

Exercice 1. Soit E un ensemble et V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

1. On suppose qu'il existe une application $f : E \times E \rightarrow V$ vérifiant:

$$\forall A, B, C \in E, f(A, B) = f(A, C) + f(C, B) \quad (\text{relation de Chasles}); \quad (1)$$

$$\forall A \in E, f_A : \begin{array}{l} E \rightarrow V \\ M \mapsto f_A(M) = f(A, M) \end{array} \quad \text{est bijective.} \quad (2)$$

Montrer que E est un espace affine sur (ou dirigé par) V .

Réponse. Définissons l'application $+ : E \times V \rightarrow E$ définie par:

$$(A, \vec{u}) \mapsto A + \vec{u} = f_A^{-1}(\vec{u}). \quad (3)$$

Montrons que $+$ est une loi de composition externe vérifiant les axiomes de définition d'un espace affine.

- On remarque d'abord que, grâce à l'hypothèse (2), $+$ est bien définie pour tout $(A, \vec{u}) \in E \times \vec{E}$.
- $\forall A \in E, A + \vec{0} = A$?

Par définition de $+$:

$$A + \vec{0} = f_A^{-1}(\vec{0})$$

On a $f_A^{-1}(\vec{0}) = A$. En effet, d'après (1):

$$f(A, A) = f(A, A) + f(A, A).$$

On en déduit que $f_A(A) = f(A, A) = \vec{0}$ puis que $f_A^{-1}(\vec{0}) = A$.

- $\forall (A, \vec{u}, \vec{v}) \in E \times V \times V, (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + \vec{u} + \vec{v}$?

On a:

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = f_A^{-1}(\vec{u}) + \vec{v}$$

et

$$A + (\vec{u} + \vec{v}) = f_A^{-1}(\vec{u} + \vec{v}).$$

Il faut donc montrer que

$$f_A^{-1}(\vec{u}) + \vec{v} = f_A^{-1}(\vec{u} + \vec{v}). \quad (4)$$

Posons $B = f_A^{-1}(\vec{u})$ et $C = f_A^{-1}(\vec{u} + \vec{v})$. Alors l'égalité (4) à démontrer devient:

$$B + \vec{v} = C \quad (\Leftrightarrow C = f_B^{-1}(\vec{v})).$$

Or:

$$f_A(B) = f(A, B) = \vec{u}; \quad f_A(C) = f(A, C) = \vec{u} + \vec{v}.$$

L'hypothèse (1) permet d'écrire:

$$\vec{u} + \vec{v} = f_A(C) = f(A, C) = f(A, B) + f(B, C) = \vec{u} + f_B(C).$$

D'où $f_B(C) = \vec{v}$ puis $C = f_B^{-1}(\vec{v})$.

- $\forall (A, B) \in E \times E, \exists! \vec{u} \in V : B = A + \vec{u}$?

Cette propriété est équivalente à la suivante: pour tout $A \in E, f_A^{-1}$ est une bijection de V dans E .

Cette dernière propriété est l'hypothèse (2). ■

2. Montrer que, réciproquement, si E est un espace affine dirigé par un espace vectoriel V , il existe une application $f : E \times E \rightarrow V$ vérifiant (1) et (2).

Réponse. On définit $f : E \times E \rightarrow V$ par:

$$f(A, B) = \vec{u}$$

où \vec{u} est l'unique vecteur tel que $B = A + \vec{u}$. Montrons que f vérifie (1) et (2).

- $\forall A, B, C \in E, f(A, B) = f(A, C) + f(C, B)$?

On pose $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$ et $B = C + \vec{w}$. On a, d'une part:

$$B = A + \vec{u}$$

et, d'autre part:

$$B = C + \vec{w} = (A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w}).$$

Par unicité, on obtient donc la relation $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ qui, par définition de f , s'écrit

$$f(A, B) = f(A, C) + f(C, B).$$

- $\forall A \in E$, l'application $f_A : E \rightarrow V$, définie par $f_A(M) = f(A, M)$, est bijective?

On veut donc montrer que:

$$\forall A \in E, \forall \vec{u} \in V, \exists ! M \in E : f_A(M) = \vec{u}$$

Soient $A \in E$ et $\vec{u} \in V$. Posons $M = A + \vec{u}$. Par définition de f , on a:

$$f_A(M) = f(A, M) = \vec{u}.$$

f_A est donc surjective. Elle est également injective. En effet, si $f_A(M) = f_A(N)$ alors

$$(M = A + f_A(M), N = A + f_A(N) = A + f_A(M)) \Rightarrow M = N.$$

■

Exercice 2. Soit E l'ensemble des polynômes unitaires de degré égal à $n \geq 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\vec{E} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

1. Justifier que, pour l'addition et la multiplication par un scalaire des polynômes, E n'est pas un espace vectoriel sur \mathbb{R} et que \vec{E} est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

Réponse. On sait déjà que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour l'addition et la multiplication par un scalaire des polynômes et que $E \subset \mathbb{R}[X]$. Le polynôme $\mathbf{0}$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbf{0} \notin E$. Donc E n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

On peut aussi remarquer que si $P \in E$ alors $P(X) - X^n$ est un polynôme de degré $n - 1$: il n'est donc pas dans E et l'addition n'est pas stable dans E .

