TD 7 : Espaces L^p

Exercice 1 - Espaces L^p

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue.

1. Soit $p \in [1, +\infty[$. A quelles conditions sur α et β dans $]0, +\infty[$ a-t-on $\frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta} \in L^p(\mathbb{R}^+)$?
2. Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $q \neq p$. Donner un exemple de fonction dans $L^p(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^q(\mathbb{R})$.
3. Donner un exemple de fonction dans tous les $L^p(\mathbb{R})$, pour $p \in [1, +\infty[$, mais pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 2 -

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et (f_n) une suite de $L^p(X)$ convergente en norme L^p vers une fonction f. Montrer que si (f_n) converge presque partout vers une fonction g alors $f = g$ presque partout.

Exercice 3 - Continuité de la translation

Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}, dx)$.

1. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$
Indication : traiter d'abord le cas où f est continue à support compact.
2. Ce résultat est-il vrai pour $p = +\infty$ au sens où $\|f(.+h) - f(.)\|_{L^\infty} \to 0$ quand $h \to 0$?

Exercice 4 - Interpolation

1. Soient $p \in]1, +\infty[$ et $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $f \in L^p(\mathbb{R})$ et qu'on a l'inégalité
$$\|f\|_p \leq \|f\|_1^{1/p} \|f\|_\infty^{1-1/p}.$$
2. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
3. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et on a
$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$
4. Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^r(\mathbb{R})$ et on a
$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$
5. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall r \in [p, q],\ f \in L^r(\mathbb{R})$ avec
$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}, \quad \text{où } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, 0 \leq \theta \leq 1.$$

Exercice 5 -

Soit $p \in [1, +\infty[$ et (f_n) une suite de L^p qui converge presque partout vers une fonction $f \in L^p$. Démontrer l'équivalence suivante :
$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$
Indication : On pourra considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

Exercice 6 - Densité

1. Est-ce que l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ est dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$?
2. Est-ce que l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ est dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 7 -

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure non nulle finie, *i.e.* $0 < \mu(X) < \infty$.

1. Montrer que $L^\infty(X, \mu) \subset \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(X, \mu)$.
2. Montrer que, pour tout $f \in L^\infty(X, \mu)$, on a $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p$.