2019/2020

Master 2 Recherche fondamentale en mathématiques

Analyse Microlocale

Professeur : Zied Ammari

Rédigé par Pierre Le Barbenchon

Université de Rennes 1

Introduction :

Voici le travail que j'ai produit pour le devoir libre d'analyse microlocale. Bien que j'y ai consacré beaucoup de temps pendant les vacances, je n'ai malheureusement pas su répondre à toutes les questions. De plus, j'ai parfois préféré faire des références au cours et/ou aux livres pour me concentrer sur la structure des preuves et/ou sur les points clés des preuves.

Problème 1 (Théorèmes de Groenewold et Stone-von Neumann)**.**

Pour $j = 1, \dots, n$, on considère

$$\hat{X}_j = x_j, \quad \text{et} \quad \hat{P}_j = -i\hbar\partial_{x_j}$$

des opérateurs sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. On pose $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à plusieurs variables des variables $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. On note $\mathcal{W}$ pour l'algèbre de Weyl.

Question 1. Montrer que $\hat{X}_j$ et $\hat{P}_j$ sont essentiellement auto-adjoints sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Solution 1. On utilise le théorème qui dit qu'un opérateur T densément défini dans $\mathcal{H}$ et symétrique est essentiellement autoadjoint si et seulement si $\overline{\mathrm{Ran}(T \pm i\mathrm{Id})} = \mathcal{H}$.

- Les opérateurs $\hat{X}_j$ et $\hat{P}_j$ sont densément définis car leur domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Ils sont symétriques car pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \hat{X}_j f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{x_j f(x)} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x_j \overline{f(x)} g(x) dx \\ &= \langle f, \hat{X}_j g\rangle\end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned}\langle \hat{P}_j f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{-i\hbar\partial_{x_j} f(x)} g(x) dx \\ &= i\hbar \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\partial_{x_j} f(x)} g(x) dx \\ &= -i\hbar \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \partial_{x_j} g(x) dx \text{ par IPP} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \hat{P}_j g(x) dx \\ &= \langle f, \hat{P}_j g\rangle\end{aligned}$$

- On veut montrer que $\overline{\mathrm{Ran}(\hat{X}_j \pm i\mathrm{Id})} = L^2(\mathbb{R}^n)$. On a l'inclusion directe puisque

$$\mathrm{Ran}(\hat{X}_j \pm i\mathrm{Id}) = \{x_j v \pm iv, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\} \subset L^2$$

  et que L^2 est fermé. Réciproquement, soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(f_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ qui converge dans L^2 vers f. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \dfrac{1}{x_j \pm i} f_k(x)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De ce fait, $f_k \in \mathrm{Ran}(\hat{X}_j \pm i\mathrm{Id})$. Ainsi

$$f \in \overline{\mathrm{Ran}(\hat{X}_j \pm i\mathrm{Id})}$$

- On veut montrer que $\overline{\mathrm{Ran}(\hat{P}_j \pm i\mathrm{Id})} = L^2(\mathbb{R}^n)$. On a l'inclusion directe puisque

$$\mathrm{Ran}(\hat{X}P_j \pm i\mathrm{Id}) = \{-i\hbar\partial_{x_j} v \pm iv, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\} \subset L^2$$

  et que L^2 est fermé. Réciproquement, soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(f_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ qui converge dans L^2 vers f. On va utiliser la transformée de Fourier puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par transformée de Fourier. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto \frac{1}{\hbar\xi_j \pm i}\hat{f}_k(\xi)\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

  De ce fait, on a $-i\hbar\partial_{x_j} v_k \pm iv_k = f_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $f_k \in \mathrm{Ran}(\hat{X}P_j \pm i\mathrm{Id})$. Ainsi

$$f \in \overline{\mathrm{Ran}(\hat{P}_j \pm i\mathrm{Id})}$$

Ainsi cela montre que les opérateurs $\hat{X}_j$ et $\hat{P}_j$ sont essentiellement auto-adjoints.

Question 2. Montrer que
$$e^{ia\cdot\hat{X}}e^{ib\cdot\hat{P}} = e^{-i\hbar a\cdot b}e^{ib\cdot\hat{P}}e^{ia\cdot\hat{X}}$$

Solution 2. Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. On a $e^{ib\cdot\hat{P}}\varphi(x) = \varphi(x+\hbar b)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (la preuve a été faite dans le cours, on a utilisé la transformée de Fourier pour le démontrer).

Ainsi, pourt tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} e^{ia\cdot\hat{X}}\mathrm{e}^{ib\cdot\hat{P}}\varphi(x) &= e^{ia\cdot\hat{X}}\varphi(x+\hbar b) \\ &= e^{ia\cdot x}\varphi(x+\hbar b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{-i\hbar a\cdot b}\mathrm{e}^{ib\cdot\hat{P}}e^{ia\cdot\hat{X}}\varphi(x) &= e^{-i\hbar a\cdot b}\mathrm{e}^{ib\cdot\hat{P}}(e^{ia\cdot x}\varphi(x)) \\ &= e^{-i\hbar a\cdot b}e^{ia\cdot(x+\hbar b)}\varphi(x+\hbar b) \\ &= e^{ia\cdot x}\varphi(x+\hbar b) \end{aligned}$$

Les deux calculs aboutissent au même résultat, ce qui donne l'égalité souhaitée.