On peut vérifier que \vec{E} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $\{\mathbf{1}, X, \dots, X^{n-1}\}$ et que cette famille est libre. Donc $\dim \vec{E} = n$. ■

2. Montrer que E est un espace affine dirigé par \vec{E} pour la loi externe $f : E \times \vec{E} \rightarrow E$ définie par $f(P(X), Q(X)) = P(X) + Q(X) \in E$.

Réponse. On peut écrire que tout élément $P \in E$ s'écrit

$$P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Par conséquent si $P_0(X) = X^n$, on peut écrire que

$$E = P_0 + \vec{E}.$$

Il s'ensuit que E est espace affine dirigé par \vec{E} . ■

Exercice 3. Soient \vec{V} et \vec{W} deux espaces vectoriels et $f : \vec{V} \rightarrow \vec{W}$ une application linéaire. Soit $\vec{w}_0 \in \text{Im}(f)$ et $E = f^{-1}(\{\vec{w}_0\})$. Montrer que E est un espace affine de direction $\vec{E} = \text{Ker}(f)$ pour la loi externe donnée par l'addition des vecteurs dans \vec{V} .

Comment appliquer le résultat précédent à $E = \left\{ g \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \int_0^1 g(x) dx = 1 \right\}$?

Réponse. Par définition:

$$E = f^{-1}(\{\vec{w}_0\}) = \left\{ \vec{u} \in \vec{V} : f(\vec{u}) = \vec{w}_0 \right\}$$

On note d'abord que

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E, \left(f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0} = f(\vec{u} - \vec{v}) \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in \text{Ker}(f) \right)$$

Soit $\vec{u}_0 \in E$ et montrons que

$$E = \vec{u}_0 + \text{Ker}(f)$$

On a $E \subset \vec{u}_0 + \text{Ker}(f)$ car

$$\vec{u} \in E \Rightarrow \vec{u} = \vec{u}_0 + \underbrace{\vec{u} - \vec{u}_0}_{\in \text{Ker}(f)}$$

On a également $\vec{u}_0 + \text{Ker}(f) \subset E$ car

$$\begin{aligned} \vec{u} \in \vec{u}_0 + \text{Ker}(f) &\Rightarrow \exists \vec{v} \in \text{Ker}(f) : \vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{v} \\ &\Rightarrow f(\vec{u}) = f(\vec{u}_0) + f(\vec{v}) = f(\vec{u}_0) = \vec{w}_0. \end{aligned}$$

Donc $E = \vec{u}_0 + \text{Ker}(f)$ et E est donc un espace affine dirigé par $\text{Ker}(f)$. ■

Exercice 4. Soit $(E, \vec{E}, +)$ un espace affine dirigé par \vec{E} pour la loi externe et $A \in E$ un point fixé. On munit E des lois $+_A$ et \cdot_A définies par:

$$\begin{aligned} \forall (M, N) \in E \times E, M +_A N &= A + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}, \\ \forall (M, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, \lambda \cdot_A M &= A + \lambda \overrightarrow{AM}. \end{aligned}$$

On note E_A l'espace E muni de ces deux lois.

1. Montrer que E_A est un espace vectoriel. (E_A est appelé le *vectorialisé de l'espace affine E au point A*).

Réponse.

- Montrons que $(E_A, +_A)$ est un groupe abélien.
 - $+_A$ est une loi interne puisque E est un espace affine. On note aussi que si $P = M +_A N$, cela revient à dire que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$
 - $+_A$ est **associative**. En effet, pour tout $(M, N, O) \in E_A^3$, on veut montrer que:

$$(M +_A N) +_A O = M +_A (N +_A O)$$

Posons:

$$\begin{aligned} R &= (M +_A N) +_A O \\ R' &= M +_A (N +_A O) \end{aligned}$$

On veut donc établir que $R = R'$. Posons:

$$P = M +_A N, Q = N +_A O$$

Alors

$$\begin{aligned} (M +_A N) +_A O &= P +_A O = R \Leftrightarrow \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AO} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AO} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M +_A (N +_A O) &= M +_A Q = R' \Leftrightarrow \overrightarrow{AR'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AQ} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AR'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AO} \end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AR'} \Leftrightarrow R = R'.$$

– **Élément neutre.** On cherche $N \in E_A = E$ tel que

$$\forall M \in E_A, M +_A N = M$$

Or

$$M +_A N = M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \vec{0} \Leftrightarrow N = A.$$

Donc A est l'élément neutre.

– **Élément symétrique.** Pour tout $M \in E$, on cherche $S \in E$ tel que

$$M +_A S = A \Leftrightarrow \vec{0} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AS} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow S = A - \overrightarrow{AM}$$

– $+_A$ est **commutative.** On veut donc montrer que

$$\forall (M, N) \in E \times E, M +_A N = N +_A M$$

En posant $P = M +_A N$ et $Q = N +_A M$, cela revient à montrer que $P = Q$. Or:

$$\begin{aligned} P &= M +_A N \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ Q &= N +_A M \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

Donc $P = Q$.

