^q - a_{-p}t^{n-p} - \dots - a_{-1}t^{n-1}$ .

Ainsi  $\chi_{T^\circ(n)} = \prod_{m=0}^{n-1} \left( X - \sum_{j=-p}^q a_j e^{\frac{i2\pi jm}{n}} \right)$ . Donc les valeurs propres de  $T^\circ(n)$  sont

$$\sigma_n^\circ = \left\{ \sum_{j=-p}^q a_j e^{\frac{i2\pi jm}{n}}, m \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

Quand on fait tendre vers  $+\infty$ , on trouve donc l'ensemble

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^\circ = \left\{ \sum_{j=-p}^q a_j e^{ij\xi}, \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Étape 2 :** Calculons le spectre de l'opérateur  $T$ .

On utilise la transformée de Fourier discrète

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}), \hat{u}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{i\xi n} \text{ dans } L^2(\mathbb{T}).$$

On trouve alors, pour tout  $\xi \in \mathbb{T}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{T}u(\xi) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-p}^q a_j u_{n+j} e^{in\xi} \\ &= \sum_{j=-p}^q a_j e^{-ij\xi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{in\xi} \\ &= \sum_{j=-p}^q a_j e^{-ij\xi} \hat{u} \text{ dans } L^2(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Donc pour  $\lambda = \sum_{j=-p}^q a_j e^{-ij\xi}$ ,  $T - \lambda$  n'est pas injectif. Donc  $\sum_{j=-p}^q a_j e^{-ij\xi}$  est dans  $\sigma$ . De plus, pour

tout  $\lambda \neq \sum_{j=-p}^q a_j e^{-ij\xi}$ , par transformée de Fourier inverse,  $T - \lambda$  est surjectif. Donc le spectre de  $T$  est exactement

$$\sigma = \left\{ \sum_{j=-p}^q a_j e^{ij\xi}, \xi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Ce qui conclut la preuve. □

**Proposition 26.**

$$\sigma^+ = \sigma \cup \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Ind}_\sigma(\lambda) \neq 0\}$$

*Démonstration.* Dans l'article [CSW59], il est montré que

$$T^+ \text{ est inversible si et seulement si } [I(\varphi) = 0 \text{ et } \varphi(\theta) \neq 0]$$

$$\text{où } \varphi(\theta) = \sum_{j=-p}^q a_j e^{ij\theta} \text{ et } I(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \log \varphi.$$

Ainsi,  $\lambda \in \sigma^+$  si et seulement si  $[I(\varphi - \lambda) \neq 0 \text{ ou } \varphi(\theta) = \lambda]$ .

La propriété  $\varphi(\theta) = \lambda$  est équivalente à  $\lambda \in \sigma$  par la preuve de la propriété précédente.

De plus, comme  $\sigma = \{\varphi(\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$  par la preuve précédente, on a alors

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\sigma(\lambda) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\sigma \frac{dz}{z - \lambda} \text{ par définition de l'indice} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(\theta) d\theta}{\varphi(\theta) - \lambda} \text{ en utilisant le chemin } \varphi \text{ pour décrire } \sigma \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \log(\varphi - \lambda) \\ &= I(\varphi - \lambda) \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve bien

$$\sigma^+ = \sigma \cup \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Ind}_\sigma(\lambda) \neq 0\}$$

□

### Remarque 27 :

Dans l'introduction, ce que l'on a appelé « l'intérieur » du spectre de la matrice circulante associée est donc cet ensemble  $\sigma \cup \{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Ind}_\sigma(\lambda) \neq 0\}$ .