Question 3. En déduire que $a\cdot\hat{X} + b\cdot\hat{P}$ est essentiellement auto-adjoint pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Solution 3. On va utiliser le théorème de Nelson en utilisant le groupe unitaire à un paramètre fortement continu $\mathcal{U}$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{U}(t)\varphi(x) := e^{\frac{i\hbar}{2}a\cdot bt^2}e^{ia\cdot xt}\varphi(x+\ \hbar tb)$$

Par le théorème de Stone, on a $\mathcal{U}(t) = e^{itA}$. Comme dans le cours, on peut montrer que $A = a\cdot\hat{X} + b\cdot\hat{P}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en utilisant que

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \frac{d}{dt}\mathcal{U}(t)\varphi = iA\mathcal{U}(t)\varphi$$

De plus, l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et stable par $\mathcal{U}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Enfin, on a montré dans le cours que $\mathcal{U}(t)$ est fortement différentiable sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On peut donc appliquer le théorème de Nelson qui montre que $A = a\cdot\hat{X} + b\cdot\hat{P}$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Question 4. Montrer que la famille $\{e^{i(a\cdot\hat{X}+b\cdot\hat{P})}, a, b \in \mathbb{R}^n\}$ est irréductible sur $\mathcal{H}$.

Solution 4. On va montrer que l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par $e^{ia\cdot\hat{X}}$ et $e^{ib\cdot\hat{P}}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^n$ est irréductible.

Étape 1 : *Montrons que les endomorphismes de $\mathcal{H}$ qui commutent avec tous les $e^{ia\cdot\hat{X}}$ et $e^{ib\cdot\hat{P}}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^n$ sont des multiples de l'identité.*

Je n'ai pas réussi à montrer que les endomorphismes A de L^2 qui commutent avec tous les $e^{ia\cdot\hat{X}}$ sont de la forme

$$Au(x) = f(x)u(x)$$

pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ensuite, comme on aurait aussi

$$A = \mathrm{e}^{ib\cdot\hat{P}} A e^{-ib\cdot\hat{P}}$$

De ce fait, comme $Au = fu$, on aurait $Au(x) = f(x + \hbar b)u(x)$, puis par identification, on a $f(x) = f(x + \hbar b)$ pour tout $b \in \mathbb{R}^n$. Donc f est constante et A s'écrit

$$Au = Cu$$

où C est constante. Autrement dit, $A = C\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Étape 2 : *Montrons l'irréductibilité de $\mathcal{A}$.*

Soit F un sous espace fermé de $\mathcal{H}$ qui est stable par tous les éléments $e^{ia\cdot\hat{X}}$ et $e^{ib\cdot\hat{P}}$. On a alors que $F^\perp$ est stable par $e^{ia\cdot\hat{X}}$ et $e^{ib\cdot\hat{P}}$. En effet, soit $y \in F^\perp$, soit $x \in F$, on a alors

$$\langle e^{ia\cdot\hat{X}} y, x\rangle = \langle y, \underbrace{e^{-ia\cdot\hat{X}} x}_{\in F}\rangle = 0$$

Donc $e^{ia\cdot\hat{X}} y \in F^\perp$. Calcul similaire pour $e^{ib\cdot\hat{P}}$.

Comme F et $F^\perp$ sont stables par $e^{ia\cdot\hat{X}}$ et $e^{ib\cdot\hat{P}}$, la projection orthogonale $\pi : \mathcal{H} \to F$ commute avec tous les $e^{ia\cdot\hat{X}}$ et $e^{ib\cdot\hat{P}}$. Ainsi, par l'étape 1, on a π qui est soit l'application nulle soit l'identité. [1] On conclut donc que F est soit réduit à $\{0\}$ soit égal à $\mathcal{H}$. Ainsi $\mathcal{A}$ est irréductible sur $\mathcal{H}$.

Étape 3 : *Conclure.*

On a, par la Question 2,

$$\{e^{i(a\cdot\hat{X}+b\cdot\hat{P})}, a, b \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathcal{A}$$

De plus, comme $e^{ia\cdot\hat{X}}$ et $e^{ib\cdot\hat{P}}$ sont dans $\{e^{i(a\cdot\hat{X}+b\cdot\hat{P})}, a, b \in \mathbb{R}^n\}$, on a alors, par définition de $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \subset \{e^{i(a\cdot\hat{X}+b\cdot\hat{P})}, a, b \in \mathbb{R}^n\}$$

Ainsi $\{e^{i(a\cdot\hat{X}+b\cdot\hat{P})}, a, b \in \mathbb{R}^n\}$ est irréductible, puisque $\mathcal{A}$ l'est.

1. puisque c'est forcément une homothétie par l'étape 1 et que $\forall x \in F, \pi(x) = x$.

Question 5. Montrer qu'il n'existe pas de quantification $Q : \mathcal{P} \to \mathcal{W}$ qui satisfait les axiomes suivants :

(i) Q est linéaire et $Q(1) = Id_{\mathcal{H}}$.

(ii) $Q(x_j) = \hat{X}_j$ et $Q(\xi_j) = \hat{P}_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

(iii) Pour tout $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$,
$$\frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)] = Q(\{f, g\})$$
où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne les crochets de Poisson.

Remarque :
Je me suis inspiré de la preuve du livre [HAL13, p.272]. Comme la preuve est déjà faite dans ce livre, je vais essayer de mettre en lumière les points importants et expliciter le schéma de preuve. Je ferais donc directement référence à certaines preuves de lemme déjà présentes dans [HAL13].

Solution 5. On notera $\mathcal{P}_{\leqslant k}$ pour les polynômes à $2n$ variables $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ de degré au plus k. Pour montrer ce théorème, on va montrer qu'il n'existe pas de quantification $Q : \mathcal{P}_{\leqslant 4} \to \mathcal{W}$ qui satisfait :

(i) Q est linéaire et $Q(1) = Id_{\mathcal{H}}$.