- L'écriture $\forall (M, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, \lambda \cdot_A M = A + \lambda \overrightarrow{AM}$ revient à dire que si $N = \lambda \cdot_A M$ alors $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AM}$. On peut alors vérifier que la loi externe \cdot_A vérifie les axiomes définissant un espace vectoriel. ■

2. Montrer que l'application $f : \overrightarrow{E} \rightarrow E_A$ définie par

$$f(\overrightarrow{v}) = A + \overrightarrow{v}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Réponse. Il faut donc montrer que f est une application linéaire et bijective de \overrightarrow{E} dans E_A .

- f est **bijective**? Il faut montrer que:

$$\forall M \in E, \exists! \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} : f(\overrightarrow{v}) = M.$$

Or

$$f(\overrightarrow{v}) = M \Leftrightarrow A + \overrightarrow{v} = M \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AM}.$$

Donc f est bijective.

- f est **linéaire**? Il faut montrer que:

$$\forall (\lambda, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in K \times E \times E, f(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) +_A \lambda \cdot_A f(\overrightarrow{v})$$

Posons $M = f(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) = A + \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}$, $N = f(\overrightarrow{u})$, $O = f(\overrightarrow{v})$, $P = \lambda \cdot_A O$. On a, avec ces notations:

$$M = f(\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}.$$

Et:

$$f(\overrightarrow{u}) +_A \lambda \cdot_A f(\overrightarrow{v}) = N +_A P := M'$$

On veut établir que $M = M'$. Or

$$N +_A P = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}$$

Mais

$$P = \lambda \cdot_A O \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AO}$$

Donc

$$\begin{aligned} N +_A P &= M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AN} + \lambda \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow M = M'. \end{aligned}$$

■

Exercice 5. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces affines de E . À quelle condition $E_1 \cup E_2$ est-il un sous-espace affine de E ? (Ind.: on pourra considérer les cas $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$).

Réponse. On utilise la Définition 1.16 et les Exemples 1.17 page 15 du cours: un sous-espace affine contient tous les sous-espaces affines engendrés par ses sous-ensembles (en particulier, toute droite passant par deux de ses points).

Si $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$ alors $E_1 \cup E_2 = E_2$ ou $E_1 \cup E_2 = E_1$ est un sous-espace affine. Montrons que la réciproque est vraie: si $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace affine alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Par l'absurde: supposons que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace affine de E et que $(E_1 \not\subset E_2 \text{ et } E_2 \not\subset E_1)$.

Si $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace affine de E alors il est dirigé par un sous-espace vectoriel \vec{V} de \vec{E} .

D'autre part, si $(E_1 \not\subset E_2 \text{ et } E_2 \not\subset E_1)$, il existe $A_2 \in E_2 \setminus E_1$ et $A_1 \in E_1 \setminus E_2$. La droite $(A_1 A_2)$ est contenue dans $E_1 \cup E_2$ car $A_1 \in E_1 \cup E_2$ et, par hypothèse, $\overrightarrow{A_1 A_2} \in \vec{V}$.

Soit $I \in (A_1 A_2) \setminus \{A_1, A_2\}$. Alors $I \in E_1 \cup E_2$.

- Si $I \in E_1$, la droite $(A_1 I)$ est dans E_1 (puisque $A_1, I \in E_1$) et comme $A_2 \in (A_1 A_2) = (A_1 I)$, il s'ensuit que $A_2 \in E_1$. Ceci contredit l'hypothèse $A_2 \in E_2 \setminus E_1$.
- Si $I \in E_2$, alors la droite $(A_2 I)$ est dans E_2 et comme $A_1 \in (A_1 A_2) = (A_2 I)$, il s'ensuit que $A_1 \in E_2$. Ceci contredit l'hypothèse $A_1 \in E_1 \setminus E_2$.

Dans les deux cas, on aboutit donc à une contradiction. Par conséquent $(E_1 \subset E_2 \text{ ou } E_2 \subset E_1)$.

En conclusion, on vient d'établir que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace affine si, et seulement si, $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$. \square

Exercice 6. (Théorème du toit) On suppose que E est un espace affine de dimension 3 et que D_1 et D_2 sont deux droites affines distinctes et parallèles de E et P_1 et P_2 deux plans affines distincts de E tels que $D_1 \subset P_1$ et $D_2 \subset P_2$.

1. Montrer que $P_1 \cap P_2$ est soit vide, soit une droite affine.

Réponse. (C'est le théorème 1.22, p. 18 du cours). Si $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$, alors P_1 et P_2 sont parallèles et, comme ils sont distincts, on a $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Si $\vec{P}_1 \neq \vec{P}_2$, alors

$$\dim(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \dim(\vec{P}_1) + \dim(\vec{P}_2) - \dim(\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2) = 4 - \dim(\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2).$$

Comme $\dim(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) \leq \dim(\vec{E}) = 3$, on obtient que $1 \leq \dim(\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2) \leq 2$. L'égalité $\dim(\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2) = 2$ impliquerait que $\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2 = \vec{P}_1 = \vec{P}_2$ qui contredirait l'hypothèse. Donc $\dim(\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2) = 1$ et $\dim(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = 3$. On en déduit que $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{E}$ et la proposition 1.21, p. 18 du cours implique $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ et $P_1 \cap P_2$ est une droite affine puisque dirigé par $\vec{P}_1 \cap \vec{P}_2$ qui est de dimension 1. \blacksquare

