TD 9 : Transformée de Fourier

Notations : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on notera $\hat{f}$ sa transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

On rappelle la formule d'inversion de Fourier : Si f, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que f est continue en x,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi} \hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Exercice 1 -

Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2 -

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$. Montrer que si f est paire, alors $\hat{f}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer la transformée de Fourier des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = e^{-x}1_{\{x>0\}}$ et $f_2(x) = e^{-|x|}$.

Exercice 3 -

Montrer que la transformée de Fourier d'une gaussienne $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$ est encore une gaussienne.
Indication : Trouver une équation différentielle vérifiée par $\hat{f}$.

Exercice 4 -

Montrer le théorème de Riemann-Lebesgue :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad \hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi \to \pm\infty]{} 0.$$

Indication : Utiliser la densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ *dans* $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 5 - Calcul d'une transformée de Fourier par la formule d'inversion

Pour $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f .
2. À l'aide de la formule d'inversion, déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 6 - Convolution

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

1. On suppose $f, g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$.
   - Montrer que $x \mapsto f * g(x)$ est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, mesurable, que $f * g(x) = g * f(x)$ et que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
   - Montrer que la transformée de $f * g$ vérifie $\widehat{f * g}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

2. On suppose que $f \in L^1$ et $g \in L^p$ avec $p \in]1, +\infty[$, montrer que $x \mapsto f * g(x)$ est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, mesurable et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
   Est-ce toujours vrai pour $p = +\infty$?
   Indication : Commencer par considérer le cas $\|f\|_1 = 1$.

3. (*) Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$. Montrer que $x \mapsto f * g(x)$ est bien définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, mesurable et que si l'on choisit r tel que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r},$$
   alors $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$. (C'est l'inégalité d'Young)

Exercice 7 - Résolution d'une équation différentielle par transformée de Fourier

Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que
$$f''(x) - f(x) = (x^2 - 3/4)e^{-x^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$
Déterminer f en prenant la transformée de Fourier de l'équation différentielle.

Exercice 8 - Fourier et convolution

1. Déterminer les éléments de $L^1(\mathbb{R})$ tels que $f \star f = f$.
2. La convolution admet-elle un élément neutre dans $L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 9 - Un calcul

Calculer $1_{[0,1]} \star 1_{[0,1]}$.

Exercice 10 -

Soient $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$ telles que $\lim_{|x| \to +\infty} g(x) = 0$. Montrer que $\lim_{|x| \to +\infty} f \star g(x) = 0$. Le résultat subsiste-t-il si l'on omet le contrôle de g à l'infini ?

Exercice 11 -

Soit $(B_n)_{n \geq 0}$ une suite de boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$ centrées à l'origine et de rayon $r_n > 0$ tel que $\lim_n r_n = 0$. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et (f_n) la suite des moyennes de f sur les boules B_n, définies sur $\mathbb{R}^d$ par
$$f_n(x) = \frac{1}{\lambda_d(B_n)} \int_{x + B_n} f(y) d\lambda_d y.$$
Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge $\lambda_d - p.p.$ vers f.