

(I) Fonctions usuelles et variable complexe1) Exponentielle, sinus et cosinus

Def 1: On définit l'exponentielle complexe comme
 $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge ^{normalement} sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Rmg 2: si $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$
 $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

Prop 3: La fonction exponentielle complexe est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $(e^z)' = e^z$.

Prop 4: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists y \quad e^y = z$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = 0 \Leftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Rmg 5: on peut définir l'exponentielle dans une algèbre de Banach, exemple: exponentielle de matrices.

Def 6: On définit le sinus complexe et le cosinus complexe par
 $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Prop 7: exp, sin, cos coïncident avec leur définition réelle sur $\mathbb{R}$

Prop 8: $\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Rmg 9: $\forall y \in \mathbb{R} \quad \cos(iy) = \cosh(y)$ et $\sin(iy) = i \sinh(y)$
 où $\cosh$ et $\sinh$ sont les cosinus et sinus hyperboliques

2) Logarithme et détermination

Def 10: Si $z \in \mathbb{C}^*$ on dit qu'un nombre complexe w est un logarithme de z si $e^w = z$ et que $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z si $z = |z| e^{i\theta}$.

Ex 11: $z = 1+i$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ est un argument de z
 $\frac{1}{2} \ln(2) + i \frac{\pi}{4}$ est un logarithme de z

Rmg 12: il y a une infinité de log et d'argument pour un z fixé

Prop 13: Si θ est un argument de z
 alors $\ln(|z|) + i\theta$ est un logarithme de z
 si $\log(z)$ est un logarithme de z
 alors $\text{Im}(\log(z))$ est un argument de z

Def 14: la détermination principale du logarithme est telle que

$$\text{Log}(z) = \log(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$$

$$\text{où } r \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \theta \in]-\pi; \pi[$$

Rmg 15: sur $[0; +\infty[$ Log coïncide avec $\ln$.

Prop 16: La fonction Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$
 et $\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}$

Application 17: on peut définir la puissance grâce à
 au log $z^x = e^{x \log(z)} = e^{x(\ln(r) + i\theta)} = r^x e^{xi\theta}$

Prop 18: Sur le disque $D(0,1)$ ouvert, on a

$$\log(1-h) = -\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{h^i}{i}$$
 qui converge normalement sur tout compact.

3) Indice et théorème des résidus

Def 19: Soit γ un lacet, et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma$
 $\forall z \in \Omega$, l'indice de z pour γ
 est:
$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Prop 20: Sous les mêmes hypothèses, $\text{Ind}_\gamma \in \mathcal{H}(\Omega)$
 à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ pour tout
 z dans la composante non bornée de Ω .

Ex 21: voir annexe

Thém 22 (de Cauchy): Soit Ω un ouvert étoilé,
 soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et soit γ un lacet dans Ω .
 Alors on a pour tout $z \in \Omega \setminus \gamma$:

$$\text{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

Application 23 calcul d'intégrales (celle de Dirichlet)
 par exemple

Thém 24 (des résidus): Soit γ un lacet de $\Omega \setminus A$ où A est l'ensemble des pôles de f .
 Alors
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}_a(f) \text{Ind}_\gamma(a)$$

Application 25: Calcul d'intégrales pour des fonctions ayant
 des pôles dans le contour qu'on considère.

I La fonction Gamma Γ

Def 26: $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$ on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

 on appelle cette fonction, la fonction Gamma

Prop 27: $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

Rmq 28: En particulier, comme $\Gamma(1) = 1$
 on a $\Gamma(n) = (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Prop 29: La fonction Γ est holomorphe sur $\mathcal{B}_0 = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0\}$

Prop 30 (Formule des compléments)

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < \text{Re}(z) < 1$$

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Application 31: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Prop 32: La fonction Γ se prolonge en une
 fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Ses pôles sont
 les entiers négatifs et $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{Res}_{-k}(\Gamma) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

 on continuera de noter Γ

Prop 33 (Formule de Gauss) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}^-)$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Prop 34 (Formule de Weierstrass) $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

 γ constante d'Euler

Par la loi Gamma?

