TD 1 : Complétude, Convergence, $\limsup$ / $\liminf$, Ouverts de $\mathbb{R}$

Exercice 1 - La complétude

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que E est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente (dans E). On rappelle qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geqslant n_0,\ \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet (on pourra utiliser la question 1, le théorème de Bolzano-Weierstrass, et qu'une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence converge nécessairement vers celle-ci).
3. Soit X un ensemble (non vide), on appelle $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions **bornées** à valeurs rélles. On munit $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$ de la norme *sup*

$$\forall f \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{R}),\ \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

   Montrer que $(\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
4. Une partie F de E est *fermée* si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de F qui converge vers un élément x de E, x est dans F. Montrer que tout sous espace vectoriel **fermé** F d'un espace vectoriel normé E **complet** est complet.
5. En déduire que $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
6. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^N$, on dit que $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$. On munit ainsi $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de la norme

$$\forall u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}),\ \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

   Montrer que $(\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ est complet.

Exercice 2 - Séries numériques

Soit $\sum\limits_{k \geqslant k_0} u_k$ une série numérique (c'est à dire une série à valeurs réelles). On dit que la série $\sum\limits_{k \geqslant k_0} u_k$ est *convergente* si et seulement si la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=k_0}^{n} u_k\right)_{n \geqslant 0}$ est convergente. On dit que la série $\sum\limits_{k \geqslant k_0} u_k$ est *absolument convergente* si et seulement si la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=k_0}^{n} |u_k|\right)_{n \geqslant 0}$ est convergente.

1. Montrer qu'une série absolument convergente est convergente (il suffit de montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy).
2. Pour quelles valeurs de $a > 0$ et $\alpha > 0$ les séries $\sum\limits_{k \geqslant 0} a^k$ et $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ sont-elles convergentes ?
3. Soit $\sum\limits_{k \geqslant k_0} u_k$ une série numérique et $\sum\limits_{k \geqslant k_0} v_k$ une série numérique à termes positifs convergente. Montrer que si $u_n = O(v_n)$ alors $\sum\limits_{k \geqslant k_0} u_k$ est absolument convergente.
   Montrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} (-1)^k \frac{1}{k^{3/2}}$ est convergente.

Exercice 3 - Suites de fonctions

Soient, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n et f des fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *converge simplement* vers f sur I si

$$\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

On dit que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *converge uniformément* vers f sur I si

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

1. Donner, si elle existe, la limite simple des suites de fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$). Lesquelles de ces suites convergent uniformément ?

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= x + \frac{1}{n}x^2, \\
f_n(x) &= \cos(nx), \\
f_n(x) &= \frac{\cos(nx)}{n}, \\
f_n(x) &= nx\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x), \\
f_n(x) &= |x-n|\mathbb{1}_{[n-1,n+1]}(x), \\
f_n(x) &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

2. Donner un exemple d'une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction discontinue.

Exercice 4 - Convergence des séries de fonctions

Soient, pour $n \in \mathbb{N}, u_n$ et S des fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On pose

$$\forall x \in I, S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

On dit que la série $\sum u_n$ *converge simplement* vers S sur I si

$$\forall x \in I, \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x).$$

On dit que la série $\sum u_n$ *converge uniformément* vers S sur I si

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| \right) = 0.$$

On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* en tout point $x \in I$ si

$$\forall x \in I, \sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)| < \infty.$$

On dit que la série $\sum u_n$ *converge normalement* sur I si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x\in I} |u_k(x)| < +\infty.$$

1. Quelles implications existent entre ces quatre modes de convergence ? (On ne demande pas de démonstration.)

2. Donner un contre-exemple à chaque implication.

3. Vérifier que si $a_n = O(n^{-2})$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 - À propos de $\limsup$ et $\liminf$.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On définit sa *limite supérieure* et sa *limite inférieure* par :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} u_k,$$
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} u_k.$$

1. Montrer qu'elles sont bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$ (où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).
2. Montrer que
$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_n \sup_{k\geqslant n} u_k,$$
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_n \inf_{k\geqslant n} u_k.$$
3. Montrer que $\liminf\limits_n u_n \leqslant \limsup\limits_n u_n$.
4. Monter que $\limsup\limits_n u_n$ et $\liminf\limits_n u_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Que peut-on en déduire pour une suite convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$?
5. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$, comparer les limites inférieures et supérieures de (u_n) et (v_n).
6. Montrer que $\limsup\limits_n(-u_n) = -\liminf\limits_n(u_n)$.
7. Quelles inégalités peut-on établir entre $\liminf\limits_n u_n$, $\limsup\limits_n u_n$, $\inf\limits_n u_n$ et $\sup\limits_n u_n$?
8. Que valent $\liminf\limits_n u_n$, $\limsup\limits_n u_n$, $\inf\limits_n u_n$ et $\sup\limits_n u_n$ dans les cas suivants :
$$u_n = a^n, \text{ où } a \in \mathbb{R}^*,$$
$$u_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right),$$
$$u_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Exercice 6 - Ouverts dans $\mathbb{R}$.

Soit ω une partie de $\mathbb{R}$. On dit que ω est un *ouvert* de $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \in \omega,\ \exists r > 0 \text{ tel que }]x-r, x+r[\subset \omega.$$

1. Quels ensembles parmi les suivants sont ouverts :
$$\emptyset, \mathbb{R}, \{0\}, [0,1], [0,1[,]0,1[, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[\ ?$$
2. Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
3. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Qu'est ce qui bloque dans la preuve pour passer à une intersection quelconque ?
4. Montrer que l'image réciproque $g^{-1}(\omega)$ d'un ouvert ω par une application continue g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un ouvert.

Exercice 7 - Fermés dans $\mathbb{R}$.

Une partie de $\mathbb{R}$ est un *fermé* de $\mathbb{R}$ si et seulement si son complémentaire est un ouvert.
Une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de F qui converge vers un élément x de $\mathbb{R}$, x est dans F (admis).

1. Quels ensembles parmi les suivants sont fermés :

$$\emptyset, \mathbb{R}, \{0\}, [0,1], [0,1[,]0,1[, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \ ?$$

2. Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé.

3. Montrer qu'une réunion finie de fermés est un fermé.

Exercice 8 - Adhérence et densité.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle *adhérence* de A dans $\mathbb{R}$ le plus petit fermé contenant A. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A dans $\mathbb{R}$.
On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{A} = \mathbb{R}$.

1. Montrer que la définition de l'adhérence d'un ensemble a un sens.

2. Quelle est l'adhérence dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants :

$$\{0\}, [0,1], [0,1[,]0,1[, [0,1] \cap \mathbb{Q}, \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \ ?$$

3. Donner des exemples d'ensembles denses dans $\mathbb{R}$.