

# Classification des surfaces compactes à homéomorphisme près.

Pierre Le Barbenchon                      Maxence Brévard  
Encadrés par Mark Baker.

L'objectif de cette lecture dirigée est la classification des surfaces "raisonnables" à déformation continue près. Nous introduisons dans la section I les concepts nécessaires à la compréhension du théorème de classification. La preuve de ce dernier fait l'objet de la section II. Enfin, nous présenterons à l'oral une méthode d'utilisation des diagrammes planaires et de la caractéristique d'Euler pour déterminer quelles surfaces peuvent être représentées par un polygone donné.

## 1 Définitions, notations

Pour la clarté de la lecture et le respect de la longueur, tous les résultats de cette section seront admis.

### 1.1 Le monoïde commutatif des surfaces topologiques

**Définition 1.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une  $n$ -variété est un espace topologique séparé, localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  (tout point admet un voisinage homéomorphe à la boule unité ouverte).

**Remarque 1.1.** On ne traite pas le cas des variétés avec bord (comme la demi-sphère) pour lesquelles on exigerait en tout point un voisinage homéomorphe à la demi-boule unité ouverte ou à la boule unité ouverte.

**Définition 1.2.** Une *surface* est une 2-variété connexe.

**Remarque 1.2.** Toute 2-variété est réunion dénombrable de surfaces.

**Définition 1.3.** Un espace topologique est dit *compact* s'il est séparé et s'il possède la propriété de Borel-Lebesgue.

**Remarque 1.3.** On ne s'intéresse pas à des surfaces trop "grandes" comme le plan  $\mathbb{R}^2$  par exemple.

Nous souhaitons travailler à homéomorphisme près. A cet effet, introduisons la relation d'équivalence suivante. Deux surfaces  $s_1$  et  $s_2$  sont équivalentes ( $s_1 \sim s_2$ ) si et seulement si il existe un homéomorphisme  $\varphi : s_1 \rightarrow s_2$ . Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des surfaces, quotienté par cette relation d'équivalence.  $\mathcal{S}$  est appelé l'ensemble des *surfaces topologiques*.

Nous allons définir rigoureusement l'opération de somme connexe entre deux surfaces topologiques. L'idée est de découper un disque dans chaque surface et d'en recoller les bords.

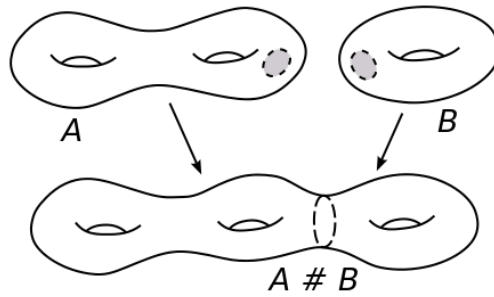


Figure 1: Somme Connexe.

**Lemme 1.1.** Soient  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$  deux surfaces topologiques. Alors il existe  $s_1 \in S_1$  et  $s_2 \in S_2$  telles que  $s_1 \cap s_2 = \emptyset$ .

Preuve : par translation.

**Définition 1.4.** *Somme connexe.*

Considérons  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$  deux surfaces topologiques. D'après le lemme précédent, il existe  $s_1 \in S_1$  et  $s_2 \in S_2$  deux surfaces disjointes. On choisit un sous-ensemble  $d_1 \subset s_1$  (respectivement  $d_2 \subset s_2$ ) homéomorphe au disque unité ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons  $\varphi : \partial d_1 \rightarrow \partial d_2$  un homéomorphisme entre les bords des disques  $d_1$  et  $d_2$ . Notons  $s'_1 = s_1 - d_1$  (resp.  $s'_2 = s_2 - d_2$ ).

La somme connexe entre  $s_1$  et  $s_2$  est alors définie comme la réunion de  $s'_1$  avec  $s'_2$ , où sont identifiés les bords  $\partial d_1$  et  $\partial d_2$  :  $s_1 \# s_2 = s'_1 \cup s'_2 / \varphi$ . D'autre part, la classe de  $s_1 \# s_2$  dans  $\mathcal{S}$  ne dépend ni des choix des disques  $d_1, d_2$ , ni de l'homéomorphisme  $\varphi$ , ni même des surfaces  $s_1 \in S_1$  et  $s_2 \in S_2$  (admis). Ainsi, on peut définir la somme connexe des surfaces topologiques  $S_1$  et  $S_2$  comme la classe de  $s_1 \# s_2$  dans  $\mathcal{S}$ .