III Fonction Zeta de Riemann ζ et Theta de Jacobi Θ

Def 35: $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 1$, on pose

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-z \log(n)}$$

on appelle cette fonction, la fonction Zeta de Riemann

Prop 36: La série converge absolument car $\text{Re}(z) > 1$ et converge normalement sur tout demi plan fermé $\{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) \geq a\}$ où $a > 1$

Prop 37: La fonction ζ est holomorphe sur $B_1 = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 1\}$

Ex 38: Pour z entier strictement positif on a écrit $\zeta(1)$ la série harmonique, $\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ etc...

Thm 39 (lien avec les nombres premiers):

$$\forall z \in B_1, \text{ on a } \zeta(z) = \prod_{p \in P} (1 - p^{-z})^{-1} \quad \text{où } P \text{ est l'ensemble des nombres premiers}$$

Prop 40: $\prod_{p \in P} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} \dots$ et la série converge uniformément sur les demi plan $\{z \in \mathbb{C} \text{ Re}(z) \geq a\}$ ($a > 1$)

Def 41: $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$, on pose

$$\Theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z} \quad \text{fonction Theta de Jacobi}$$

Prop 42: Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f = O(\frac{1}{x^2})$ et $f' = O(\frac{1}{x^2})$ alors $\forall x \in \mathbb{R} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ $\hat{f}$ transformation de Fourier

Thm 43: $\forall u > 0$ $\Theta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \Theta(\frac{1}{u})$

Def 44: $\forall u > 0$, on pose $\Theta_1(u) = \frac{1}{2} (\Theta(u) - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 u}$

Lemme 45: (1) $\forall u > 0$ $\Theta_1(\frac{1}{u}) = \sqrt{u} \Theta_1(u) + \frac{1}{2}(\sqrt{u} - 1)$

(2) il existe $C > 0$ tel que
(a) $\Theta_1(u) \leq C e^{-\pi u} \quad \forall u \geq 1$
(b) $\Theta_1(u) \leq \frac{C}{\sqrt{u}} \quad \forall u \in]0, 1]$

Thm 46: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, on pose

$$\xi(z) = \frac{1}{z(z-1)} + \int_1^{+\infty} \Theta_1(y) (y^{\frac{z}{2}-1} + y^{-\frac{z+1}{2}}) dy$$

qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

et on a $\zeta(z) = \frac{\xi(z) \pi^{\frac{z}{2}}}{\Gamma(\frac{z}{2})} \quad \forall z \text{ tel que } \text{Re}(z) > 1$

Prop 47: La fonction ξ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ avec un pôle simple en 1 de résidu $\text{Res}_1(\xi) = 1$.

Application 48: Les zéros "triviaux" de ξ sont les entiers pairs strictement négatifs ie $\xi(2k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$

Conjecture de Riemann 49: Les autres zéros de ξ sont sur la droite de partie réelle valant $\frac{1}{2}$ verticale

Thm 50 (admis) (Thm des nombres premiers):

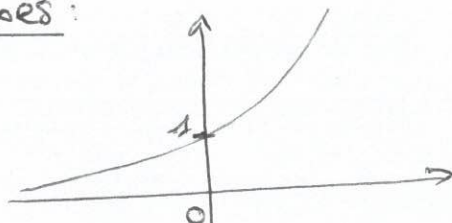
Pour tout $x > 0$, on pose

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \# \{p \in P, p \leq x\}$$

Alors $\pi(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log(x)}$

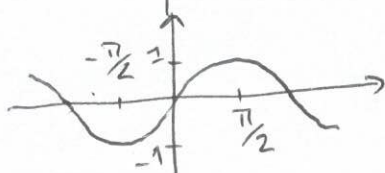
Annexes :