2. Montrer que si P_1 et P_2 sont sécants alors $P_1 \cap P_2$ est une droite parallèle à D_1 et D_2 .

Réponse. Soient $D = P_1 \cap P_2$ et \vec{d} son vecteur directeur, \vec{d}_1 et \vec{d}_2 les vecteurs directeurs respectifs de D_1 et D_2 . On a $\vec{d} \in \overrightarrow{P_1 \cap P_2} = \vec{P}_1 \cap \vec{P}_2$ et, par hypothèse, \vec{d}_1 et \vec{d}_2 sont colinéaires. Si $D_1 \not\parallel D$ alors $D_2 \not\parallel D$ et on en déduit que \vec{d} et \vec{d}_1 sont linéairement indépendants et de même pour \vec{d} et \vec{d}_2 . Il s'ensuit que

$$\vec{P}_1 = \text{Vect}(\vec{d}, \vec{d}_1) = \text{Vect}(\vec{d}, \vec{d}_2) = \vec{P}_2.$$

Par conséquent, $P_1 \parallel P_2$ et comme $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, on conclut que $P_1 = P_2$. Mais ceci contredit l'hypothèse sur P_1 et P_2 . Donc \vec{d} et \vec{d}_1 sont colinéaires et il en découle que $P_1 \cap P_2$ est une droite parallèle à D_1 et D_2 . \blacksquare

Exercice 7. Dans le plan affine E , étant donné un entier naturel $n \geq 3$, on trace n droites de sorte qu'il n'existe pas parmi elles deux droites parallèles ni trois droites concourantes.

Déterminer le nombre de triangles délimités par ces droites.

Réponse. Trois droites quelconques parmi les n droites délimitent un triangle car, par hypothèse, deux d'entre-elles se coupent et les trois ne sont pas concourantes. Par conséquent, le nombre N de triangles est le nombre de façons de choisir 3 droites parmi les n :

$$N = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}.$$

■

Exercice 8. On suppose que E est un espace affine de dimension 3 et soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de E .

1. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces affines de E ?

$$\begin{aligned} F &= \{M = (x, y, z) \in E, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ H &= \left\{M = (x, y, z) \in E, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}\right\}. \end{aligned}$$

Réponse. On utilise de nouveau qu'un sous-espace affine contient tous les sous-espaces affines engendrés par ses sous-ensembles, en particulier toute droite passant par deux de ses points (voir Définition 1.16 et Exemples 1.17 page 15 du cours).

- F n'est pas un sous-espace affine. En effet, les points $A = (1, 0, 0)$ et $B = (-1, 0, 0)$ appartiennent à F mais la droite $D = A + \text{Vect}(\overrightarrow{AB})$ n'est pas dans F puisque $O \in D$ mais $O \notin F$ (on peut même vérifier qu'aucun point de la droite, à part A et B , n'est dans F).
- H est un sous-espace affine. En effet, pour tout $M = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \\ &\Downarrow \\ x^2 + y^2 + z^2 &= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ &\Downarrow \\ 2x + 2y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

Donc

$$H = \{M = (x, y, z) \in E, x + y + z = 3/2\}.$$

D'après la proposition 1.33, p.25 du cours, H est un plan (un hyperplan en dimension 3). ■

2. Déterminer une équation cartésienne du sous-espace affine F de E contenant le point A de coordonnées $(1, 0, 1)$ et dirigé par le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (0, 2, 1)$ et $\vec{v} = (1, -1, 0)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \overrightarrow{E} .

Réponse. On vérifie immédiatement que \vec{u} et \vec{v} sont linéairement indépendants. F est donc un plan de E . On a:

$$\begin{aligned} M &= (x, y, z) \in F \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{K}, M = A + t\vec{u} + s\vec{v} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2t - s \\ z = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow x + y - 2z = -1. \end{aligned}$$

L'équation cartésienne de F est donc $x + y - 2z = -1$. ■

3. Déterminer une équation cartésienne du sous-espace affine P de dimension 2, parallèle à F et contenant le point $B = (0, 1, 0)$.

Réponse. L'équation de P est de la forme $x + y - 2z = a$ et, comme $B \in P$, $a = 1$. Donc $x + y - 2z = 1$ est l'équation cartésienne de P . ■

4. Déterminer une équation cartésienne du sous-espace affine Q de dimension 2, parallèle à F et contenant le milieu des points A et B .

Réponse. Trouver les coordonnées du milieu de A et B et procéder comme dans la question précédente. ■

Exercice 9. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $E = \mathbb{K}^n$ muni d'un repère $(O; \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n)$.

1. Soit $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que l'ensemble $H = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in E : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\}$ est un hyperplan de E si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Réponse. La matrice ligne (a_1, \dots, a_n) est la représentation d'une forme linéaire ℓ dans la base $(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n)$:

$$\forall \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \ell(\vec{u}) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

On pose:

$$\vec{V} = \ker(\ell) = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{K}^n, \ell(\vec{u}) = \vec{0} \right\}.$$

Soit $k \in [1, n]$ tel que $a_k \neq 0$. Le point $A = \left(0, \dots, \underbrace{\frac{b}{a_k}}_{=k\text{ème coord.}}, \dots, 0 \right) \in H$ et on peut écrire (vérifier!):

$$H = A + \vec{V}.$$

Par conséquent, H est un sous-espace affine dirigé par \vec{V} qui est de dimension $n - 1$ (noyau d'une forme linéaire): il est donc un hyperplan de E . □

2. À quelles conditions les deux équations

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad \text{et} \quad a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = b'$$

décrivent-elles des hyperplans parallèles de E ?

