

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.  
Exemples d'applications en analyse et en géométrie.

Motivations: généraliser l'inversion des  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
ou d'applications linéaires

### I Théorème d'inversion locale (TIL)

1) Enoncé et variantes (cadre:  $n \in \mathbb{N}$   $p \in \mathbb{N}^*\setminus\{0\}$ )

Thm 1: (TIL) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a$  un point de  $U$   
et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $C^1$ . Si  $Df(a)$  est inversible  
Alors il existe  $V$  un voisinage ouvert de  $a$  (dans  $U$ ) et  
 $W \in \mathcal{P}_f(a)(\mathbb{R}^n)$  tels que  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme  
de  $V$  sur  $W$ .

Rmq 2: on peut se placer dans des Banach  
en supposant  $Df(a)$  bijective de  $E$  dans  $F$ .

Rmq 3: De plus, si  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ , alors  $f$  est un  $C^1$ -difféo de  $U, W$ .

Ex 4:  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ,  $f: (x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$   
est un  $C^1$ -difféomorphisme local sur  $U$

Contre-ex 5:  $\circledast f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x + x^2 \sin(\frac{1}{x})$  n'est pas un  $C^1$ -difféo  
car n'est pas  $C^1$  au voisinage de 0

$\circledast f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^3$  n'est pas un  $C^1$ -difféo  
car  $f^{-1} \notin C^1$  au voisinage de 0

Thm 6: (Théorème d'inversion globale) Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$   
 $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ . Si  $f$  est injective sur  $U$  et que  
pour tout  $x \in U$ ,  $Df(x)$  est inversible  
Alors  $f(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme  
de  $U$  sur  $f(U)$ .

Contre-ex 7: Dans l'exemple 4,  $f$  est un  $C^1$ -difféo local  
sur  $U$  mais pas global.

Thm 8: (Théorème d'inversion holomorphe) Soit  $U$  ouvert  
composé de  $C$  et  $f: U \rightarrow C$  fonction holomorphe  
on suppose  $f$  injective sur  $U$ .  
Alors  $f(U)$  est un ouvert de  $C$  et  $f$  est un biholo-  
morphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

### 2) Applications en analyse

Thm 9: (changement de coordonnées) Soient  $f_1, \dots, f_n \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$   
 $(u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_n))$   
(définisent en chaque de variables)  $\Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \det Df_i(a) \neq 0 \\ \text{au voisinage de } a \in \mathbb{R}^n \end{array} \right)$

Ex 10: (coordonnées polaires)  
 $f: (r, \theta) \in [0; +\infty[ \times ]-\pi; \pi[ \mapsto (rcos\theta, rsin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$

Prop 11: Les fonctions  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $x \mapsto e^x$ ,  
 $\text{inv}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $x \mapsto \ln x$  sont resp. des  
 $C^1$ -difféo locaux au voisinage des points  $0, 1, i\pi, \text{Id}$ .

Prop 12: (perturbation de l'identité) Soit  $E$  Banach,  
 $g \in C^1(E, E)$ . Si pour tout  $x \in E$   $\|Dg_x\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$   
Alors, pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$ ,  $f_\epsilon = I_\epsilon + \epsilon g$  est un  $C^1$ -difféo de  $E \rightarrow E$ .

Prop 13: Soit  $n \geq 2$ ,  $f: \mathbb{R}^{n*} \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$   $C^1$  telle que  
 $\forall x \in \mathbb{R}^{n*}$   $Df(x) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $\|f(x)\|_2 = \|x\|_2$   
Alors  $f$  est surjective.

Thm 14: (lemme de Morse à deux variables) Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$   
telle que  $0 \in U$ , Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$   $C^3$   
On suppose que la forme quadratique  $D^2f(0,0)$  est non dégénérée.

si signature  $(D^2f)(0,0) = (2,0)$ , il existe  $u$  et  $v$  tels que  
 $f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0).(x,y) = u(x,y)^2 + v(x,y)^2$   
si signature  $(D^2f)(0,0) = (1,1)$ , il existe  $u$  et  $v$  tels que  
 $f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0).(x,y) = u(x,y)^2 - v(x,y)^2$

Appli 15: Étude locale d'une conique par rapport à son plan tangent (voir annexe)

Appli 16: Méthode de la phase stationnaire : étudier le comportement en  $+\infty$  de  $I(\lambda) = \int e^{i\lambda L(n)} a(n) dn$  où  $\Psi \in C^\infty([R^n, \mathbb{R}])$  et  $a \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

### 3) Applications en algèbre linéaire et en géométrie

Thm 17: (D'Alembert-Gauss) Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé.