① exp



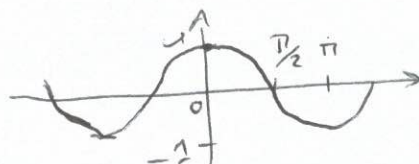
fonction exponentielle
sur $\mathbb{R}$

sin



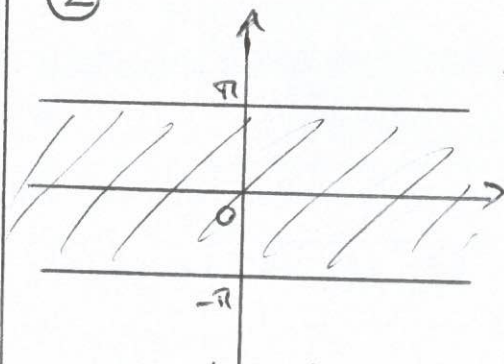
sinus sur $\mathbb{R}$

cos

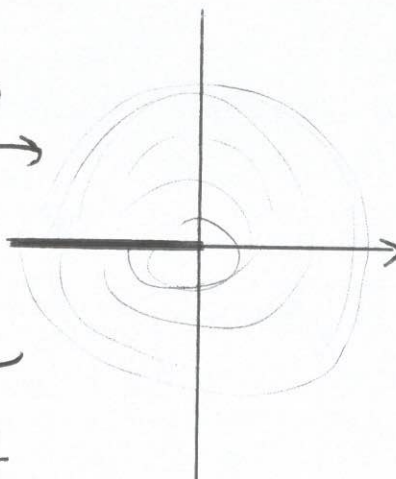


cosinus sur $\mathbb{R}$

②



exp



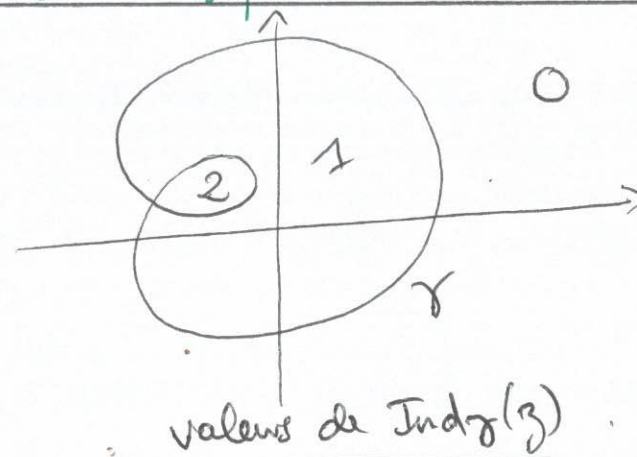
Log

transformations des
domaines complexes

[Amer. Rathsman] p. 80

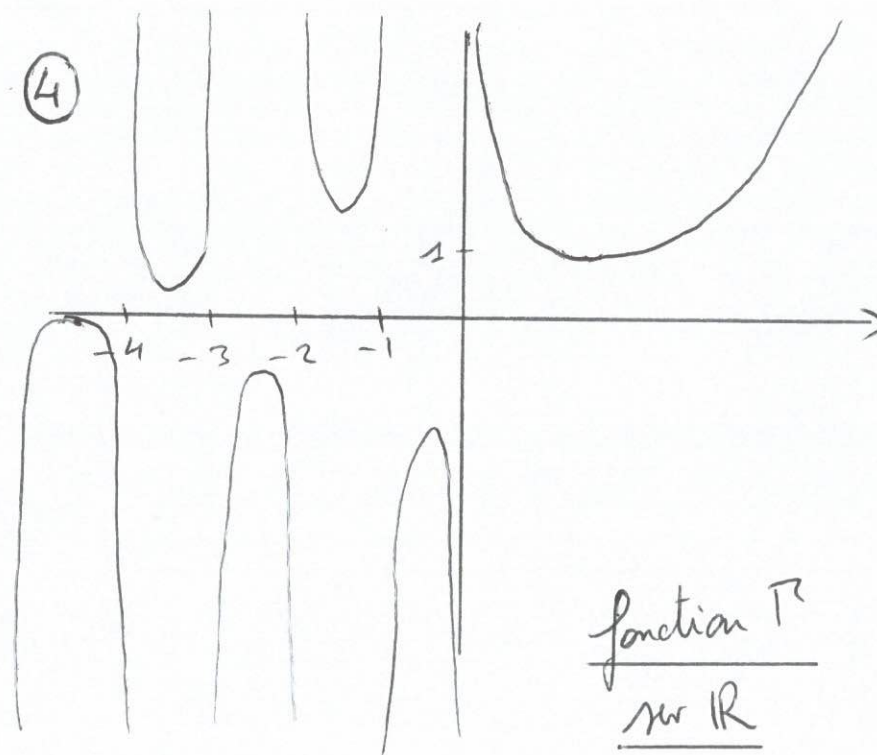
[Jolisraït] p. 43

③



valeurs de Ind γ (z)

④



fonction T^r
sur $\mathbb{R}$

[Groux Soulat] p. 109