Réponse. Les deux équations décrivent des hyperplans si et seulement si $(a_1, \dots, a_n), (a'_1, \dots, a'_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Si on note ℓ et ℓ' les formes linéaires de matrices lignes (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) respectivement, les deux hyperplans sont parallèles si, et seulement si:

$$\ker(\ell) = \ker(\ell').$$

D'après le cours d'algèbre linéaire, l'égalité des noyaux a lieu si, et seulement si, les vecteurs (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) de \vec{E}^* (dual de \vec{E}) sont colinéaires, c'est-à-dire:

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} : (a_1, \dots, a_n) = \lambda (a'_1, \dots, a'_n).$$

□

Exercice 10. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $E = \mathbb{K}^3$ muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $a_i, b_i, c_i, d_i, a'_i, b'_i, c'_i, d'_i \in \mathbb{K}$ pour $i = 1, 2$.

1. À quelles conditions les deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases},$$

décrivent-ils

(a) des droites affines de E ?

Réponse. Il suffit de donner la réponse pour le premier système par exemple. Si, pour $m = 1$ ou 2 , ℓ_m désigne la forme linéaire sur \vec{E} représentée par la matrice ligne (a_m, b_m, c_m) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors le système décrit une droite affine si, et seulement si, ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes, donc si, et seulement si, les vecteurs $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants. En effet, dans ce cas, c'est une conséquence de la question 1 de l'exercice 6. ■

(b) des droites affines parallèles de E ? la même droite affine de E ?

Réponse. Pour $m = 1, 2$, soient ℓ_m et ℓ'_m les formes linéaires représentées respectivement par les matrices (a_m, b_m, c_m) et (a'_m, b'_m, c'_m) .

Les deux systèmes décrivent des droites affines parallèles de E si, et seulement si:

- ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes et ℓ'_1 et ℓ'_2 également (c'est la condition nécessaire et suffisante pour que chaque système représente une droite d'après la question précédente).
- $\ker(\ell_1) \cap \ker(\ell_2) = \ker(\ell'_1) \cap \ker(\ell'_2)$ (les droites doivent être dirigées par le même sous-espace vectoriel). Cette condition est équivalente au fait que ℓ'_1 et ℓ'_2 sont des combinaisons linéaires de ℓ_1 et ℓ_2 :

$$\ell'_1 = \alpha\ell_1 + \beta\ell_2, \quad \ell'_2 = \alpha'\ell_1 + \beta'\ell_2 \quad (5)$$

Les deux systèmes décrivent la même droite affine de E si, et seulement si, les conditions précédentes sont satisfaites et:

$$(a'_m, b'_m, c'_m, d'_m) \in \text{Vect}((a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2)), \quad m = 1, 2.$$

■

(c) des droites affines concourantes de E ?

Réponse. Les deux systèmes décrivent des droites affines concourantes de E si, et seulement si:

- ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes et ℓ'_1 et ℓ'_2 également (c'est la condition nécessaire et suffisante pour que chaque système représente une droite d'après la question précédente).
- $(\ker(\ell_1) \cap \ker(\ell_2)) \neq (\ker(\ell'_1) \cap \ker(\ell'_2))$ (les droites ne sont pas parallèles) et le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

admet une solution.

■

2. Lorsque le premier système décrit une droite affine, donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

Réponse. Le premier système décrit une droite affine si les formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes. Cela est équivalent au fait que la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ est alors inversible et le système s'écrit:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ \Downarrow & \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - z A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

un système d'équations paramétriques de cette droite est alors:

$$\begin{cases} x = b_1 + v_1 t \\ y = b_2 + v_2 t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{K}.$$

■

Dans les exercices qui suivent, *sauf mention du contraire, le corps \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel \vec{E} sur \mathbb{K} .*

Exercice 1. Soient A, B, C et D quatre points d'un espace affine réel E . Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $A_\alpha = \alpha A + (1 - \alpha)B$ et $C_\alpha = \alpha C + (1 - \alpha)D$.

1. Quel est le lieu des points A_α lorsque α parcourt \mathbb{R} ? Même question avec C_α .

Réponse. Une propriété des barycentres donne

$$\overrightarrow{AA_\alpha} = (1 - \alpha)\overrightarrow{AB}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc le lieu des points A_α lorsque α parcourt \mathbb{R} , qui est $\{\alpha A + (1 - \alpha)B, \alpha \in \mathbb{R}\}$, est la droite passant par A et dirigée par \overrightarrow{AB} . C'est donc la droite (AB) .

De la même manière, le lieu des points C_α lorsque α parcourt \mathbb{R} est la droite (CD) . ■

2. On désigne par M_α le milieu de $[A_\alpha; C_\alpha]$. Décrire le lieu des points M_α lorsque α parcourt \mathbb{R} ?