Désormais, nous autorisons la confusion entre une surface et sa classe d'équivalence dans  $\mathcal{S}$ .

**Remarque 1.4.**  $\mathbb{S}$  est l'élément neutre pour la loi de composition interne  $\#$  associative et commutative dans  $\mathcal{S}$ . L'associativité nous permet de définir, par récurrence, la somme connexe de  $n$  surfaces  $(S_i)_{i=1}^n$ , que l'on notera  $\sum_{i=1}^n S_i$ .

## 1.2 Représentation planaire

Considérons un polygone à  $2n$  côtés (un  $2n$ -gone). Nous allons identifier ses côtés deux à deux pour construire une surface. La surface obtenue va naturellement dépendre du choix des couples, mais aussi de la façon d'identifier deux côtés d'un même couple.

Pour espérer obtenir une surface topologique, l'identification doit se faire via un homéomorphisme. Ainsi, identifier deux segments revient à choisir une orientation à l'identification.

Représentons cette surface par le polygone dans  $\mathbb{R}^2$  dont les côtés sont marqués par paire et fléchés selon leur orientation. Ce schéma, appelé *diagramme planaire*, définit de manière unique une surface topologique (admis).

Si une surface est homéomorphe à une surface obtenue de cette façon, on dit qu'elle admet une représentation planaire. Cette représentation permet d'introduire deux surfaces essentielles au théorème de classification : le tore et le plan projectif.

**Exemple 1.1.** *Le tore.*

Dans cet exemple,  $n = 2$ . Le polygone admet 4 côtés : il s'agit d'un carré. Choisissons par exemple le carré  $\{t + iu, (t, u) \in [0, 1]^2\} \subset \mathbb{C}$ . Identifions les deux segments  $[0, 1]$  et  $[i, i+1]$  via l'homéomorphisme  $\varphi_1 : z \mapsto z + i$ . Nous obtenons un cylindre.

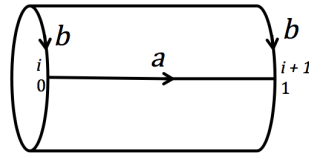


Figure 2: Identification de l'arête  $a$ .

Identifions alors les deux segments  $[0, i]$  et  $[1, 1+i]$  via l'homéomorphisme  $\varphi_2 : z \mapsto z + 1$ . L'ordre dans lequel on effectue les identifications n'importe pas. Nous pouvons représenter simplement cette opération par le diagramme suivant.

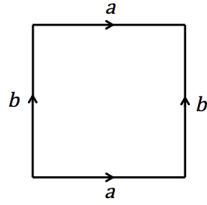


Figure 3: Représentation planaire du Tore.

Notons  $\mathbb{T} \in \mathcal{S}$  et appelons *Tore* la classe topologique de cette surface.

**Exemple 1.2.** *Le plan projectif.*

On identifie toujours les côtés opposés du carré  $\{t + iu, (t, u) \in [0, 1]^2\}$ . On utilise cette fois les homéomorphismes  $\psi_1 : z \in [0, 1] \mapsto 1 + i - z$  et  $\psi_2 : z \in [0, i] \mapsto 1 + i - z$ .

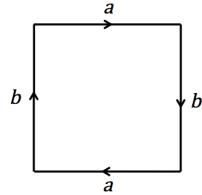


Figure 4: Représentation planaire du Plan Projectif.

Notons  $\mathbb{P} \in \mathcal{S}$  et appelons *Plan Projectif* la classe topologique de cette surface.

**Remarque 1.5.** Le plan projectif réel peut aussi être défini comme le quotient de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  par la relation qui identifie tout vecteur  $x$  au vecteur  $-x$ .

On peut décrire de manière encore plus concise une surface obtenue par identification deux à deux des côtés d'un  $2n$ -gone. Pour cela, on choisit arbitrairement un sommet puis on parcourt les côtés du polygone dans le sens trigonométrique. Si le sens de parcours correspond à l'orientation de l'identification (on se déplace dans le même sens que la flèche), on écrit la lettre  $m$  correspondant à la marque. Sinon, on concatène  $m^{-1}$  au mot obtenu. Par exemple, on dira que  $aba^{-1}b^{-1}$  est un *mot codant* pour le tore et  $abab$  est un mot codant pour le plan projectif. Notons qu'échanger le rôle de  $m$  et  $m^{-1}$  dans un mot codant est licite.

