TD 8 : Encore de la théorie des mesures et de l'intégration

Exercice 1 - Mesure image

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (F, \mathcal{B}, \mu)$ une fonction mesurable. Montrer que l'application

$$\mu_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \overline{\mathbb{R}_+} \\ B & \mapsto & \mu(f^{-1}(B)) \end{array} \right.$$

définit une mesure sur $(F, \mathcal{B})$, appelée *mesure image* de μ par f.

Exercice 2 -

Soient $(E, \mathcal{A})$, $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables et $f : E \to F$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. On note $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ la mesure image de μ par f sur $(F, \mathcal{B})$. Montrer qu'une fonction mesurable $g : F \to \mathbb{R}$ est μ_f-intégrable si et seulement si $g \circ f$ est μ-intégrable et que dans ce cas, on a l'égalité suivante

$$\int_E g \circ f d\mu = \int_F g d\mu_f.$$

Exercice 3 -

Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe n_0 tel que f_{n_0} soit intégrable sur E. Montrer que

$$\int_{n\to\infty E} f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Que peut-on dire sans l'hypothèse d'intégrabilité ?

Exercice 4 -

Soit $p \in [1, +\infty[$ et (f_n) une suite de L^p qui converge presque partout vers une fonction $f \in L^p$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Indication : On pourra considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

Exercice 5 -

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure non nulle finie, *i.e.* $0 < \mu(X) < \infty$.

1. Montrer que $L^\infty(X, \mu) \subset \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(X, \mu)$.
2. Montrer que, pour tout $f \in L^\infty(X, \mu)$, on a $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.