# TD 6 : Mesure produit, Intégrales à paramètres, changement de variable

**Exercice 1 -**

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right)dx$. Conclure.

**Exercice 2 -**

Soit $a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$. Calculer $\sum\limits_{p\geq 0}\left(\sum\limits_{q\geq 0} a_{p,q}\right)$ et $\sum\limits_{q\geq 0}\left(\sum\limits_{p\geq 0} a_{p,q}\right)$. Conclure.

**Exercice 3 -**

Soit $f \in L^1(]0,1[)$, positive et croissante. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx$.

**Exercice 4 - Transformée de Fourier**

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, telle que $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable. Montrer que

$$F : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x)dx$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle est dérivable et calculer sa dérivée.

**Exercice 5 - Fonction Gamma $\Gamma$**

Pour $x > 0$ on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

1. Montrer que $\Gamma$ est bien définie, et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ?
3. Montrer que $\Gamma$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt$.
4. Calculer $I_0 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ et en déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$.
5. Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\, x^x\, e^{-x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}t}dt.$$
6. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \longrightarrow x\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right) - t\sqrt{x}$, est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in ]-\sqrt{x}, 0[$ on a l'inégalité $x\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}\right) - t\sqrt{x} \leq -\frac{1}{2}t^2$.
7. (*) Déduire des questions précédentes la formule de Stirling : $\Gamma(x+1) \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\, x^x\, e^{-x}$.

**Exercice 6 -**

Démontrer la formule de l'aire d'un disque de rayon $R$.

**Exercice 7 -**

Soit $f$ une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$. Calculer $I = \iint_{\mathbb{R}^2} f(2x+y, x-y)dxdy$.

**Exercice 8 -**

Soit $\varphi \in L^1([0,1], \lambda)$ et $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(t) = \int_0^1 \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\, dx$$

1. Montrer que $F$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée.
3. (*) Montrer que $F$ est dérivable en 0 si et seulement si $\frac{1}{\varphi} \in L^1([0,1], \lambda)$. Dans ce cas, exprimer sa dérivée en 0.

**Exercice 9 -**

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx} dx$

1. Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $F''$ et les limites en $+\infty$ de $F$ et $F'$. En déduire une expression simple de $F$.

**Exercice 10 -**

À l'aide du changement de variables $(x,y,z) = (\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv})$, calculer la mesure de Lebesgue des domaines suivants :

1. $\left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 |\ u,v,w > 0 \text{ et } uv, uw, vw < 1\right\}$.
2. $\left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 |\ u,v,w > 0 \text{ et } uv + uw + vw < 1\right\}$.

**Exercice 11 -**

On désigne par $\lambda$ (respectivement $\mu$) la mesure de Lebesgue (respectivement la mesure de comptage) sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Soit $\Delta = \{(x,x)\ ;\ x \in [0,1]\}$.

1. Montrer que $\Delta$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier l'existence des intégrales suivantes, et les comparer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} 1_\Delta(x,y) d\lambda(x) \right) d\mu(y) \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} 1_\Delta(x,y) d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

3. Conclure.

**Exercice 12 -**

Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures $\sigma$-finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R}; \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.

**Exercice 13 -**

En remarquant que pour tout $x > 0$, $\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy)dy$, calculer pour tout $t > 0$, l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} e^{-tx} dx.$$