Prop 18: Soit  $n \geq 3$  impair,  $SO_n(\mathbb{R})$  est simple.

Prop 19: (Réduction des formes quadratiques) Soit  $A_0 \in \mathcal{L}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$  il existe un voisinage  $V$  de  $A_0$  dans  $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$  et  $\Psi: V \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}^1$  tels que  $A = \Psi(A) A_0 \Psi(A)^{-1} \forall A \in V$ .

Appli 20: Lemme de Morte en dimension  $n$ .

Thm 21: Si  $A \in J_n(\mathbb{C})$ , alors  $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$

Corollaire 22:  $\exp: J_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  surjective

$\exp: J_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$  surjective

Appli 23:  $GL_n(\mathbb{C})$  n'a pas de sous groupe arbitrairement petit.

### (II) Théorème des fonctions implicites (TFI)

#### 1) Enoncé

Thm 24: Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ ,  $(a, b) \in U$ ,  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$

si  $f(a, b) = 0$  et  $Dyf(a, b)$  est inversible

Alors il existe  $V \in \mathcal{V}_a(\mathbb{R}^n)$ ,  $W \in \mathcal{V}_b(\mathbb{R}^k)$  avec  $V \times W \subset U$  et  $\Psi \in C^1(V, W)$  telle que

$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V, y = \Psi(x))$

Rmq 25: Si  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ , alors  $\Psi \in C^1(V, W)$  (généralisable au cas holomorphe)

Rmq 26: De plus, si  $\Psi$  existe de  $D\Psi(x)$  sur  $V$  et l'on peut la calculer explicitement.

Ex 27: Le cercle  $\{x^2 + y^2 = 1\}$  peut être vu localement comme un graphe (sauf en  $(\pm 1, 0)$ )

\*folium de Descartes  $\{x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$  aussi sauf en  $(0, 0)$  et  $(2^{2/3}, 2^{2/3})$

Rmq 28: Historiquement, la première preuve du TFI utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a en fait une équivalence entre

$(\text{Cauchy-Lipschitz}) \Leftrightarrow (\text{TIL}) \Leftrightarrow (\text{TFI}) \Leftrightarrow (\text{Point fixe de Picard})$

### 2) Applications dans d'autres domaines

Thm 29: Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ ,  $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ . Soit  $x_0$  une racine simple de  $P$ . Alors il existe  $U \in \mathcal{V}_{(a_0, \dots, a_n)}(\mathbb{C}^{n+1})$ ,  $V \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{C})$  et  $\Psi: U \rightarrow V$   $C^1$  telle que

$$(x \in V, (b_0, \dots, b_n) \in U, \sum_{i=0}^n b_i x_0^i = 0) \Leftrightarrow (b_0, \dots, b_n \in U \text{ et } x = \Psi(b_0, \dots, b_n))$$

Cor 30:  $\{P \in \mathbb{C}[X] \text{ scindé simple}\}$  est un ouvert de  $\mathbb{C}[X]$  donc les matrices diagonalisables de  $J_n(\mathbb{C})$  forment un ouvert de  $J_n(\mathbb{C})$

Appli 31: Donner une solution approchée de la racine réelle de

$$x^7 + 0,99x - 2,03 = 0$$

Appli 32: Trouver un développement asymptotique de

$$I(\varepsilon) = \int_{n_1(\varepsilon)}^{n_2(\varepsilon)} \frac{dx}{f(x, \varepsilon)} \text{ où } f(n, \varepsilon) = (x-a)(b-n) + \varepsilon n^2 \quad a \leq b$$

et  $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)$  les deux premières racines de  $f$ .

Prop 33: Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux variétés régulières  $\mathbb{C}^2$  à paramétrage injectif, soit  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ . Si les plans tangents  $T_p\Sigma_1$  et  $T_p\Sigma_2$  en  $p$  sont distincts. Alors, au voisinage de  $p$ , l'intersection  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  est une courbe dont la tangente en  $p$  est l'intersection  $T_p\Sigma_1 \cap T_p\Sigma_2$  des deux plans tangents.

