TD 2 : Ensembles, Tribus, Tribus boréliennes

Exercice 1 - Ensembles

Soit X un ensemble et A une partie de X. On note $A^{\complement} = X \setminus A$, le complémentaire de A. Quelle relation y a t-il entre $A \cup B$ et $A^{\complement} \cap B^{\complement}$?

Exercice 2 -

Soit X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y,
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$
2. Montrer que pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X,
$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)\,.$$
3. Montrer que si f est injective,
$$f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)\,.$$
Montrer par un contre-exemple que l'égalité précédente est fausse en général.

Exercice 3 - Tribus

Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Montrer que $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une tribu.

Exercice 4 -

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable (c'est à dire un espace muni d'une tribu). Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que $A \cap B$ et $A \Delta B$ sont dans $\mathcal{A}$.

Exercice 5 -

Montrer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux classes de parties de X telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$. Montrer ensuite que $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$.

Exercice 6 -

1. Soit X un ensemble non vide et $x \in X$. A quelle condition sur X, la classe $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ est-elle une tribu ?
2. Soit X un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ une partition finie de X (i.e. $X = \bigcup_i A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$). Décrire la tribu engendrée par $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Quel est son nombre d'éléments ?
3. Soit X un ensemble et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de X. Décrire la tribu engendrée par $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'elle est équipotente à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (i.e. qu'il existe une bijection entre ces deux ensembles).
4. On se donne $X = \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des $n\mathbb{N}^*$ avec n parcourant $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}'$ l'ensemble des $p\mathbb{N}^*$ avec p parcourant l'ensemble des nombres premiers.
   - Montrer que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X)$.
   - Montrer que $\sigma(\mathcal{A}') \neq \mathcal{P}(X)$.
     Indication : On pourra poser l'ensemble $A = \{2^k, k \in \mathbb{N}^*\}$ et utiliser l'ensemble
$$\mathcal{T} = \Big\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), A \subset B \text{ ou } A \subset B^{\complement}\Big\}\,.$$

Exercice 7 -

Soit X un ensemble muni d'une tribu au plus dénombrable $\mathcal{M}$.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, l'intersection $A(x)$ des éléments de $\mathcal{M}$ qui contiennent x est encore un élément de $\mathcal{M}$.
2. Montrer que $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{M}$ contenant x.
3. Montrer que pour tous $x, y \in X$, on a : $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.
4. En déduire que $\mathcal{M}$ est engendrée par une partition au plus dénombrable.
5. En utilisant les exercices précédents, montrer que toute tribu dénombrable est finie.

Exercice 8 - Tribus boréliennes

On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (tribu borélienne sur $\mathbb{R}$) est la tribu engendrée par les intervalles $]-\infty, a]$.

1. Rappeler pourquoi une tribu est stable par intersection dénombrable.
2. Montrer que tous les intervalles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que les intervalles $[a, b]$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.