916 . Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité . Applications.

* <u>Motivations</u> : Problèmes d'emploi du temps, coloriage d'un graphe

I) <u>Syntaxe</u>.

1) <u>le langage de la logique propositionnelle</u> (LP).

<u>déf 1</u> : L'ensemble des <u>variables propositionnelles</u> est un ensemble de symboles $VAR = \{p, q, r, \dots, p_1, p_2, p_3 \dots\}$

<u>déf 2</u> : Le <u>langage $\mathcal{F}$ de la LP</u> est le langage sur l'alphabet $\Sigma = VAR \cup \{\bot, \neg, \wedge, (,)\}$ défini par induction par :

- $VAR \cup \{\bot\} \subseteq \mathcal{F}$
- $\forall \varphi \in \mathcal{F}$, $\neg \varphi \in \mathcal{F}$
- $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}$

<u>ex 3</u> : $(\neg p \wedge (q \wedge (\neg \bot \wedge p)))$ est une formule de la LP.

<u>thm 4</u> (lecture unique) :
Soit $\varphi \in \mathcal{F}$. Alors un et un seul des trois cas suivants se présente :
(i) $\varphi \in VAR$
(ii) Il existe $\psi \in \mathcal{F}$ tq $\varphi = \neg \psi$
(iii) Il existe $(\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{F}^2$ tq $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$

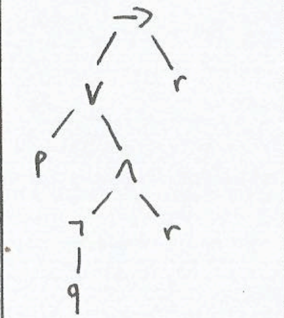
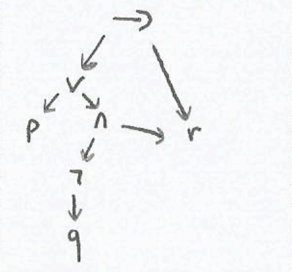
<u>Rq 5</u> : on s'autorisera, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, l'écriture de :

- $(\varphi \vee \psi)$ à la place de $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $(\varphi \to \psi)$ à la place de $(\neg\varphi \vee \psi)$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ à la place de $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$
- $\top$ à la place de $\neg\bot$

<u>ex 6</u> : on considérera donc que ceci est une formule de la LP :

$$\varphi_1 = ((p \vee (\neg q \wedge r)) \to r)$$

2) <u>Représentations</u>

formule (mot)	arbre	DAG
φ_1		

<u>Rq 7</u> : le DAG économise de l'espace en mémoire.

3) <u>Résolution par réfutation</u>.

<u>déf 8</u> : un <u>littéral</u> est une formule de la forme p ou $\neg p$, avec $p \in VAR$. une <u>clause</u> est une disjonction ($\vee$) de littéraux.

<u>déf 9</u> : une formule est sous <u>forme normale conjonctive</u> (CNF) si elle s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\varphi = \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} l_{i,j}}$$

pour I, J finis et $l_{i,j}$ littéral

<u>déf 10</u> : règles de résolution :

coupure $$\frac{(\neg p \vee l_1 \vee \dots \vee l_n) \qquad (p \vee l'_1 \vee \dots \vee l'_m)}{(l_1 \vee \dots \vee l_m \vee l'_1 \vee \dots l'_m)}$$

Redondance $$\frac{l \vee l \vee l_1 \vee \dots \vee l_n}{l \vee l_1 \vee \dots \vee l_n}$$

→ Une <u>dérivation</u> d'une formule φ en CNF vers une formule ψ en CNF est une suite de règles de résolutions à partir de l'ensemble des clauses de φ aboutissant à l'ensemble des clauses de ψ.

déf 11 : Une preuve de la réfutation de $\varphi \in \mathcal{F}$ en FNC est une dérivation de φ à $\bot$.

ex 12 : $\varphi_2 = (((p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p)) \wedge ((q \vee r) \wedge \neg r))$ [cf Annexe]

II] Sémantique

1) Valuation et table de vérité.

déf 13 : une valuation est une fonction $\nu : VAR \longrightarrow \{0,1\}$

prop-déf 14 : Soit $\nu \in \{0,1\}^{VAR}$ une valuation. On étend ν de manière unique en une fonction $\tilde{\nu} : \mathcal{F} \to \{0,1\}$ par :

- $\tilde{\nu}(p) = p$
- $\tilde{\nu}(\neg \phi) = 1 - \tilde{\nu}(\phi)$
- $\tilde{\nu}(\bot) = 0$
- $\tilde{\nu}(\phi \wedge \psi) = \tilde{\nu}(\phi) \times \tilde{\nu}(\psi)$

