I Polynômes d'endomorphismes

$\mathbb{K}$ désigne un corps (souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Def 1: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, le polynôme d'endomorphisme $P(f)$ est défini par

$$P(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k$$

De même pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$

Exemple 2: pour $P = X^2+X+1$ on a $P(f)(x) = f^2(x) + f(x) + x$ et on a $P(A) = A^2+A+I_n$

Remarque 3: Il ne faut pas confondre avec $P(f(x))$.

Def 4: L'algèbre des polynômes en $f \in \mathcal{L}(E)$ est défini comme l'image de $\varphi_f : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(f)$ (morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres)

De même pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\varphi_A : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \mapsto P(A)$

Def 5: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Un polynôme P est annulateur de f si l'endomorphisme $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

De même pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $P(A) = 0$ si P annule A.

Exemple 6: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $J^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P = X^4 - 1$ annule J c'est un polynôme annulateur

Prop 7: En dimension finie, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ donné, il existe toujours un polynôme annulateur

Contre exemple 8: $D: P \mapsto P'$ la dérivation n'admet pas de polynôme annulateur

Si on avait Q tel que $Q(D)(P) = 0 \ \forall P \in \mathbb{K}[X]$, pour $P = X^{\deg(Q)+1}$ on a $Q(D)(P) \neq 0$, contradiction.

Remarque 9: Le noyau de φ_f est l'ensemble des polynômes annulateurs de f, c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ puisque c'est le noyau d'un morphisme.

Def 10: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire, noté μ_f, qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de f.

De même pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera μ_A

Remarque 11: $\mathbb{K}[X]$ étant un anneau principal (puisque $\mathbb{K}$ est un corps) ces idéaux sont $P\,\mathbb{K}[X]$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$, le noyau de φ_f s'écrit en fait $\mathrm{Ker}(\varphi_f) = \langle \mu_f \rangle$

Exemple 12: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $J^2 + I_2 = 0$ et X^2+1 est le polynôme minimal de J car J n'est pas une homothétie.

Proposition 13: Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas racine de son polynôme minimal

Exemple 14: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mu_A = X(X-1)$ 0 est bien racine de μ_A

Application du polynôme minimal 15: Soit $f \in GL(E)$ avec son polynôme minimal μ_f, on a $\mu_f(0) \neq 0$. $\mu_f = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ on a $\mu_f(f) = 0$

d'où $a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i f^i = 0$ donc $f \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} f^i = -a_0$ $\quad \mu_f(0) = a_0 \neq 0$

Ainsi $f \circ \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} f^i\right) = 1$

Donc $-\frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} f^i$ est l'inverse de f.

Remarque 16: Maintenant que l'on a le polynôme minimal on peut comprendre l'isomorphisme $\mathbb{K}[f] \simeq \mathbb{K}[X]/\langle \mu_f \rangle$

En effet φ_f est un morphisme surjectif car $X(f) = f$ donc en utilisant le premier théorème d'isomorphisme avec $\langle \mu_f \rangle = \mathrm{Ker}\, \varphi_f$, on a l'isomorphisme d'algèbres ci-dessus.

II Diagonalisabilité et Trigonalisabilité

E, E' deux espaces vectoriels de dimension finie

Def 17: Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et F un sous espace vectoriel de E. La restriction de f à F est l'application linéaire $f_{|F} : F \to E'$ définie par $f_{|F}(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$

Exemple 18: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ $\quad f : E \to E'$ avec $\dim E = m$, $\dim E' = n$

$F \subset E$ avec $\dim F = p \leq m$ $\quad f_{|F} : F \to E'$

$$A_{|F} = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}}_{p} \updownarrow n \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Def 19: Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Un sous espace vectoriel F de E est stable par f si $f(F) \subset F$

Exemple 20:
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\ } & 0 \\ 0 & \boxed{\ } \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow r \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \dim F = p & F \subset E \\ \dim G = r & G \subset E \end{matrix}$$
$p_F \quad r_G$

F et G sont stables car les coordonnées sur leur supplémentaire sont nulles.

Remarque 21: Les espaces stables sont essentiels quand on veut obtenir une somme directe de E

Def 22: Si F est un sous espace stable d'un espace vectoriel E par un endomorphisme f, alors l'endomorphisme induit par f sur F est l'endomorphisme $f_F : F \to F$ défini par $f_F(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$.

Exemple 23: $A = \begin{pmatrix} \boxed{F} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ $\updownarrow p$ $\big]n$ $\qquad B = (F)$ est l'induit par A sur F.

Def 24: Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f est le polynôme unitaire χ_f défini par
$$\chi_f(X) = \det(X I_d - f)$$
De même pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$

Exemple 25: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ -2 & X-4 \end{vmatrix} = (X-3)(X-4) - 2 = (X-5)(X-2) = \chi_A(X)$

Thrm 26: (Cayley Hamilton)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f est annulateur de f : $\chi_f(f) = 0$

De manière équivalente, $\mu_f \mid \chi_f$.

