TD 4 : Fonctions étagées, mesurables, intégrables, théorèmes de convergence

Exercice 1 - Fonctions étagées, révisions du cours

1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable, et f une fonction de la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ (pour $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et α_i distincts deux à deux). Montrer que f est mesurable si et seulement si les A_i sont dans la tribu $\mathcal{T}$. La fonction est alors ... ?
2. Donner un exemple de fonction étagée qui ne soit pas en escalier.
3. Calculer $\int_0^1 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} d\lambda$.

Exercice 2 -

Caractériser les fonctions mesurables $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par une partition finie de X.

Exercice 3 -

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < \infty, (f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour μ-presque tout $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Pour $i, n \geq 1$, on définit :

$$A_{n,i} = \left\{ |f - f_n| \geq \frac{1}{i} \right\}, \quad B_{n,i} = \bigcup_{p\geq n} A_{p,i}.$$

1. Soit $i \geq 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mu(B_{n,i}) = 0$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Prouver qu'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to \infty$.
3. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que le résultat de la question précédente est faux lorsque $\mu(X) = \infty$.

Exercice 4 - Inégalité de Markov

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$a\mu\left(\{|f| > a\}\right) \leq \int_{\{|f|>a\}} |f| \mathrm{d}\mu.$$

En déduire que $\lim_{a\to+\infty} a\mu\left(\{|f| > a\}\right) = 0$.

Exercice 5 -

Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ à valeurs réelles.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$. Montrer que cette limite est nulle.
2. A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ dans les cas suivants ? (Prouver l'affirmation ou donner un contre-exemple)
   (a) f est continue.
   (b) f est uniformément continue.
   (c) f est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée f' est λ-intégrable.

Exercice 6 - Lemme de Fatou

Montrer le lemme de Fatou : Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives alors

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

(On rappelle que $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} f_k$).
Indication : poser $\phi_n = \inf_{k\geq n} f_k$.
Application : Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\int_E f_n d\mu \leq M$ pour tout $n \geq 0$. Démontrer que $\int_E f d\mu \leq M$.

Exercice 7 -

Calculer la limite de la suite $v_n = \displaystyle\int_{[0,1]} \frac{ne^{-x}}{nx+1} dx$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 8 -

Sur $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $a \in X$ on définit la masse de Dirac δ_a par $\delta_a : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que δ_a et que $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{a_i}$ (avec $\alpha_i \geq 0$) sont des mesures positives.
2. Si f est mesurable positive, montrer que
$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i)$$
3. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, on prend $\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. Que vaut $\int f d\mu_0$?
4. Sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on met la mesure de comptage $\mu = \sum_0^{+\infty} \delta_n$. Vérifier qu'elle coïncide avec la mesure de l'exercice 1 du TD 3. Vérifier qu'une fonction u est intégrable si $\sum |u_n| < +\infty$.

Exercice 9 -

Calculer la limite des suites

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+k+n}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n^2}{kn^2+k^2}.$$

Indication : Munissez $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ de la mesure de comptage.

Exercice 10 - Contre-exemples classiques

1. Trouver une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue intégrable telle que
$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad \sup\{f(t),\ t \geq a\} = +\infty.$$
2. Trouver une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$ et telle que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pour aucun $x \in [0,1]$.
3. Donner un exemple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^0([0,1], \mathbb{R}_+)$ convergeant simplement vers 0 presque partout et telle que $\int_0^1 f_n(x)dx \to +\infty$.
4. Donner un exemple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^0([0,1], \mathbb{R}_+)$ convergeant simplement vers 0 et telle que $\int_0^1 f_n(x)dx$ n'admette pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.