Rq 15 : On obtient également :

- $\tilde{\nu}(\top) = 1$
- $\tilde{\nu}(\varphi \to \psi) = 1 - \tilde{\nu}(\varphi) + \tilde{\nu}(\varphi)\tilde{\nu}(\psi)$
- $\tilde{\nu}(\varphi \vee \psi) = \tilde{\nu}(\varphi) + \tilde{\nu}(\psi) - \tilde{\nu}(\varphi)\tilde{\nu}(\psi)$
- $\tilde{\nu}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 - \tilde{\nu}(\varphi) - \tilde{\nu}(\psi) + 2\tilde{\nu}(\varphi)\tilde{\nu}(\psi)$

→ Désormais, on note ν et on appelle valuation cette extension.

ex 16 : si $\nu(p) = \nu(q) = \nu(r) = 0$, $\nu(\varphi_1) = 1$ et $\nu(\varphi_2) = 0$.

déf 17 : une table de vérité est un tableau représentant, en colonnes, l'image de toutes les valuations possibles de formules données.

ex 18 : tables de vérité de φ_1 et φ_2 [cf Annexe].

Pb 19 : EVAL (φ, ν)

- Entrée : une formule $\varphi \in \mathcal{F}$ et une valuation $\nu \in \{0,1\}^{VAR}$.
- Sortie : oui si $\nu(\varphi) = 1$; non sinon.

prop 20 : le problème EVAL est décidable en temps linéaire.

2) Validité et satisfiabilité.

déf 21 : une formule φ est valide si pour toute valuation $\nu \in \{0,1\}^{VAR}$, on a : $\nu(\varphi) = 1$.

Un ensemble de formules $\{\varphi_i,\ i \in I\}$ est valide si chaque φ_i est valide.

déf 22 : une formule φ est satisfiable s'il existe une valuation $\nu \in \{0,1\}^{VAR}$ telle que $\nu(\varphi) = 1$.

Un ensemble de formules $\{\varphi_i,\ i \in I\}$ est satisfiable s'il existe une valuation ν telle que $(\forall i \in I,\ \nu(\varphi_i) = 1)$.

On dit insatisfiable dans le cas contraire.

ex 23 : φ_1 est satisfiable mais non valide ; φ_2 est insatisfiable.

prop 24 : $\varphi \in \mathcal{F}$ est valide ssi $\neg\varphi$ est insatisfiable.

déf 25 : deux formules sont équisatisfiables si elles sont toutes les deux satisfiables ou toutes les deux insatisfiables.

thm 26 : (Compacité de la logique propositionnelle)
Un ensemble de formules $E \subseteq \mathcal{F}$ est satisfiable ssi toute partie finie de E est satisfiable.

DEV 1

Application 27 : un graphe G non-orienté est k-colorable ssi tout sous-graphe fini $G' \subseteq G$ est k-colorable.

Application 28 : Soit (H,V) des règles de pavage sur $\mathbb{Z}^2$. Alors $\mathbb{Z}^2$ est (H,V)-pavable ssi pour tout $n \geq 0$, $[-n,n]^2$ est (H,V)-pavable.

3) Équivalence sémantique.

déf 29 : deux formules $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ sont sémantiquement équivalentes si la formule $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ est valide. On notera alors $\varphi \sim \psi$.

ex 30 : (Lois de DE MORGAN)

$\neg(p \vee q) \sim (\neg p \wedge \neg q)$ $\qquad$ $\neg(p \vee q) \sim (\neg p \wedge \neg q)$

prop 31 : deux formules équivalentes sont en particulier équisatisfiables.

4) Lien entre syntaxe et sémantique.

thm 32 : (complétude du calcul propositionnel). Soit $\varphi \in \mathcal{F}$ sous CNF.

Il existe une preuve de la réfutation de φ. $\xLeftarrow{\text{complétude}}$ $\xRightarrow[\text{correction}]{}$ φ est insatisfiable.

III) Satisfiabilité et formes normales.

Pb 33 : SAT (φ)

{ Entrée : une formule $\varphi \in \mathcal{F}$.
{ Sortie : oui si φ est satisfiable (et une valuation v tq $v(\varphi)=1$) ; non sinon.

thm 34 : (Cook, 1971) le problème SAT est NP-complet. — DEV 2

1) Mise sous forme normale conjonctive.