DEV I

Remarque 27: On a $\deg(\mu_f) \leq \deg(\chi_f) = n = \dim E$

Exemple 28: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\chi_A = (X-5)(X-2)$ $\quad (A - 5I_2)(A - 2I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B = I_2$ $\quad \chi_B = \det(XI_n - I_n) = (X-1)^n$ $\quad$ on a bien $\mu_B \mid \chi_B$
$\mu_B = (X-1)$

Def 29: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est nilpotente s'il existe un $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^r = 0$

De même, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on aurait r tel que $A^r = 0$

Exemple 30: $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc N est nilpotente

Application 31: on peut calculer des puissances grandes avec le binôme de Newton par exemple $(I - N)^3 = I_2 + 3N + 3N^2 + N^3 = I_2 + 3N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def 32: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est diagonalisable si dans une certaine base la matrice de f est diagonale.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est diagonalisable s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale (on dit que A est semblable à une matrice diagonale)

Exemple 33: $* A = \begin{pmatrix} -13 & -35 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car $A = P^{-1}DP$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$* B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable pour des raisons que l'on va voir après.

Proposition 34: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples alors f est diagonalisable.

Exemple 35: $* A = \begin{pmatrix} -13 & -35 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$ $\chi_A = (X-1)(X-2)$ donc A diagonalisable

$* B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\chi_B = (X-1)^2$ donc il est bien possible que B ne soit pas diagonalisable.

Thrm 36: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ Les propositions sont équivalentes :
(i) f est diagonalisable
(ii) μ_f est scindé à racines simples
(iii) il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de f vérifiant $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

Application 37: La diagonalisabilité d'une matrice permet de calculer plus facilement les puissances de matrice. $A = P^{-1}DP$

on a $A^k = (P^{-1}DP)^k = P^{-1}D^kP$ et si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Def 38 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable si dans une certaine base la matrice de f est triangulaire supérieure.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on dit que A est trigonalisable s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure.

Exemple 39 : $A = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ est trigonalisable car $A = P^{-1}TP$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Thrm 40 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ les propositions sont équivalentes :
(i) f trigonalisable
(ii) μ_f est scindé
(iii) il existe un polynome annulateur scindé

Exemple 41 : $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ car $\mu_J = X^2+1$ non scindé sur $\mathbb{R}$
mais J est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ car $\mu_J = (X-i)(X+i)$, scindé sur $\mathbb{C}$

III Décompositions d'endomorphismes.

Thrm 42 (Décomposition des noyaux). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k \in K[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux.
Alors $\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} P_k(f)$

Exemple 43 : Pour P un polynome annulateur de f, $\operatorname{Ker} P(f) = E$
donc si $(X+1)(X-2)$ annule f on a : $E = \operatorname{Ker}(f + Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id)$

Thrm 44 (Décomposition de Jordan-Dunford) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_f scindé
Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que
- $f = d + n$
- n, d commutent
- n nilpotent
- d diagonalisable

De plus, d et n sont des polynômes en f.

DEV 2

Exemple 45 :
* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$ $DN = ND$ D diagonalisable et N nilpotente
* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ et $N = 0$ D est diagonalisable car $\chi_A = (X-1)(X-2)$

Application 46 :
Pour résoudre des systèmes différentiels, on a besoin parfois de calculer l'exponentielle de matrices. En ayant la décomposition de Dunford, le calcul devient plus simple. pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\exp(A) = \exp(D+N) = \exp(D)\exp(N)$$

$\exp(D) = P^{-1}\exp(\tilde{D})P$ avec P la matrice inversible de changement de base et $\tilde{D}$ une matrice diagonale et $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

ici $P = Id = \tilde{D} = D$

$\exp(I_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I_2^k}{k!} = I_2 \times e$ $\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k}{k!} = I_2 + N$ car $N^i = 0$ $\forall i \geqslant 2$

Def 47 : Un bloc de Jordan d'une matrice nilpotente de taille $m \in \mathbb{N}^*$ est la matrice $J_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en position $(i, i+1)$ pour $i \in \{1, \dots, m-1\}$ qui valent 1, i.e

$$J_m = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{m}$$

Remarque 48 : J_m est bien nilpotente car en itérant J_m on fait remonter la diagonale de 1 qui finit par disparaître.

Proposition 49 : Soit f un endomorphisme nilpotent. Il existe des entiers $\deg \mu_f = d_r \geqslant d_{r-1} \geqslant \dots \geqslant d_1$ et une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec les blocs $J_{d_1}, \dots, J_{d_r}$.
Cette matrice est appelée réduite de Jordan de f.

Exemple 50 :
$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $N = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Thrm 51 (Réduction de Jordan) Soit f un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de f.
Il existe des suites $d_{j,1} \geqslant \dots \geqslant d_{j,r_j}$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$ telles que dans une certaine base, la matrice f soit diagonale par blocs avec les blocs

$$\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}, \dots, \lambda_1 I_{d_{1,r_1}} + J_{d_{1,r_1}}, \dots, \lambda_m I_{d_{m,1}} + J_{d_{m,1}}, \dots, \lambda_m I_{d_{m,r_m}} + J_{d_{m,r_m}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_m} \end{pmatrix} \text{ avec } A_i = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\lambda_1 I_{d_{1,r_1}} + J_{d_{1,r_1}}} \end{pmatrix} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, m\}$$