Réponse. On utilise, dans la solution proposée, les propriétés d'associativité et commutativité du barycentre d'un système de points.

On a, pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \text{Bar} \left(\left(A_\alpha, \frac{1}{2} \right), \left(C_\alpha, \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \text{Bar} \left(\left(\text{Bar}((A, \alpha), (B, 1 - \alpha)), \frac{1}{2} \right), \left(\text{Bar}((C, \alpha), (D, 1 - \alpha)), \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \text{Bar} \left(\left(A, \frac{\alpha}{2} \right), \left(B, \frac{1 - \alpha}{2} \right), \left(C, \frac{\alpha}{2} \right), \left(D, \frac{1 - \alpha}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

par la propriété d'associativité du barycentre. Désignons par I le milieu de $[AB]$ et par J le milieu de $[CD]$. Les propriétés de commutativité et d'associativité donnent alors:

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \text{Bar} \left(\left(A, \frac{\alpha}{2} \right), \left(C, \frac{\alpha}{2} \right), \left(B, \frac{1 - \alpha}{2} \right), \left(D, \frac{1 - \alpha}{2} \right) \right) \quad (\text{commutativité}) \\ &= \text{Bar} \left(\left(\text{Bar} \left(\left(A, \frac{\alpha}{2} \right), \left(C, \frac{\alpha}{2} \right) \right), \alpha \right), \left(\text{Bar} \left(\left(B, \frac{1 - \alpha}{2} \right), \left(D, \frac{1 - \alpha}{2} \right) \right), 1 - \alpha \right) \right) \\ &\quad (\text{associativité}) \\ &= \text{Bar}((I, \alpha), (J, 1 - \alpha)) \end{aligned}$$

Comme dans la question précédente, on conclut que le lieu des points M_α lorsque α parcourt \mathbb{R} est la droite (IJ) . ■

Exercice 2. Soit ABC un triangle non aplati du plan affine réel E . Soient R et Q les points de coordonnées respectives $(1/4; 0)$ et $(0; 1/3)$ dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

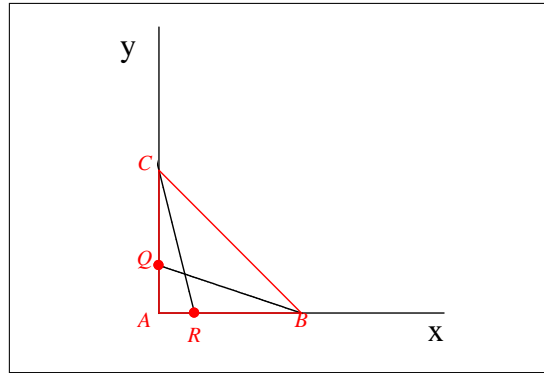
Montrer que les droites (RC) et (BQ) sont concourantes et donner les coordonnées barycentriques de leur point d'intersection dans le repère affine $(A; B; C)$.

Réponse. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, l'équation de la droite (RC) est

$$y = -4 \left(x - \frac{1}{4} \right) = -4x + 1,$$

et celle de la droite (BQ) est:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$



Les coordonnées du point d'intersection I sont $(x = \frac{2}{11}, y = \frac{3}{11})$ et ses coordonnées barycentriques sont $(1 - x, x, y) = (\frac{6}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11})$. ■

Exercice 3. Soit E un espace affine réel de dimension 3 et A, B, C et D quatre points non coplanaires de E . On note G l'isobarycentre de (A, B, C, D) , G_D celui de (A, B, C) , G_C celui de (A, B, D) , G_B celui de (A, C, D) et en fin G_A celui de (B, C, D) .

Les droites (AG_A) , (BG_B) , (CG_C) et (DG_D) sont-elles concourantes? (Si oui, quel est leur point de concours).

Réponse. On a:

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar} \left(\left(A, \frac{1}{4} \right), \left(B, \frac{1}{4} \right), \left(C, \frac{1}{4} \right), \left(D, \frac{1}{4} \right) \right), \\ G_D &= \text{Bar} \left(\left(A, \frac{1}{3} \right), \left(B, \frac{1}{3} \right), \left(C, \frac{1}{3} \right) \right) \\ G_C &= \text{Bar} \left(\left(A, \frac{1}{3} \right), \left(B, \frac{1}{3} \right), \left(D, \frac{1}{3} \right) \right) \\ G_B &= \text{Bar} \left(\left(A, \frac{1}{3} \right), \left(C, \frac{1}{3} \right), \left(D, \frac{1}{3} \right) \right) \\ G_A &= \text{Bar} \left(\left(B, \frac{1}{3} \right), \left(C, \frac{1}{3} \right), \left(D, \frac{1}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

Par utilisation répétée de la propriété d'associativité du barycentre, on a

$$G = \text{Bar} \left(\left(A, \frac{1}{4} \right), \text{Bar} \left(G_A, \frac{3}{4} \right) \right) \Rightarrow G \in (AG_A).$$

De la même manière, on montrerait que G appartient à chacune des droites (BG_B) , (CG_C) et (DG_D) . Donc G est le point de concours des droites (AG_A) , (BG_B) , (CG_C) et (DG_D) . ■

Exercice 4. Soient (A_1, \dots, A_{n+1}) un repère affine de E et B_1, \dots, B_{n+1} une famille de $n+1$ points de E . Pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$, notons $\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{n+1,j}$ les coordonnées barycentriques du point B_j dans le repère affine.