Remarquons que même s'il existe plusieurs mots codants susceptibles de représenter la même surface, il existe des invariants dans la notation. Par exemple, pour une marque  $m$  d'un polygone donné, le caractère  $m$  apparaît exactement deux fois (éventuellement avec un exposant  $-1$ ). Par ailleurs, si  $u$  et  $v$  sont deux mots codant pour la même représentation planaire d'une surface,

alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i)  $m$  apparaît deux fois dans  $u$ .
- ii) soit  $m$ , soit  $m^{-1}$ , apparaît deux fois dans  $v$ .

Nous autorisons également l'abus de notation consistant à associer un couple de côtés identifiés et sa marque.

Ces remarques valident la définition suivante :

**Définition 1.5.** *couple d'arêtes de 1<sup>ère</sup>/2<sup>nde</sup> espèce.*

Soit  $s$  une surface admettant une représentation planaire et  $m$  un couple de côtés identifiés. Soit  $u$  un mot codant pour  $s$ . Si  $m$  et  $m^{-1}$  apparaissent dans  $u$ , on dit que  $m$  est un *couple d'arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce*. Tout autre couple de côtés identifiés est appelé *couple d'arêtes de 2<sup>nde</sup> espèce*.

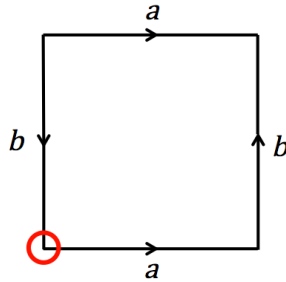


Figure 5: carré  $aba^{-1}b$

Dans l'exemple de la figure 5, le couple d'arêtes  $a$  est de 1<sup>ère</sup> espèce et le couple d'arêtes  $b$  est de 2<sup>nde</sup> espèce. Il s'agit de la représentation planaire de la *Bouteille de Klein*.

**Définition 1.6.** *Paire de couples d'arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce entrelacées.*

Considérons  $a$  et  $b$  deux couples d'arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce dans un diagramme planaire d'une surface  $s$ . On dit que  $(a, b)$  est une *paire de couples d'arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce entrelacées* s'il existe un mot codant pour  $s$  qui contient la séquence  $aba^{-1}b^{-1}$ .



Figure 6:  $aba^{-1}b^{-1}$

Nous avons à présent établi tous les concepts pour énoncer et démontrer le théorème de classification des surfaces compactes.

## 2 Preuve du théorème de classification

**Théorème 2.1.** Toute surface compacte est homéomorphe soit à la sphère  $\mathbb{S}$ , soit à une somme connexe de tores  $\sum_{i=1}^n \mathbb{T}_i$ , soit à une somme connexe de plans projectifs  $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}_i$ .

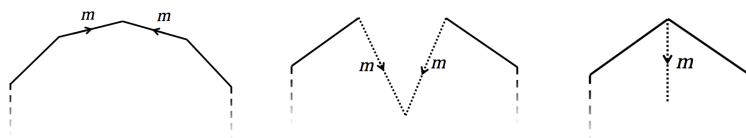
*Proof.*

**Etape 1.** *Triangulariser la surface*

Nous n'allons pas détailler cette étape, mais cela revient à admettre que n'importe quelle surface compacte admet une représentation planaire. On va donc identifier la surface compacte avec sa représentation planaire.

**Etape 2.** *Suppression des couples d'arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce adjacentes.*

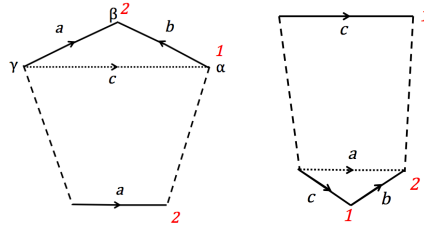
Soit  $u$  un mot codant pour la surface. Si  $n = 1$  et  $u = mm^{-1}$  ou  $u = m^{-1}m$ , alors c'est la représentation de la SPHÈRE. Sinon, s'il existe un sous-mot de la forme  $mm^{-1}$  ou  $m^{-1}m$  dans  $u$ , on peut l'enlever par l'opération illustrée ci-dessous.