(ii) $Q(x_j) = \hat{X}_j$ et $Q(\xi_j) = \hat{P}_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

(iii) Pour tout $f, g \in \mathcal{P}_{\leqslant 3}$,
$$\frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)] = Q(\{f, g\})$$
où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne les crochets de Poisson.

On va montrer que toute quantification Q qui vérifient ces propriétés coïncide avec la quantification de Weyl Q_{Weyl} sur $\mathcal{P}_{\leqslant 3}$. Ensuite on va montrer qu'un certain $f \in \mathcal{P}_{\leqslant 4}$ peut être exprimé de deux façons différentes avec des crochets de Poisson, *i.e.* $f = \{g, h\} = \{g', h'\}$ avec $g, h, g', h' \in \mathcal{P}_{\leqslant 3}$. Puis en calculant $[Q(f), Q(g)]$ et $[Q(f'), Q(g')]$, on trouvera des résultats différents, ainsi on aboutira à une contradiction. Une fois ce théorème démontré, on saura qu'il n'existe pas de quantification sur $\mathcal{P}$ puisqu'il n'en existe pas sur $\mathcal{P}_{\leqslant 4}$.

Étape 1 : *Toute quantification qui vérifient* (i), (ii) *et* (iii) *coïncide avec la quantification de Weyl sur* $\mathcal{P}_{\leqslant 3}$.

Par la propriété 13.13 du livre [HAL13, p.269], la quantification de Weyl est exacte pour f un polynôme de degré au plus 2 et g un polynôme quelconque. La preuve de cette propriété se fait en traitant les cas f de degré 0 (immédiat), f de degré 1 (calcul), puis f de degré 2 (formules pour se ramener au cas f de degré 1).

Par hypothèse (ii), la quantification Q coïncide avec Q_{Weyl} sur $\mathcal{P}_{\leqslant 1}$.

Montrons le maintenant pour $\mathcal{P}_{\leqslant 2}$. Soit $f \in \mathcal{P}_{\leqslant 2}$, on note
$$Q(f) = Q_{Weyl}(f) + A_f$$

Pour $g \in \mathcal{P}_{\leqslant 1}$, on a par la propriété 13.13 et le point (iii),

$$\begin{aligned} Q(\{f,g\}) &= \frac{1}{i\hbar}[Q(f),Q(g)] \\ &= \frac{1}{i\hbar}[Q_{Weyl}(f),Q_{Weyl}(g)] + \frac{1}{i\hbar}[A_f,Q_{Weyl}(g)] \\ &= Q_{Weyl}(\{f,g\}) + \frac{1}{i\hbar}[A_f,Q_{Weyl}(g)] \\ &= Q(\{f,g\}) + \frac{1}{i\hbar}[A_f,Q_{Weyl}(g)] \end{aligned}$$

car $\{f,g\} \in \mathcal{P}_{\leqslant 1}$. On a donc $[A_f, Q_{Weyl}(g)] = 0$, autrement dit A_f commute avec $Q_{Weyl}(g)$. Or, on peut prouver que tout élément $A \in \mathcal{W}$ qui commute avec tous les opérateurs $\hat{X}_j$ et $\hat{P}_j$ est en fait une homothétie (voir lemme 13.15 du livre [HAL13, p.273]). En prenant $g \in \{x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n\}$, on en déduit que $A_f = c_f\mathrm{Id}$ avec c_f une constante.

Ainsi, pour tout $h \in \mathcal{P}_{\leqslant 2}$, on a

$$\begin{aligned} Q(\{f,h\}) &= \frac{1}{i\hbar}[Q(f),Q(h)] \\ &= \frac{1}{i\hbar}[Q_{Weyl}(f)+c_f\mathrm{Id},Q_{Weyl}(h)+c_h\mathrm{Id}] \\ &= \frac{1}{i\hbar}[Q_{Weyl}(f),Q_{Weyl}(h)] \\ &= Q_{Weyl}(\{f,h\}) \end{aligned}$$

Ainsi, Q et Q_{Weyl} coïncident sur les éléments de $\mathcal{P}_2$ qui s'écrivent $\{f,h\}$ avec f et h dans $\mathcal{P}_2$. Or on peut prouver (voir lemme 13.16 du livre [HAL13, p.273]) que pour tout $f \in \mathcal{P}_2$, il existe $g_1,\dots,g_j,h_1,\dots,h_j \in \mathcal{P}_2$ tels que

$$f = \sum_{k=1}^{j}\{g_k,h_k\}$$

Ainsi, on a montré que Q et Q_{Weyl} coïncident sur $\mathcal{P}_2$ et donc sur $\mathcal{P}_{\leqslant 2}$.

Montrons maintenant que Q et Q_{Weyl} coïncident sur $\mathcal{P}_3$. On peut procéder de la même manière. Soit $f \in \mathcal{P}_{\leqslant 3}$, on note

$$Q(f) = Q_{Weyl}(f) + B_f$$

Pour $g \in \mathcal{P}_{\leqslant 1}$, on a par la propriété 13.13 et le point (iii),

$$\begin{aligned} Q(\{f,g\}) &= \frac{1}{i\hbar}[Q(f),Q(g)] \\ &= \frac{1}{i\hbar}[Q_{Weyl}(f),Q_{Weyl}(g)] + \frac{1}{i\hbar}[B_f,Q_{Weyl}(g)] \\ &= Q_{Weyl}(\{f,g\}) + \frac{1}{i\hbar}[B_f,Q_{Weyl}(g)] \\ &= Q(\{f,g\}) + \frac{1}{i\hbar}[B_f,Q_{Weyl}(g)] \end{aligned}$$

puisque $\{f,g\} \in \mathcal{P}_{\leqslant 2}$ et qu'on vient de montrer que Q et Q_{Weyl} coïncident sur $\mathcal{P}_{\leqslant 2}$.