### Proposition 28.

$$\mathcal{C} \subset \sigma^+$$

*Démonstration.* On va utiliser un résultat de l'article [SS60] qui dit que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{r>0} \sigma^+(r)$$

où  $\sigma^+(r)$  désigne le spectre de l'opérateur

$$T_r^+ : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (T_r^+ u)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

$$\text{avec } (T_r^+ u)_n = \begin{cases} \sum_{i=-p}^q a_i r^i u_{n+i} & \text{si } n \geq p \\ \sum_{i=-n}^q a_i r^i u_{n+i} & \text{si } n < p \end{cases}$$

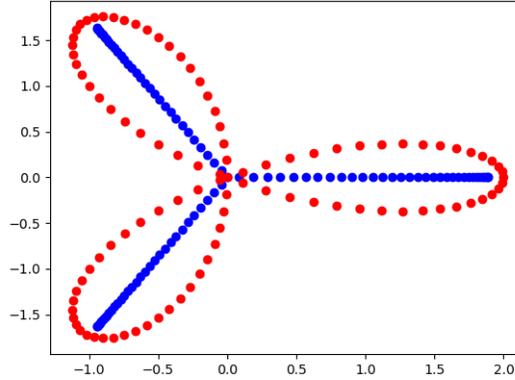
On remarque que  $\sigma^+(1) = \sigma^+$ .

Ainsi on a

$$\mathcal{C} = \bigcap_{r>0} \sigma^+(r) \subset \sigma^+(1) = \sigma^+$$

□

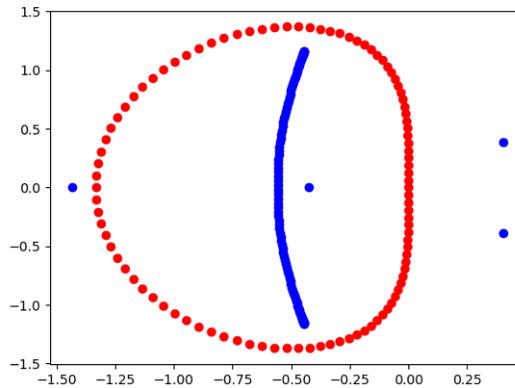
**Exemple 29.** On illustre cela sur l'exemple suivant avec  $p = 2$  et  $q = 1$ . On pose les coefficients  $a_0 = a_{-1} = 0$  et  $a_1 = a_{-2} = 1$ . On obtient le spectre suivant.



Les valeurs rouges sont les valeurs propres de la matrice circulante et les valeurs bleues sont les valeurs propres de la matrice Toeplitz pour  $n = 100$ .

On peut maintenant regarder le cas d'une matrice Quasi-Toeplitz.

**Exemple 30.** Soit  $p = 1$  et  $q = 2$ . On pose les coefficients  $a_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_{-1} = -\frac{1}{3}$ ,  $a_1 = 1$  et  $a_2 = -\frac{1}{6}$ . On modifie la première ligne en  $\left(-\frac{27}{10}, \frac{28}{5}, -\frac{41}{10}, \frac{6}{5}, 0, \dots, 0\right)$  et la dernière ligne en  $\left(0, \dots, 0, \frac{4}{5}, -\frac{29}{10}, \frac{12}{5}\right)$ .



Les valeurs rouges sont les valeurs propres de la matrice circulante et les valeurs bleues sont les valeurs propres de la matrice Quasi-Toeplitz pour  $n = 100$ .

**Remarque 31 :**

On voit donc que l'on n'a pas de contrôle par le spectre de  $T$  sur les valeurs propres qui dépendent des conditions de bords de  $\tilde{T}(n)$ .

## Références

- [BW91] Richard Beam and Robert Warming. The asymptotic spectra of banded toeplitz and quasi-toeplitz matrices. November 1991.
- [BW93] Richard Beam and Robert Warming. The asymptotic spectra of banded toeplitz and quasi-toeplitz matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing*, pages 971–1006, July 1993.
- [CSW59] A. Calderon, F. Spitzer, and H. Widom. The inversion of toeplitz matrices. *Illinois J.Math.*, 3, 1959.
- [Hir65] Isidore Isaac Hirschman. Studies in real and complex analysis. *Washington University*, 3 :179 – 208, 1965.
- [Kre68] Heinz-Otto Kreiss. Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value. *Mathematics of Computation*, 22 :703 – 714, 1968.
- [SS60] Palle Schmidt and Frank Spitzer. The toeplitz matrices of an arbitrary laurent polynomial. *Mathematica Scandinavica*, pages 15–38, 1960.