Alors (B_1, \dots, B_{n+1}) est un repère affine de E si, et seulement si,

$$\det \left((\lambda_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1} \right) \neq 0.$$

Réponse. Cela revient à démontrer que:

$$(B_1, \dots, B_{n+1}) \text{ liée} \Leftrightarrow \det \left((\lambda_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1} \right) = 0.$$

Par définition, la famille de points (B_1, \dots, B_{n+1}) est liée si la famille de vecteurs $(\overrightarrow{B_1 B_j})_{2 \leq j \leq n+1}$ est liée.

(Preuve directe) Supposons que $(\overrightarrow{B_1 B_j})_{2 \leq j \leq n+1}$ est liée. Par définition, il existe $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que

$$\sum_{j=2}^{n+1} \alpha_j \overrightarrow{B_1 B_j} = \vec{0}. \quad (1)$$

En posant $\alpha_1 = -\sum_{j=2}^{n+1} \alpha_j$, on peut écrire:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \overrightarrow{B_1 B_j} = \vec{0}. \quad (2)$$

Or $B_j = \text{Bar} \left((A_k, \lambda_{k,j})_{1 \leq k \leq n+1} \right)$. Donc:

$$\overrightarrow{B_1 B_j} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} \overrightarrow{B_1 A_k}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} = 1, \quad 1 \leq j \leq n+1. \quad (3)$$

En reportant dans (2), on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} \overrightarrow{B_1 A_k} \right) &= \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \overrightarrow{B_1 A_k} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \left(\overrightarrow{B_1 A_1} + \overrightarrow{A_1 A_k} \right) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \right) \overrightarrow{B_1 A_1} + \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \overrightarrow{A_1 A_k} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n+1} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} \right)}_{=1} \alpha_j \right) \overrightarrow{B_1 A_1} + \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \overrightarrow{A_1 A_k} = \vec{0} \end{aligned}$$

On s'est donc ramené à l'équivalence:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} \overrightarrow{B_1 A_k} \right) = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \right) \overrightarrow{B_1 A_1} + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \overrightarrow{A_1 A_k} = \vec{0}.$$

Or par définition de α_1 , $\left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \right) = 0$. Donc:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} \overrightarrow{B_1 A_k} \right) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \right) \overrightarrow{A_1 A_k} = \vec{0}.$$

Comme la famille $\left(\overrightarrow{A_1 A_k} \right)_{2 \leq k \leq n+1}$ est libre, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} = 0, \quad 2 \leq k \leq n+1.$$

Cette égalité est encore vraie pour $k = 1$ car:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{1,j} &= \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \left(1 - \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_{k,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j - \sum_{k=2}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \right) = 0. \end{aligned}$$

En conclusion de ce point, on a établi que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} = 0, \quad 1 \leq k \leq n+1. \quad (4)$$

Ceci indique que les colonnes de la matrices $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ sont liées et donc que $\det((\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}) \neq 0$.

La réciproque se démontre en partant de (4) avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}^{n+1}}$. On arrive, en partant de l'égalité (3), à la relation

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n+1} \alpha_j \overrightarrow{B_1 B_j} &= \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \overrightarrow{B_1 B_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \overrightarrow{B_1 A_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} \right) \overrightarrow{B_1 A_k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

De plus:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \lambda_{k,j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{k,j} \right) \alpha_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 0.$$

On en déduit que $(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$ puis que la famille $(\overrightarrow{B_1 B_j})_{2 \leq j \leq n+1}$ est liée.

(Preuve par les déterminants). Pour $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a:

$$B_j = \text{Bar} \left((A_k, \lambda_{k,j})_{1 \leq k \leq n+1} \right), \quad \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} = 1.$$

Donc,

$$\overrightarrow{A_1 B_j} = \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_{k,j} \overrightarrow{A_1 A_k}.$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{B_1 B_j} = \sum_{k=2}^{n+1} (\lambda_{k,j} - \lambda_{k,1}) \overrightarrow{A_1 A_k}$$

En conséquence la famille $(\overrightarrow{B_1 B_j})_{2 \leq j \leq n+1}$ est libre si, et seulement si la matrice $B = (\overrightarrow{B_1 B_2}, \dots, \overrightarrow{B_1 B_{n+1}})$

(la matrice dont la colonne j est constituée par les coordonnées de $\overrightarrow{B_1 B_j}$ dans la base $(\overrightarrow{A_1 A_k})_{2 \leq k \leq n+1}$) a un déterminant non nul, c'est-à-dire:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{2,2} - \lambda_{2,1} & & & \lambda_{2,n+1} - \lambda_{2,1} \\ \lambda_{3,2} - \lambda_{3,1} & \ddots & & \lambda_{3,n+1} - \lambda_{3,1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n+1,2} - \lambda_{n+1,1} & & & \lambda_{n+1,n+1} - \lambda_{n+1,1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Or, si $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$

$$\det(\Lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \cdots & \lambda_{1,n+1} \\ \lambda_{2,1} & \ddots & & \lambda_{2,n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n+1,1} & \cdots & \cdots & \lambda_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