Ainsi, B_f commute avec $Q_{Weyl}(g)$, donc on peut en déduire que $B_f = d_f \mathrm{Id}$ pour d_f une constante. De ce fait, pour tout $h \in \mathcal{P}_2$, on a

$$\begin{aligned}
Q(\{f,h\}) &= \frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(h)] \\
&= \frac{1}{i\hbar}[Q_{Weyl}(f) + d_f \mathrm{Id}, Q_{Weyl}(h)] \\
&= \frac{1}{i\hbar}[Q_{Weyl}(f), Q_{Weyl}(h)] \\
&= Q_{Weyl}(\{f,h\})
\end{aligned}$$

On en déduit que Q et Q_{Weyl} coïncident sur les éléments de $\mathcal{P}_3$ qui s'écrivent $\{f,h\}$ avec $f \in \mathcal{P}_3$ et $h \in \mathcal{P}_2$. Or on peut prouver (voir lemme 13.16 du livre [HAL13, p.273]) que pour tout $f \in \mathcal{P}_3$, il existe $g_1, \ldots, g_j \in \mathcal{P}_3$ et $h_1, \ldots, h_j \in \mathcal{P}_2$ tels que

$$f = \sum_{k=1}^{j} \{g_k, h_k\}$$

Ainsi, on a montré que Q et Q_{Weyl} coïncident sur $\mathcal{P}_3$ et donc sur $\mathcal{P}_{\leqslant 3}$.

Étape 2 : *En posant $f = x_1^2 \xi_1^2$, montrons la contradiction.*

On peut écrire $x_1^2\xi_1^2$ sous la forme $\frac{1}{9}\{x_1^3, \xi_1^3\}$ et sous la forme $\frac{1}{3}\{x_1^2\xi_1, x_1\xi_1^2\}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\{x_1^3, \xi_1^3\} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_1^3}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_1^3}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \xi_1^3}{\partial x_j}\frac{\partial x_1^3}{\partial \xi_j} \\
&= \frac{\partial x_1^3}{\partial x_1}\frac{\partial \xi_1^3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \xi_1^3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^3}{\partial \xi_1} \\
&= 3x_1^2.3\xi_1^2 - 0 = 9x_1^2\xi_1^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\{x_1^2\xi_1, x_1\xi_1^2\} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_1^2\xi_1}{\partial x_j}\frac{\partial x_1\xi_1^2}{\partial \xi_j} - \frac{\partial x_1\xi_1^2}{\partial x_j}\frac{\partial x_1^2\xi_1}{\partial \xi_j} \\
&= \frac{\partial x_1^2\xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1\xi_1^2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1\xi_1^2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^2\xi_1}{\partial \xi_1} \\
&= 2x_1\xi_1.2x_1\xi_1 - \xi_1^2x_1^2 \\
&= 4x_1^2\xi_1^2 - x_1^2\xi_1^2 = 3x_1^2\xi_1^2
\end{aligned}$$

Par l'étape 1, on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}[Q_{Weyl}(x_1^3), Q_{Weyl}(\xi_1^3)] &= \frac{1}{9}[Q(x_1^3), Q(\xi_1^3)] \\
&= \frac{i\hbar}{9}Q(\{x_1^3, \xi_1^3\}) \\
&= i\hbar Q(x_1^2\xi_1^2) \\
&= \frac{i\hbar}{3}Q(\{x_1^2\xi_1, x_1\xi_1^2\}) \\
&= \frac{1}{3}[Q(x_1^2\xi_1), Q(x_1\xi_1^2)] \\
&= \frac{1}{3}[Q_{Weyl}(x_1^2\xi_1), Q_{Weyl}(x_1\xi_1^2)]
\end{aligned}$$

Or $Q_{Weyl}(x_1^3) = \hat{X}_1^3$ et $Q_{Weyl}(\xi_1^3) = \hat{P}_1^3$, d'où, pour la fonction $\mathbb{1}$ constante égale à 1, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}[Q_{Weyl}(x_1^3), Q_{Weyl}(\xi_1^3)]\mathbb{1} &= \frac{1}{9}(\hat{X}_1^3\hat{P}_1^3 - \hat{P}_1^3\hat{X}_1^3)\mathbb{1} \\
&= \frac{1}{9}\left((x_1^3 i\hbar^3\partial_1^3\mathbb{1}) + (i\hbar)^3\partial_1^3(x_1^3\mathbb{1})\right) \\
&= -\frac{1}{9}i\hbar^3 3\times 2 \\
&= -\frac{2i\hbar^3}{3}
\end{aligned}$$

De plus, $Q_{Weyl}(x_1^2\xi_1) = \frac{1}{\binom{3}{1}}(\hat{X}_1^2\hat{P}_1 + \hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_1 + \hat{P}_1\hat{X}_1^2)$ et $Q_{Weyl}(x_1\xi_1^2) = \frac{1}{3}(\hat{X}_1\hat{P}_1^2 + \hat{P}_1\hat{X}_1\hat{P}_1 + \hat{P}_1^2\hat{X}_1)$.

