# TD 10 : Séries de Fourier

**Notations** : pour toute fonction $2\pi$-périodique $f$,

- coefficients de Fourier :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$
- série de Fourier partielle :
$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$$
- noyaux de Dirichlet :
$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$
- convolution :
$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$
Le produit de convolution est une loi commutative.

**Exercice 1 - Développement en série de Fourier**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions $2\pi$-périodiques définies par

$$\begin{array}{lll} \forall t \in ]-\pi,\pi[, & f(t) = t, & f(\pi) = 0, \\ \forall t \in ]-\pi,\pi[, & g(t) = \text{signe}(t), & \text{avec } \text{signe}(0) = 0, \ g(\pi) = 0. \end{array}$$

Développer $f$ et $g$ en séries de Fourier.

**Exercice 2 - Théorème de Dirichlet**

Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant

**Théorème 1.** *Soit $f \in L^1(]0,2\pi[)$ et $x \in [0,2\pi]$. Si $f$ admet au point $x$ des limites à droite $f(x^+)$ et à gauche $f(x^-)$ et les fonctions $t \mapsto \dfrac{f(x+t)-f(x^+)}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{f(x-t)-f(x^-)}{t}$ sont bornées au voisinage de $t = 0^+$, alors*
$$S_N(f)(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}.$$
*De plus, si $f \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_{par\ morceaux}$, alors il y a convergence normale de la série de Fourier de $f$ vers $f$.*

Soit une fonction $f$ et un point $x \in [0,2\pi]$ qui vérifient les hypothèses du théorème.

1. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_N(f)(t) = D_N \star f(t)$$
2. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)dt = 0$$
3. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a
$$D_N(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((N+1/2)t\right)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On pourra utiliser l'identité $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$.

4. Montrer que pour toute fonction $f \in L^1(]0,\pi[)$, on a
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)dt \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$
*Indication : proche du lemme de Riemann-Lebesgue*
5. Montrer que les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{f(x+t)-f(x^+)}{\sin(t/2)}$ et $t \mapsto \dfrac{f(x-t)-f(x^-)}{\sin(t/2)}$ sont des fonctions intégrables sur $]0,\pi[$.
6. En utilisant la parité de $D_N$, conclure.

Considérons maintenant que $f \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}^1_{\text{par morceaux}}$.

7. Montrer que la série de Fourier de $f$ converge simplement vers $f$.
8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a
$$|c_n(f)| \leqslant |c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}.$$
9. En utilisant la formule de Bessel-Parseval sur $f'$, conclure.

**Exercice 3 - Application des théorèmes sur les séries de Fourier**

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période $2\pi$ définie par $f(x) = x^2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$. En déduire la somme des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

**Exercice 4 - Noyaux de Dirichlet et de Fejér**

On définit pour $N \in \mathbb{N}$ respectivement les noyaux de Dirichlet et de Fejér d'ordre $N$ par:
$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n \qquad \text{et } K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n, \qquad \text{où } e_n(t) = e^{int}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer les formules suivantes :
$$D_N(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}, & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1, & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$K_N(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2((N+1)t/2)}{(N+1)\sin^2(t/2)}, & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ N+1, & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. Soit $f$ une fonction continue et $2\pi$-périodique. Pour $N \in \mathbb{N}$, vérifier que $S_N(f) = D_N * f$ et $\sigma_N(f) = K_N * f$ représentent respectivement les sommes partielles de Fourier et de Fejér de la fonction $f$.
3. Montrer que la suite $(K_N)$ vérifie les trois propriétés suivantes :
   (a) $\forall N \geq 0, K_N \geq 0$,
   (b) $\forall N \geq 0, \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)dt = 2\pi$ (pour ça, évaluer $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt$),
   (c) pour tout $\epsilon \in ]0,\pi[$ fixé, on a
$$\lim_{N\to+\infty} \int_\epsilon^\pi K_N(t)dt = 0.$$

Remarque : On trace ci-dessous les graphes des fonctions $D_N$ et $K_N$, pour $N = 1$ à $6$.