Pb 35 : CNF_SAT (φ)

{ Entrée : une formule $\varphi \in \mathcal{F}$ sous CNF
{ Sortie : oui si φ est satisfiable (et $v \in \{0,1\}^{VAL}$ tq $v(\varphi)=1$) ; non sinon.

thm 36 : Pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}$, il existe une formule $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}$ en CNF sémantiquement équivalente à φ ($\tilde{\varphi} \sim \varphi$). La transformation est exponentielle.

ex 37 : $(\neg p \to \neg q) \to (p \to q) \sim \neg(\neg\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)$
$\sim (\neg\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg p \vee q)$
$\sim (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$
$\sim (\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q)$

Cor 38 : le thm 32 est vrai pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}$.

thm 39 (Algorithme de Tseitin) : pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}$, il existe une formule $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}$ en CNF tq φ et $\tilde{\varphi}$ sont équisatisfiables. De plus, la transformation $tr : \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ est calculable en temps linéaire. — DEV 3

Corollaire 40 : le problème CNF SAT est NP-complet.

Pb 41 : 3CNF_SAT(φ)

{ Entrée : $\varphi \in \mathcal{F}$ en CNF avec au plus 3 littéraux par clause.
{ Sortie : oui si φ est satisfiable (v tq $v(\varphi)=1$) ; non sinon.

Thm 42 : Il existe une réduction polynômiale de CNF_SAT à 3CNF_SAT.

Corollaire 43 : le problème 3CNF_SAT est NP-complet.

pb 44 : 2CNF_SAT

{ Entrée : $\varphi \in \mathcal{F}$ sous CNF avec au plus deux littéraux par clause.
{ Sortie : oui si φ est satisfiable (v tq $v(\varphi)=1$) ; non sinon.

thm 45 : le problème 2CNF_SAT est décidable en temps polynomial.

Corollaire 46 : Il n'existe pas de réduction polynomiale du problème 3CNF-SAT au problème 2CNF_SAT.

2) D'autres formes normales à la rescousse !

déf 47 : une formule est sous forme normale disjonctive (DNF) si elle s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\varphi = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} p_{i,j}}$$

pour I, J finis et $p_{i,j}$ littéraux

Pb 48 : DNF_SAT(φ)

{ Entrée : $\varphi \in \mathcal{F}$ sous DNF
{ Sortie : oui si φ est satisfiable (v tq $v(\varphi)=1$) ; non sinon.

thm 49 : le problème DNF_SAT est calculable en temps linéaire.

prop 50 : Toute formule $\varphi \in \mathcal{F}$ est sémantiquement équivalente à une formule $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}$ sous DNF (il suffit de lire sa table de vérité).

Rq 51 : D'après le théorème de Cook, cette transformation ne peut pas être polynomiale. De plus, le thm 49 assure qu'il n'existe pas d'algorithme calculant en temps polynomial une transformation $tr : \varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ tq φ et $\tilde{\varphi}$ soient équisatisfiables et $\tilde{\varphi}$ soit sous DNF.

déf 52 : une clause de Horn est une clause $l_1 \vee \dots \vee l_n$ où apparaît au plus un littéral positif $l_i = p \in VAR$ ($\forall j \neq i$, $l_j = \neg q, q \in VAR$)

Pb 53 : HORN_SAT (φ)

{ Entrée : $\varphi \in \mathcal{F}$ sous CNF avec uniquement des clauses de Horn.
{ Sortie : oui si φ est satisfiable (v tq $v(\varphi)=1$) ; non sinon.

thm 54 : le problème HORN-SAT est décidable en temps linéaire.

ex 55 : la formule suivante est satisfiable pour la valuation $\begin{cases} p \to 0 \\ q \to 1 \\ r \to 0 \end{cases}$

$$\varphi_3 = \underbrace{(p \vee \neg q \vee \neg r)}_{\text{clause de Horn stricte}} \wedge \underbrace{(q)}_{\text{positive}} \wedge \underbrace{(\neg p \vee \neg q)}_{\text{négative}}$$

ANNEXE

ex 12 : $\varphi_2 = (((p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p)) \wedge ((q \vee r) \wedge \neg r))$

$$\frac{(R)\ \dfrac{(F)\ \dfrac{(F)\ \dfrac{p \vee \neg q \qquad r \vee \neg p}{\neg q \vee r} \qquad q \vee r}{r \vee r}}{r} \qquad \neg r}{\bot}\ (F)$$

ex 18 :

p	q	r	$\varphi_1 = ((p \vee (\neg q \wedge r)) \to r$	$\varphi_2 = (((p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p)) \wedge ((q \vee r) \wedge \neg r))$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0