D'où pour la fonction $\mathbb{1}$ constante égale à 1, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}[Q_{Weyl}(x_1^2\xi_1), Q_{Weyl}(x_1\xi_1^2)]\mathbb{1} &= \frac{1}{27}[\hat{X}_1^2\hat{P}_1 + \hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_1 + \hat{P}_1\hat{X}_1^2, \hat{X}_1\hat{P}_1^2 + \hat{P}_1\hat{X}_1\hat{P}_1 + \hat{P}_1^2\hat{X}_1]\ \mathbb{1} \\
&= -\frac{1}{27}(\hat{X}_1\hat{P}_1^2\hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_1 + \hat{X}_1\hat{P}_1^2\hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_1 + \hat{P}_1\hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_1 \\
&\quad + \hat{P}_1\hat{X}_1\hat{P}_1^2\hat{X}_1^2 + \hat{P}_1^2\hat{X}_1^2\hat{P}_1\hat{X}_1 + \hat{P}_1^2\hat{X}_1\hat{P}_1\hat{X}_1^2)\mathbb{1}\text{ [2]} \\
&= -\frac{1}{27}(0 + 0 + (-i\hbar)^3 + 2(-i\hbar)^3 + 2(-i\hbar)^3 + 4(-i\hbar)^3) \\
&= -\frac{i\hbar^3}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient deux résultats différents $\left(\frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}\right)$, ce qui est contradictoire. On en conclut qu'il n'existe pas de quantification exacte pour les polynômes de degré inférieur à 4 et donc il n'existe pas de quantification exacte dans le cas général.

Question 6. Supposons que $U(\cdot)$ et $V(\cdot)$ sont deux représentations unitaires fortement continues de $(\mathbb{R}^n, +)$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ qui sont mutuellement irréductibles et que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$,

$$V(b)U(a) = \mathrm{e}^{i\hbar a\cdot b}U(a)V(b).$$

Montrer qu'il existe un opérateur unitaire $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ tel que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$$TV(b)T^{-1} = e^{ib\cdot\hat{P}} \quad \text{et} \quad TU(a)T^{-1} = e^{ia\cdot\hat{X}}$$

Solution 6. Je suis désolé, je n'ai pas pris le temps de reformuler la preuve du théorème de Stone Von Neumann qui se trouve dans le livre [HAL13, p.279-292]. J'ai préféré avancer sur le problème 2...

Question 7. En déduire que $U(\cdot)$ et $V(\cdot)$ donnent une représentation unitaire irréductible et fortement continue du groupe d'Heisenberg.

2. j'ai déjà enlevé tous les termes avec des dérivations à droite, puisque $\partial_1\mathbb{1} = 0$, ainsi que les termes avec $\hat{P}_1^2\hat{X}_1$ à droite

Solution 7. On utilise le théorème de Stone Von Neumann, on obtient alors un opérateur unitaire $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$. On peut poser alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{H}_n & \to & \mathcal{U}(L^2) \\ (a,b,c) & \mapsto & T \circ W(a,b,c) \circ T^{-1} \end{array}$$

où pour tout $f \in L^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(W(a,b,c)f)(x) = e^{i\hbar c} e^{ia\cdot x} f(x + ib\hbar)$$

On fait la même preuve que dans le cours pour montrer que c'est une représentation unitaire irréductible et fortement continue.

Problème 2 (Transformation de Segal-Bargmann)**.**

On considère l'espace de Segal-Bargmann

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n) = \{F \text{ holomorphe et telle que } \int_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 \mu(z) dz < \infty\}$$

avec le poids

$$\mu(z) = (\pi\hbar)^{-n} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}}$$

Remarque :

La norme sur $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$ est la norme L^2 sur $\mathbb{C}^n$ avec le poids $\mu(z)$, *i.e.*

$$\|F\|_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)} \overset{def}{=} \sqrt{\int_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 \mu(z) dz}.$$

Question 1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$,

$$|F(z)| \leqslant C \|F\|_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)}$$

Solution 1. On va traiter le cas $n = 1$, cela se passe de la même façon pour $n > 1$.

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C})$. Soit $r > 0$. On note $C(z, r)$ pour l'ensemble $\{w \in \mathbb{C}, |z - w| = r\}$. On utilise la formule de Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{F(w)}{w - z} dw$$

On pose $w = z + re^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. On obtient donc

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Soit $R > 0$. On multiplie les deux membres de l'égalité par r puis on intègre entre 0 et R.

$$\begin{aligned} \int_0^R rF(z)dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R F(z + re^{i\theta}) r dr d\theta \\ \frac{R^2}{2} F(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{B(z,R)} F(w) dw \\ F(z) &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(z,R)} F(w) dw \end{aligned}$$

où on a noté $B(z, R)$ pour l'ensemble $\{w \in \mathbb{C}, |z - w| \leqslant R\}$.

On va alors utiliser l'inégalité de Cauchy Schwarz pour la mesure $\mu(w)dw$ sur

$$|F(z)|^2 = \frac{1}{\pi^2 R^4} \left| \int_{B(z,R)} \frac{1}{\mu(w)} F(w) \mu(w) dw \right|^2$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
|F(z)|^2 &\leqslant \frac{1}{\pi^2 R^4} \int_{B(z,R)} \left(\frac{1}{\mu(w)}\right)^2 \mu(w)dw \int_{B(z,R)} |F(w)|^2 \mu(w)dw \\
&\leqslant \frac{1}{\pi^2 R^4} \left(\int_{B(z,R)} \frac{1}{\mu(w)} dw\right) \|F\|^2_{L^2(\mathbb{C},\mu)}
\end{aligned}$$

On pose donc la constante C_z indépendante de F de la manière suivante

$$C_z \overset{def}{=} \frac{1}{\pi R^2} \sqrt{\int_{B(z,R)} \frac{1}{\mu(w)} dw}.$$

Ce qui conclut la preuve puisque l'on obtient

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists C_z > 0, \forall F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n), \quad |F(z)| \leqslant C_z \|F\|_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)}$$

Question 2. En déduire que $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$ est fermé dans $L^2(\mathbb{C}^n, \mu(z)dz)$.