(III) Sous variétés (cadre:  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ )

#### 1) Sous variétés et espaces tangents

Def 34: (sous variété)  $N \subset \mathbb{R}^n$  est une sous variété de dimension  $k$  et de classe  $C^p$  si pour tout  $x_0 \in N$ , il existe  $W \in \mathcal{V}_{x_0}(x_0)$  et  $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  un  $C^p$  difféomorphisme local tel que

$$\Psi(N \cap W) = \Psi(W) \cap [(\mathbb{R}^k \times \{0\})^{n-k}]$$

Ex 35: les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  sont des sous variétés,  $GL_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^{n^2}$

Thm 36: (des sous variétés) Il y a équivalence entre :

(i) (Carte locale)  $N$  est une sous variété de dimension  $k$  de classe  $C^p$

(ii) (équation) pour tout  $x_0 \in N$ , il existe  $W \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$  et

$F: W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  de classe  $C^p$  tels que  $dF(x)$  soit injective pour  $x \in W$  et  $N \cap W = F^{-1}(F(0))$

(iii) (graph) pour tout  $x_0 \in N$ , il existe  $W \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ ,  $U \in \mathcal{V}_{(x_0, \dots, x_{k-1})}(\mathbb{R}^k)$  et  $u: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  de classe  $C^p$

tels que  $W \cap N = \{A(x, u(x)), x \in U\}$  avec

une matrice de changement de base

(iv) (nappe paramétrique) pour tout  $x_0 \in N$ , il existe  $W \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ ,  $U \in \mathcal{V}_0(\mathbb{R}^k)$  et  $j: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^p$  telle que  $j(0) = x_0$ ,

$dj(x_0)$  injective et  $j$  est une bijection bilinéaire de  $U \times W$  sur  $N \cap W$ .

Ex 37: La parabole  $y = x^2$  est une sous variété de dimension 1

Le cercle  $x^2 + y^2 = 1$  est une sous variété de dimension 1

Le cône  $x^2 + y^2 = z^2$  est une sous variété de dimension 2

Def 38: (espace tangent) Soit  $N$  une sous variété, soit  $x_0 \in N$

l'espace tangent est l'espace vectoriel de dimension  $k$

$T_{x_0}N = \{v \in \mathbb{R}^n \text{ tel qu'il existe } \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ avec } 0 \in I \text{ et } \gamma(I) \subset N, \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma'(0) = v\}$

Rang 39: Parfois on parle d'espace affine tangent qui est  $x_0 + T_{x_0}N$ .

Thm 40: on peut caractériser l'espace tangent comme ci-dessous

(i) (carte locale)  $T_{x_0}N = d\psi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$

(ii) (équation)  $T_{x_0}N = \text{Ker}(dF(x_0))$

(iii) (graph)  $T_{x_0}N = \{A(h, du(z_0), h) \in \mathbb{R}^k\}$  avec  $z_0 / x_0 = A(z_0, u(z_0))$

(iv) (nappe paramétrique)  $T_{x_0}N = dj(0)(\mathbb{R}^k)$

Ex 41: Soit  $g$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in \text{Col}(g)$

Alors  $\{x_0\}^\perp$  est l'espace tangent en  $x_0$  de la sous variété  $\text{Col}(g)$

## 2) Théorème des extrêmes liés

Thm 42: (extrêmes liés) Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f, g_1, \dots, g_{n-k} \in C^1(U, \mathbb{R})$

on pose  $\Pi = \{x \in U, g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_{n-k}(x) = 0\}$

Si  $f|_{\Pi}$  admet un extrémum local en  $x_0 \in \Pi$  et que la famille  $dg_i(x_0)$  est libre

Alors il existe  $(\lambda_i)^{n-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$  tel que

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i dg_i(x_0)$$

Appli 43: pour tout  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$  inégalité Hadamard

$$|\det(u_1, \dots, u_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|_2$$

Appli 44: pour tout  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$  inégalité arithmétique géométrique

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Appli 45: pour tout  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$  inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$

où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $p > 1, q > 1$

## 3) Application à l'étude des sous groupes de $GL_n(\mathbb{R})$

Thm 46: (Cartan - Von Neumann)

Tout sous groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$

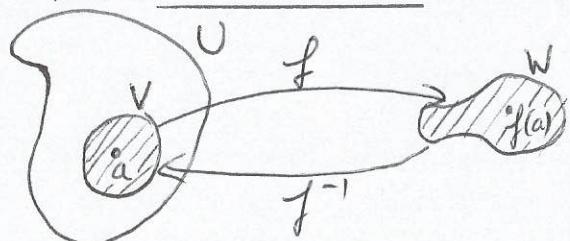
est une sous variété de  $\mathbb{R}^{n^2}$