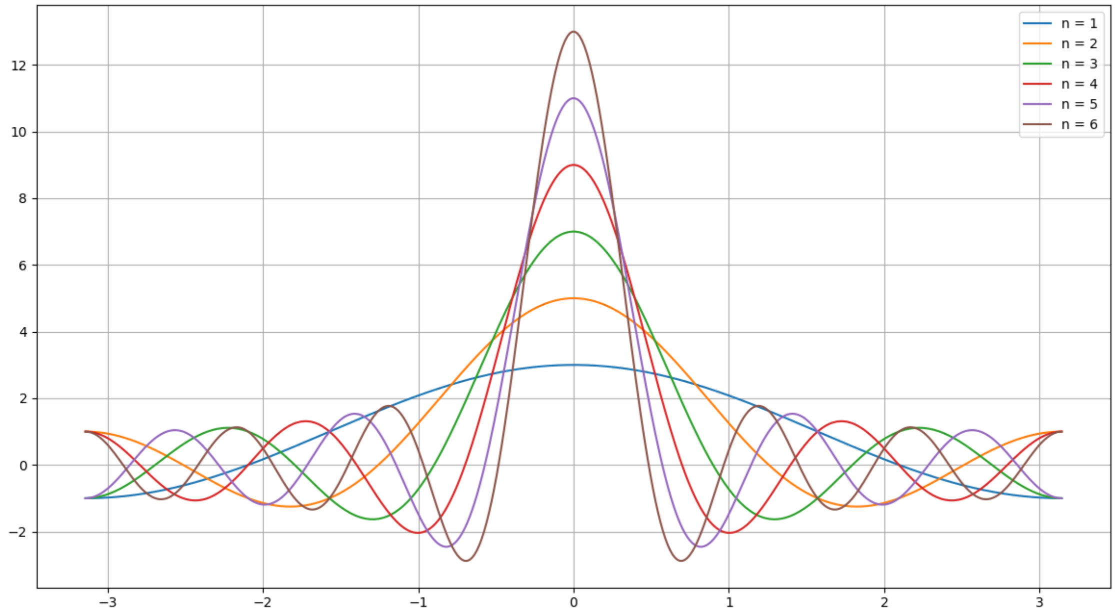


Figure 1: Noyaux de Dirichlet pour $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

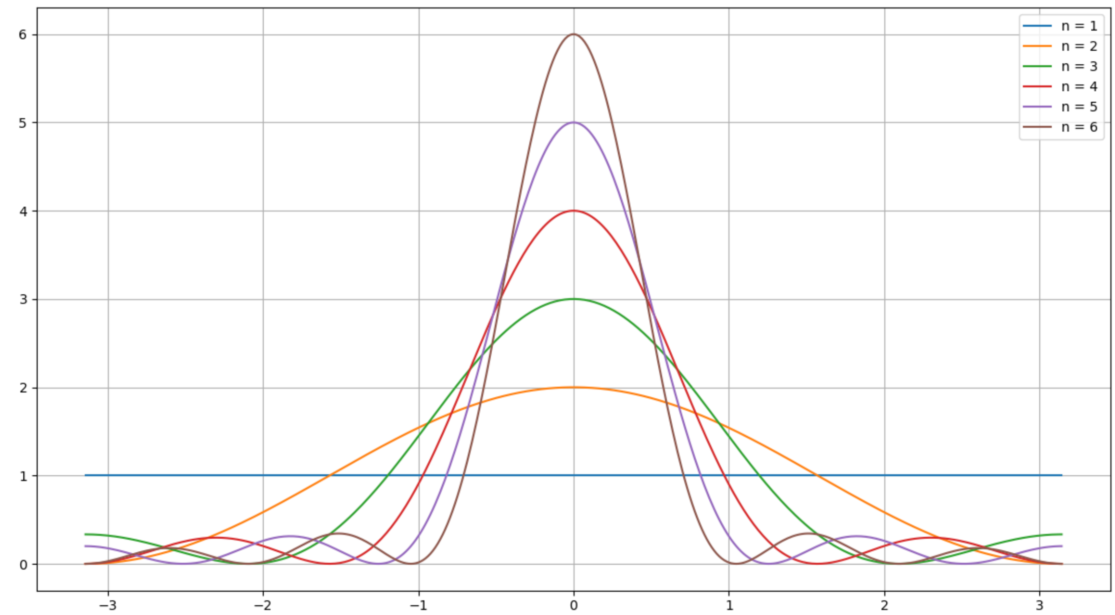


Figure 2: Noyaux de Fejér pour $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

**Exercice 5 - Un lemme**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux de période $T$. Montrer que la quantité $\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$ est indépendante de $a$.

**Exercice 6 - Inégalité de Wirtinger**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi$-périodique de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t,$$

et caractériser l'égalité.

**Exercice 7 - Phénomène de Gibbs sur un cas particulier**

Soit $h$ la fonction définie comme limite (au sens de la convergence simple) des sommes $\Sigma_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}$ quand $N$ tend vers plus infini, trouvée lors de l'exercice 1. On note $S_N(h)(x) = \Sigma_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que
$$\Sigma_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2} \int_0^x (D_N(t) - 1)\mathrm{d}t\,.$$
2. Trouver la limite
$$\lim_{N \to +\infty} S_N(h) \left(\frac{\pi}{N}\right)\,.$$