Solution 2. Soit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$ telle que (F_n) converge dans L^2 vers une fonction F. Comme L^2 est fermé pour sa norme et que la norme $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$ est la norme L^2, on obtient que F est dans L^2. Pour que F soit dans $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$, il faut justifier que F est holomorphe.

Or, on sait que si (F_n) converge uniformément sur tout compact, alors, par le théorème de Weierstrass, la limite F sera holomorphe.

Montrons que (F_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Soit K un compact de $\mathbb{C}$.

$$\sup_{z\in K} |F_n(z) - F(z)| \leqslant \sup_{z\in K} C_z \|F_n - F\|_{L^2}$$

par la question précédente. Comme $\|F_n - F\|_{L^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il suffit de montrer que $\sup\limits_{z\in K} C_z$ est borné. Comme K est compact, on va montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} K & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & C_z \end{array}$$

est continue.

Pour z, z', on a

$$\begin{aligned}
|C_z - C_{z'}| &= \left| \int_{B(z,R)} \frac{1}{\mu(w)} dw - \int_{B(z',R)} \frac{1}{\mu(w)} dw \right| \\
&= \left| \int_{B(z,R)\Delta B(z',R)} (\pi\hbar)^n e^{|R|^2} dw \right|
\end{aligned}$$

où $A\Delta B$ désigne la différence symétrique des ensembles A et B, *i.e.* $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

Or quand z tend vers z', la mesure de $B(z,R)\Delta B(z',R)$ tend vers 0. Donc l'application $z \mapsto C_z$ est continue sur le compact K, ainsi $\sup\limits_{z\in K} C_z$ est borné.

Ainsi (F_n) converge uniformément sur tout compact, donc F est holomorphe car c'est une limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes.

Comme F est holomorphe et dans L^2, alors $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$. On en conclut que $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$ est fermé.

Question 3. La transformée de Segal-Bargmann est

$$\mathcal{A}_\hbar : \begin{array}{rcl} L^2(\mathbb{R}^n, dx) & \to & \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n) \\ f & \mapsto & (\pi\hbar)^{-n/4} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} f(x)dx \end{array}$$

a) Montrer que $\mathcal{A}_\hbar$ est bien définie.

b) Montrer que $\mathcal{A}_\hbar$ est une isométrie.

c) En conclure que $\mathcal{A}_\hbar$ est une transformation unitaire.

Solution 3. a) **Étape 1 :** *Montrons que $\mathcal{A}_\hbar(f)$ existe.*

On sait par hypothèse que f est dans L^2. La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}$ est aussi dans L^2. Donc par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, l'intégrale existe, donc $\mathcal{A}_\hbar(f)$ existe.

Étape 2 : *Montrons que $\mathcal{A}_\hbar(f)$ est holomorphe.*

On va utiliser le théorème d'holomorphie sous l'intégrale.

— $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $x \mapsto e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} f(x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^n$.

— $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $z \mapsto e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} f(x)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^n$.

— $\forall z \in B(0, R)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\left| e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} f(x) \right| \leqslant \left| e^{\frac{1}{2\hbar}(-|R-\sqrt{2}x|^2-3x^2)} f(x) \right| \in L^1_x(\mathbb{R}^n) \text{ [3]}$$

Ainsi $\mathcal{A}_\hbar(f)$ est holomorphe sur tout compact de $\mathbb{C}^n$ donc sur $\mathbb{C}^n$.

Étape 3 : *Montrons que $\mathcal{A}_\hbar(f)$ est L^2.* On va montrer que la norme $L^2(\mathbb{C}^n, \mu)$ est finie. On utilise l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} |\mathcal{A}_\hbar(f)(z)|^2 \mu(z)dz &\leqslant (\pi\hbar)^{-n/2} \int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} dx \right) \mu(z)dz \\ &\leqslant (\pi\hbar)^{-n/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} dx \right) \mu(z)dz \end{aligned}$$

b) Il faut montrer que $\|\mathcal{A}_\hbar(f)\|_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\hbar(f)\|_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)} &= \int_{\mathbb{C}^n} |\mathcal{A}_\hbar(f)(z)|^2 dz \\ &= (\pi\hbar)^{-n/2} \int_{\mathbb{C}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} f(x)dx \right|^2 dz \\ &\dots \end{aligned}$$

Je voulais montrer le caractère isométrique « à la main », mais je ne trouve pas les bonnes transformations à faire...