Ainsi, si, dans le mot codant  $u$  de départ, il n'y a que des arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce adjacentes, on obtient, après l'étape 2, le mot codant  $aa^{-1}$  qui représente la SPHÈRE. S'il y a des arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce adjacentes et une seule paire d'arête de 2<sup>nde</sup> espèce, on obtient alors, après l'étape 2, le mot codant  $aa$  qui représente LE PLAN PROJECTIF. Si nous ne sommes pas dans ces cas particuliers, nous continuons avec les étapes suivantes.

**Etape 3.** *Identification des sommets.*

L'identification des arêtes identifie aussi les sommets. Regroupons les sommets par classes d'équivalence. Le but de cette étape est de proposer un autre diagramme planaire de la surface qui possède tous ses sommets dans la même classe d'équivalence. Tout d'abord, il faut choisir une classe d'équivalence de sommets (notons là **1**) dont on va incrémenter le cardinal tout en diminuant le cardinal des autres classes. Cette opération se fait comme illustré sur le schéma suivant, et permet d'obtenir à la fin une seule classe d'équivalence de sommets.



On choisit un sommet  $\alpha$  dans la classe **1** qui se trouve à côté d'un sommet  $\beta$  n'appartenant pas à **1** (notons sa classe **2**). On note  $\gamma$  le sommet adjacent à  $\beta$  qui n'est pas  $\alpha$ . On découpe selon le segment  $[\alpha; \gamma]$  puis on recolle selon le segment  $[\gamma; \beta]$ . On voit que sur la figure on a diminué le cardinal de la classe **2** et augmenté celui de la classe **1**

Après cette manipulation, il est possible de retrouver des arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce adjacentes. Si tel est le cas, on répète l'étape 2. Puis on effectue la même manipulation que dans l'étape 3, en augmentant toujours le cardinal de la classe d'équivalence **1**. Le processus itératif se termine puisque le cardinal de la classe d'équivalence **1** est strictement croissant.

Introduisons à présent deux lemmes pour faciliter l'étape 4.

**Lemme 2.1.** Soit un diagramme planaire vérifiant :

- i) Tous les couples d'arêtes de 2<sup>nd</sup>e espèce sont des couples d'arêtes adjacentes (mm).
- ii) Il existe un unique couple d'arêtes de 1<sup>ère</sup> espèce. De plus, il s'agit d'un couple d'arêtes non-adjacentes.

Alors les sommets sont identifiés dans exactement deux classes d'équivalence.

*Proof.*

Supposons qu'il n'y ait qu'un seul couple d'arêtes non-adjacentes de 1<sup>ère</sup> espèce.

Remarquons alors que les hypothèses reviennent à dire qu'il existe un mot codant  $u$  de la forme  $u = ca_1a_1a_2a_2\dots a_p a_p c^{-1} b_1 b_1 b_2 b_2 \dots b_q b_q$  avec  $p \neq 0$  et  $q \neq 0$ .

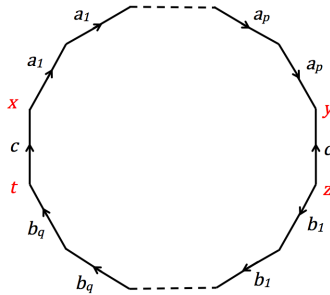


Figure 7:  $ca_1a_1a_2a_2\dots a_p a_p c^{-1} b_1 b_1 b_2 b_2 \dots b_q b_q$

Dans cette représentation planaire sur  $\mathbb{C}$ , pour  $i \in [1, p]$  (respectivement  $j \in [1, q]$ ), notons  $\varphi_i$  (respectivement  $\psi_j$ ) l'homéomorphisme permettant d'identifier les deux côtés de la paire  $a_i$  (respectivement  $b_j$ ). Notons  $\omega$  l'homéomorphisme correspondant à la paire  $c$ . Marquons également les 4 sommets  $x, y, z, t$  comme sur la figure.