DEV3

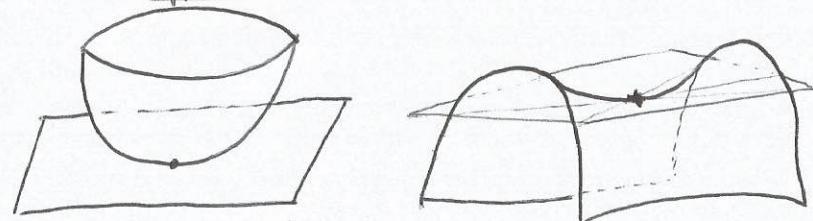
Ex 47: On peut illustrer ce théorème grâce au tableau en annexe regroupant les résultats pour les sous groupes fermés de  $GL_n(\mathbb{R})$  suivants

$GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R}), Sp_{2n}(\mathbb{R})$  et  $O(p, q)$

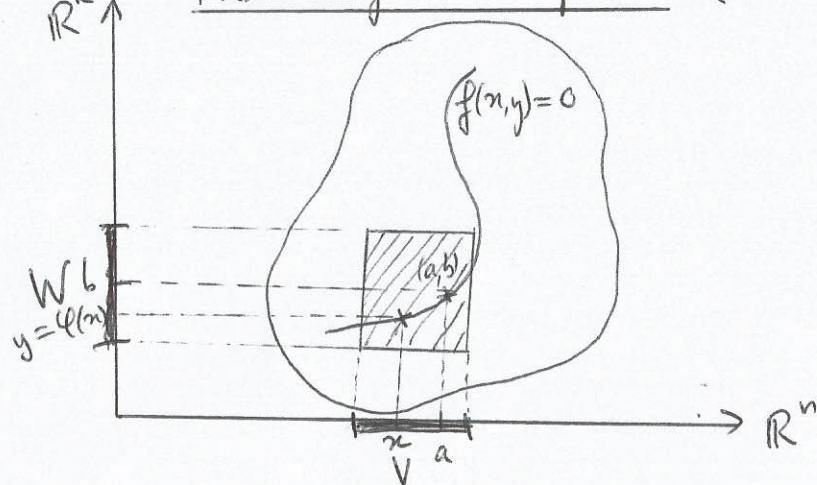
### Thrm d'inversion locale (Thrm 1)



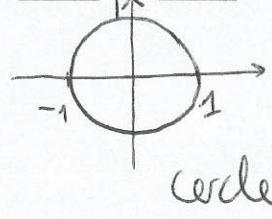
### Application 15



### Thrm des fonctions implicites (Thrm 24)

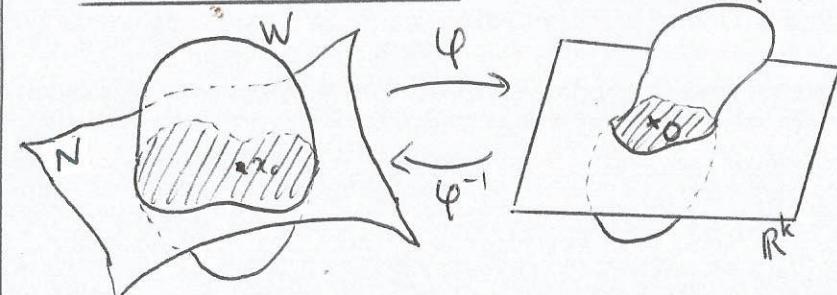


### Exemple 27



sous variétés.

### Carte locale (Def 34)



### Ex 47 : Illustration de Cartan Von Neumann

ssg/p fermé de $GL_n(\mathbb{R})_G$	submersion F $t_F G = F'(f(0))$	differentielle de F $dF_{I_n}$	espace tangent en $I_n$ à $T_{I_n} G$	dimension
$GL_n(\mathbb{R})$	0	0	$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$	$n^2$
$SL_n(\mathbb{R})$	$\det - 1$	$\text{tr}$	$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{t(M) = 1\}$	$n^2 - 1$
$O_n(\mathbb{R})$	$F(M) = t_{MM - I_n}$	$dF_{I_n} \cdot H = H + t_H$	$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$Sp_{2n}(\mathbb{R})$	$F(M) = t_{MJM - J}$	$dF_{I_n} \cdot H = JH + t_{HJ}$	$\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) = Sp_{2n}(\mathbb{R})$	$\frac{2n(2n+1)}{2}$
$O(p, q)$	$F(M) = t_{T_{pq} M - I_{pq}}$	$dF_{I_n} \cdot M = T_{pq} M + t_{HI_{pq}}$	$\mathcal{O}_{p,q} = \{T_{pq} M + t_{HI_{pq}} = 0\}$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$