3. par les mêmes techniques qu'à l'étape 1

Dans le livre [HAL13, p.300], on montre le caractère isométrique de $\mathcal{A}_\hbar$ par le théorème de Stone Von Neumann et en définissant $\mathcal{A}_\hbar$ comme l'inverse de la transformation unitaire

$$U : \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n, dx)$$

qui est la conclusion du théorème de Stone Von Neumann [HAL13, p.286].

c) Il faut montrer que $\langle \mathcal{A}_\hbar(f), \mathcal{A}_\hbar(g)\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Or on sait par la question précédente que c'est une isométrie, donc, d'une part, on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\hbar(f) + \mathcal{A}_\hbar(g)\|_{\mathcal{H}L^2} &= \|\mathcal{A}_\hbar(f+g)\|_{\mathcal{H}L^2} = \|f+g\|_{L^2} \text{ par linéarité de } \mathcal{A}_\hbar\\ \|\mathcal{A}_\hbar(f)\| + 2\Re(\langle \mathcal{A}_\hbar(f), \mathcal{A}_\hbar(g)\rangle) + \|\mathcal{A}_\hbar(g)\|^2 &= \|f\|^2 + 2\Re(\langle f, g\rangle) + \|g\|^2\\ \|f\|^2 + 2\Re(\langle \mathcal{A}_\hbar(f), \mathcal{A}_\hbar(g)\rangle) + \|g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\Re(\langle f, g\rangle) + \|g\|^2\\ \Re(\langle \mathcal{A}_\hbar(f), \mathcal{A}_\hbar(g)\rangle) &= \Re(\langle f, g\rangle)\end{aligned}$$

On a donc égalité des parties réelles. D'autre part,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\hbar(f) + i\mathcal{A}_\hbar(g)\|_{\mathcal{H}L^2} &= \|\mathcal{A}_\hbar(f+ig)\|_{\mathcal{H}L^2} = \|f+ig\|_{L^2}\\ \|\mathcal{A}_\hbar(f)\| - 2\Im(\langle \mathcal{A}_\hbar(f), \mathcal{A}_\hbar(g)\rangle) + \|\mathcal{A}_\hbar(g)\|^2 &= \|f\|^2 - 2\Im(\langle f, g\rangle) + \|g\|^2\\ \|f\|^2 - 2\Im(\langle \mathcal{A}_\hbar(f), \mathcal{A}_\hbar(g)\rangle) + \|g\|^2 &= \|f\|^2 - 2\Im(\langle f, g\rangle) + \|g\|^2\\ \Im(\langle \mathcal{A}_\hbar(f), \mathcal{A}_\hbar(g)\rangle) &= \Im(\langle f, g\rangle)\end{aligned}$$

On a donc égalité des parties imaginaires.
Ainsi en combinant ces deux résultats, on a l'égalité

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \langle \mathcal{A}_\hbar(f), \mathcal{A}_\hbar(g)\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Ce qui montre que $\mathcal{A}_\hbar$ est une transformation unitaire.

Question 4. Montrer les relations suivantes pour tout $j = 1, \dots, n$,

$$\mathcal{A}_\hbar \frac{\hat{X}_j + i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_\hbar^{-1} = \hbar\partial_{z_j} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_\hbar \frac{\hat{X}_j - i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_\hbar^{-1} = z_j$$

Solution 4. **Étape 1 :** *Montrons que* $\mathcal{A}_\hbar \frac{\hat{X}_j + i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_\hbar^{-1} = \hbar\partial_{z_j}$.

On veut montrer que pour tout $j = 1, \dots, n$, pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\left(\mathcal{A}_\hbar(\hat{X}_j + i\hat{P}_j)\varphi\right)(z) = \sqrt{2}\hbar\partial z_j(\mathcal{A}_\hbar\varphi)(z).$$

Pour le second membre, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\hbar\partial_{z_j}(\mathcal{A}_\hbar\varphi)(z) &= (\pi\hbar)^{-n/4}\sqrt{2}\hbar\partial_{z_j}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}\varphi(x)dx\right)\\ &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{z_j}\left(e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}\right)\sqrt{2}\hbar\varphi(x)dx\\ &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}\left(\frac{1}{2\hbar}(-2z_j + 2\sqrt{2}x_j)\right)\sqrt{2}\hbar\varphi(x)dx\\ &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}(-\sqrt{2}z_j + 2x_j)\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Pour le premier membre, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{A}_\hbar(\hat{X}_j + i\hat{P}_j)\varphi\right)(z) &= \left(\mathcal{A}_\hbar(x_j + i\frac{\hbar}{i}\partial_{x_j})\varphi\right)(z) \\ &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}(x_j\varphi(x) + \hbar\partial_{x_j}\varphi(x))dx\end{aligned}$$

On fait une intégration par parties pour le deuxième terme de la somme en utilisant les fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1$ suivantes :

$$\begin{array}{cc} \partial_{x_j}u(x) = \hbar\partial_{x_j}\varphi(x) & u(x) = \hbar\varphi(x) \\ v(x) = e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} & \partial_{x_j}v(x) = \left(\frac{-x_j+\sqrt{2}z_j}{\hbar}\right)e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{A}_\hbar(\hat{X}_j + i\hat{P}_j)\varphi\right)(z) &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}(x_j + \hbar\frac{x_j}{\hbar} - \hbar\frac{\sqrt{2}z_j}{\hbar})\varphi(x)dx \\ &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}(2x_j - \sqrt{2}z_j)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

Donc on a bien l'égalité des deux membres.

<u>Étape 2</u> : *Montrons que* $\mathcal{A}_\hbar\dfrac{\hat{X}_j - i\hat{P}_j}{\sqrt{2}}\mathcal{A}_\hbar^{-1} = z_j$.