D'après l'identification des extrémités des arêtes des couples  $(a_i)_{i=1}^p$ , il est clair que tous les sommets à ces extrémités (entre les sommets  $x$  et  $y$ ) sont dans la même classe d'équivalence  $a$ . De même, les sommets du "dessous" (entre les sommets  $z$  et  $t$ ; aux extrémités des arêtes des couples  $(b_j)_{j=1}^q$ ) sont dans la même classe  $b$ . On obtient donc, au plus, deux classes d'équivalence de sommets. Montrons qu'il y en a exactement deux.

Considérons pour cela  $k$  un sommet du "dessus" (entre  $x$  et  $y$ ) et montrons qu'il n'est identifié avec aucun sommet du "dessous". Deux cas peuvent alors se présenter :

*i)  $k \in \{x, y\}$ .*

Traitons le cas  $k = x$ . Comme l'injection  $\omega$  identifie les deux sommets  $x$  et  $y$ ,  $k$  ne peut être identifié via  $\omega$  à aucun sommet du "dessous".

*ii)  $k \notin \{x, y\}$ .*

Remarquons que la réunion des domaines d'identification des homéomorphismes  $(\varphi_i)_{i=1}^p$  est incluse dans  $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ . De même, celle des  $(\psi_j)_{j=1}^q$  est incluse dans  $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) < 0\}$ . Ainsi  $k$  ne peut être identifié, via un  $\varphi_i$  ou un  $\psi_j$ , à aucun des sommets du bas.

Bilan : aucun morphisme ne peut associer un quelconque sommet du haut avec un quelconque sommet du bas. Le diagramme planaire admet donc exactement deux classes d'équivalence de sommets. ■

**Lemme 2.2.** Soit un diagramme planaire vérifiant :

*i) Tous les couples d'arêtes de 2<sup>nde</sup> espèce sont des couples d'arêtes adjacentes (mm).*

*ii) Il existe un unique couple d'arêtes non-adjacentes de 1<sup>ere</sup> espèce.*

*iii) Parmi les couples d'arêtes de 1<sup>ere</sup> espèce restants, le diagramme n'admet que des paires de couples d'arêtes de 1<sup>ere</sup> espèce entrelacées.*

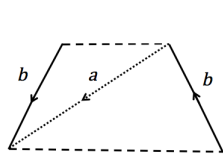
*Alors les sommets sont identifiés dans exactement deux classes d'équivalence.*

Preuve : le même raisonnement s'applique, en tenant compte qu'au sein d'une paires de couples d'arêtes de 1<sup>ere</sup> espèce entrelacées, les 4 sommets aux extrémités appartiennent à la même classe d'équivalence.

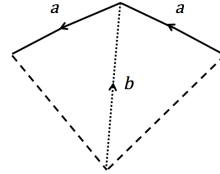
**Etape 4.** *Rendre adjacentes les arêtes d'un couple de 2<sup>nde</sup> espèce.*

Par la méthode ci-dessous, on peut rendre adjacentes tous les couples d'arêtes de 2<sup>nde</sup> espèce sans perdre les contraintes que l'on a imposées dans les étapes précédentes.





On découpe selon  $a$



On recolle selon  $b$

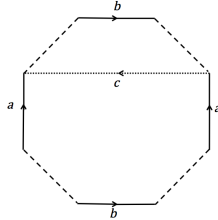
S'il n'y a pas de couple d'arête de  $1^{ere}$  espèce, on a alors un mot codant de la forme  $a_1a_1a_2a_2...a_ma_m$  qui représente une SOMME CONNEXE DE  $m$  PLANS PROJECTIFS.

Sinon il existe un couple d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce. De plus (cf étape 2), il s'agit d'un couple d'arêtes non-adjacentes. Par ailleurs, on vient de rendre adjacentes les arêtes des couples de  $2^{nde}$  espèce. Alors le lemme 2.1 nous assure qu'il y a deux classes d'équivalence de sommets, ce qui contredit le résultat de l'étape 3 où nous avons identifié tous les sommets.

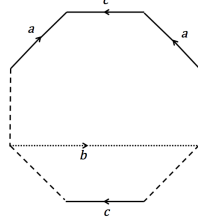
Bilan : Il existe au moins un deuxième couple d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce.