On veut montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n$, pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\left(\mathcal{A}_\hbar(\hat{X}_j - i\hat{P}_j)\varphi\right)(z) = \sqrt{2}z_j(\mathcal{A}_\hbar\varphi)(z).$$

Pour le second membre, on a

$$\sqrt{2}z_j(\mathcal{A}_\hbar\varphi)(z) = (\pi\hbar)^{-n/4}\sqrt{2}z_j\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}\sqrt{2}z_j\varphi(x)dx$$

Pour le premier membre, on a

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{A}_\hbar(\hat{X}_j - i\hat{P}_j)\varphi\right)(z) &= \left(\mathcal{A}_\hbar(x_j - i\frac{\hbar}{i}\partial_{x_j})\varphi\right)(z) \\ &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}(x_j\varphi(x) - \hbar\partial_{x_j}\varphi(x))dx\end{aligned}$$

On fait une intégration par parties pour le deuxième terme de la somme en utilisant les fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1$ suivantes :

$$\begin{array}{cc} \partial_{x_j}u(x) = -\hbar\partial_{x_j}\varphi(x) & u(x) = -\hbar\varphi(x) \\ v(x) = e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} & \partial_{x_j}v(x) = \left(\frac{-x_j+\sqrt{2}z_j}{\hbar}\right)e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{A}_\hbar(\hat{X}_j - i\hat{P}_j)\varphi\right)(z) &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}(x_j - \hbar\frac{x_j}{\hbar} + \hbar\frac{\sqrt{2}z_j}{\hbar})\varphi(x)dx \\ &= (\pi\hbar)^{-n/4}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\hbar}(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z-x^2)}\sqrt{2}z_j\varphi(x)dx\end{aligned}$$

Donc on a bien l'égalité des deux membres.

Question 5. Montrer que l'adjoint formel de l'opérateur multiplication z_j de $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$ est donné par

$$(z_j)^* = \hbar\partial_{z_j},$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$. Discuter des problèmes liés au domaine de ces opérateurs.

Solution 5. **Étape 1 :** *Montrons que l'on a formellement* $(\hat{X}_j)^* = \hat{X}_j$.

Pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \hat{X}_j f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{x_j f(x)} g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} x_j \overline{f(x)} g(x) dx \\
&= \langle f, \hat{X}_j g\rangle
\end{aligned}$$

Étape 2 : *Montrons que l'on a formellement* $(\hat{P}_j)^* = \hat{P}_j$.

Pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \hat{P}_j f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{-i\hbar\partial_{x_j} f(x)} g(x) dx \\
&= i\hbar \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\partial_{x_j} f(x)} g(x) dx \\
&= -i\hbar \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \partial_{x_j} g(x) dx \text{ par IPP} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \hat{P}_j g(x) dx \\
&= \langle f, \hat{P}_j g\rangle
\end{aligned}$$

Puis par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on a le résultat souhaité.

Étape 3 : *Montrons que l'on a formellement* $\left(\frac{\hat{X}_j - i\hat{P}_j}{\sqrt{2}}\right)^* = \frac{\hat{X}_j + i\hat{P}_j}{\sqrt{2}}$.

Pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\hat{X}_j - i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} f, g\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle \hat{X}_j f, g\rangle + i\langle \hat{P}_j f, g\rangle\Big) \text{ par antilinéarité à gauche du produit de scalaire} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle f, \hat{X}_j g\rangle + i\langle f, \hat{P}_j g\rangle\Big) \\
&= \left\langle f, \frac{\hat{X}_j + i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} g\right\rangle
\end{aligned}$$

Étape 4 : *Montrons que l'on a formellement* $(z_j)^* = \hbar\partial_{z_j}$.

On va utiliser l'étape 3 et le caractère unitaire de $\mathcal{A}_\hbar$. Pour tout $F, G \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle z_j F, G\rangle &= \left\langle \mathcal{A}_\hbar \frac{\hat{X}_j - i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_\hbar^{-1} F, G \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{A}_\hbar \frac{\hat{X}_j - i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_\hbar^{-1} F, \mathcal{A}_\hbar \mathcal{A}_\hbar^{-1} G \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\hat{X}_j - i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_\hbar^{-1} F, \mathcal{A}_\hbar^{-1} G \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{A}_\hbar^{-1} F, \frac{\hat{X}_j + i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_\hbar^{-1} G \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{A}_\hbar \mathcal{A}_\hbar^{-1} F, \mathcal{A}_\hbar \frac{\hat{X}_j + i\hat{P}_j}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_\hbar^{-1} G \right\rangle \\
&= \left\langle F, \hbar \partial_{z_j} G \right\rangle
\end{aligned}$$

Question 6. Vérifier que pour tout $j, k = 1, \ldots, n$,

$$[\partial_{z_k}, z_j] = \delta_{k,j} I_d.$$

Solution 6. Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$, pour tout $j, k = 1, \ldots, n$ avec $j \neq k$,

$$\begin{aligned}
[\partial_{z_k}, z_j]\varphi &= \partial_{z_k}(z_j\varphi) - z_j(\partial_{z_k}\varphi) \\
&= z_j(\partial_{z_k}\varphi) - z_j(\partial_{z_k}\varphi) = 0
\end{aligned}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$, pour tout $j, k = 1, \ldots, n$ avec $j = k$,

$$\begin{aligned}
[\partial_{z_j}, z_j]\varphi &= \partial_{z_j}(z_j\varphi) - z_j(\partial_{z_j}\varphi) \\
&= \varphi + z_j(\partial_{z_j}\varphi) - z_j(\partial_{z_j}\varphi) = \varphi
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[\partial_{z_k}, z_j] = \delta_{k,j} I_d.$$

Question 7. A-t-on une représentation canonique des relations de commutativité de Weyl sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n)$?

Solution 7. Je n'ai pas compris ce que voulait dire une représentation **canonique** des relations de commutativité de Weyl. Pour moi les relations de commutativité sont justement $[\partial_{z_k}, z_j] = \delta_{k,j} I_d$.

Références

[HAL13] Brian HALL. *Quantum Theory for Mathematicians.* Springer, 2013.