**Etape 5.** *Entrelacer deux couples d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce.*

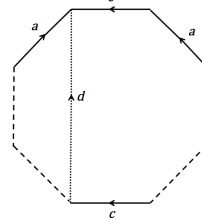
Considérons une paire de couples d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce  $(a,b)$ . Par la méthode ci-après, on peut entrelacer les deux paires  $a$  et  $b$ .



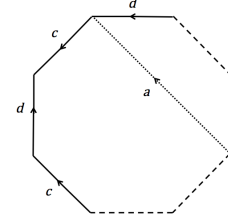
On découpe selon  $c$



On recolle selon  $b$



On découpe selon  $d$



On recolle selon  $a$

On va répéter cette étape tant qu'il existe des paires de couples d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce non-entrelacées. Remarquons que cette méthode préserve les paires de couples d'arête de  $1^{ere}$  espèce déjà entrelacées. A l'issue de ces itérations, il existe au plus un couple d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce qui n'appartienne pas à une paire de couples d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce entrelacées.

Supposons qu'il n'y en ait qu'un. Alors deux cas peuvent se présenter :

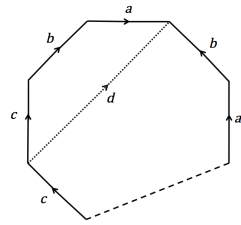
- Les deux arêtes  $a$  sont adjacentes. On peut effectuer l'étape 2 pour les supprimer.
- Les deux arêtes  $a$  ne sont pas adjacentes. Rappelons que tous les couples d'arêtes de  $2^{nde}$  espèce sont des couples d'arêtes adjacentes. Dans ce cas, en vertu du lemme 2.2, les sommets sont identifiés dans exactement deux classes d'équivalence, ce qui est absurde.

Bilan : On a entrelacé tous les couples d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce.

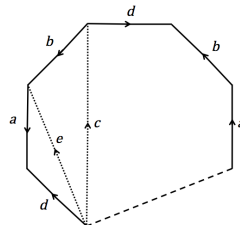
On a alors un mot codant constitué seulement de couples d'arêtes de  $2^{nde}$  espèce adjacentes et de paires de couples d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce entrelacées. S'il n'y a pas de couple d'arêtes de  $2^{nde}$  espèce, on obtient un mot codant de la forme  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1}$  qui représente la SOMME CONNEXE DE  $m$  TORES. Sinon il existe des couples d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce entrelacées et des couples d'arêtes de  $2^{nde}$  espèce adjacentes. Il existe alors un mot codant qui contient  $aba^{-1}b^{-1}cc$ .

**Etape 6.** Transformer la somme connexe d'un tore avec un plan projectif par la somme connexe de trois plans projectifs.

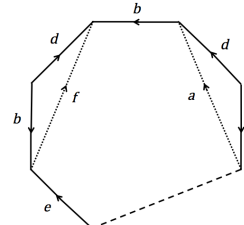
La méthode de découpage-collage permet de remplacer le sous-mot  $aba^{-1}b^{-1}cc$  par  $aabbcc$ .



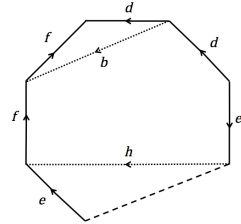
On découpe selon  $d$



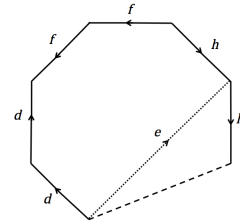
On recolle  $c$  et on découpe selon  $e$



On recolle  $a$  et on découpe selon  $f$



On recolle  $b$  et on découpe selon  $h$



On recolle  $e$  et on obtient  $h^{-1}h^{-1}ff d^{-1}d^{-1}$

Au cours de cette transformation, on a ajouté deux couples d'arêtes de  $2^{nde}$  espèce adjacentes supplémentaires.

Ainsi dès qu'il existe une paire de couples d'arêtes de  $1^{ere}$  espèce entrelacées, comme on s'est assuré qu'il existait au moins un couple d'arête de  $2^{nde}$  espèce, on peut répéter la transformation et supprimer toutes les arêtes de  $1^{ere}$  espèce. On obtient un mot codant de la forme  $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_m a_m$  qui représente la SOMME CONNEXE DE  $m$  PLANS PROJECTIFS.

■