En rajoutant à la ligne L_1 la somme des autres lignes et tenant compte du fait que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{k,j} = 1$ pour tout $1 \leq j \leq n+1$, on ne change pas le déterminant et on obtient:

$$\det(\Lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_{2,1} & \ddots & & \lambda_{2,n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n+1,1} & \cdots & \cdots & \lambda_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

En retranchant la première colonne à chacune des autres colonnes, on ne change pas le déterminant:

$$\det(\Lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} - \lambda_{2,1} & \cdots & \lambda_{2,n+1} - \lambda_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n+1,1} & \lambda_{n+1,2} - \lambda_{n+1,1} & \cdots & \lambda_{n+1,n+1} - \lambda_{n+1,1} \end{pmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient

$$\det(\Lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{2,2} - \lambda_{2,1} & \cdots & \lambda_{2,n+1} - \lambda_{2,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n+1,2} - \lambda_{n+1,1} & \cdots & \lambda_{n+1,n+1} - \lambda_{n+1,1} \end{pmatrix} = \det(B).$$

En conséquence la famille $(\overrightarrow{B_1 B_j})_{2 \leq j \leq n+1}$ est libre si, seulement si, $\det(\Lambda) \neq 0$. ■

Exercice 5. Soit $J \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in J}$ une famille non vide de points de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $i_0 \in J$ tel que la famille $(\overrightarrow{A_{i_0} A_j})_{j \in J \setminus \{i_0\}}$ est libre dans \overrightarrow{E} .
2. Pour tout $i \in J$ tel que la famille $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \in J \setminus \{i\}}$ est libre dans \overrightarrow{E} .
3. Aucun point de $(A_i)_{i \in J}$ n'est un barycentre d'autres points de la famille $(A_i)_{i \in J}$.

Réponse.

- $(1 \Rightarrow 2)$. Pour $i = i_0$, l'assertion 2 est l'hypothèse. Si $i \neq i_0$, soient des scalaires $(\lambda_j)_{j \neq i}$ tels que

$$\sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{A_i A_j} = \overrightarrow{0}.$$

La relation de Chasles implique:

$$\left(\sum_{j \neq i} \lambda_j \right) \overrightarrow{A_i A_{i_0}} + \sum_{j \neq i, i_0} \lambda_j \overrightarrow{A_{i_0} A_j} = \overrightarrow{0}.$$

Comme $(\overrightarrow{A_{i_0} A_j})_{j \in J \setminus \{i_0\}}$ est libre, il s'ensuit que

$$\begin{cases} \lambda_j = 0, & j \neq i, i_0, \\ \sum_{j \neq i} \lambda_j = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_j = 0, & j \neq i.$$

Donc $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \in J \setminus \{i\}}$ libre..

- $(2 \Rightarrow 3)$ Supposons que A_i est barycentre d'autres points de la famille: $\exists (\alpha_j)_{j \neq i}$ tel que

$$\sum_{j \neq i} \alpha_j \neq 0 \text{ et } \sum_{j \neq i} \alpha_j \overrightarrow{A_i A_j} = \overrightarrow{0}.$$

Donc $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \in J \setminus \{i\}}$ est liée puisque un des α_j au moins est non nul du fait de $\sum_{j \neq i} \alpha_j \neq 0$. On a donc établi que $(\text{non } 3 \Rightarrow \text{non } 2)$ qui est la contraposée de $(2 \Rightarrow 3)$. Donc $(2 \Rightarrow 3)$.

- (3 \Rightarrow 1). Supposons non 1 : pour tout $i_0 \in J$, la famille $(\overrightarrow{A_{i_0}A_j})_{j \in J \setminus \{i_0\}}$ est liée dans \overrightarrow{E} . Fixons $i_0 \in J$ et soit $j_0 \neq i_0$. Il existe des scalaires $(\lambda_j)_{j \neq i_0}$ tels que

$$\overrightarrow{A_{i_0}A_{j_0}} = \sum_{j \neq j_0, i_0} \lambda_j \overrightarrow{A_{i_0}A_j} \Leftrightarrow \left(1 - \sum_{j \neq j_0, i_0} \lambda_j\right) \overrightarrow{A_{j_0}A_{i_0}} + \sum_{j \neq j_0, i_0} \lambda_j \overrightarrow{A_{j_0}A_j} = \vec{0}$$

Comme la somme des poids vaut 1, cette dernière relation indique que:

$$A_{j_0} = \text{Bar} \left(\left(A_{i_0}, 1 - \sum_{j \neq j_0, i_0} \lambda_j \right), (A_j, \lambda_j)_{j \neq j_0, i_0} \right).$$

On a donc établi que non 1 \Rightarrow non 3. Donc: (3 \Rightarrow 1). ■

Exercice 6. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $i_0 \in J$ tel que la famille $(\overrightarrow{A_{i_0}A_j})_{j \in J \setminus \{i_0\}}$ est génératrice de \overrightarrow{E} .
2. Pour tout $i \in J$, la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in J \setminus \{i\}}$ est génératrice de \overrightarrow{E} .
3. Tout point de E est un barycentre de points de la famille $(A_i)_{i \in J}$.

Réponse.

- (1 \Rightarrow 2). Supposons 1 et soit $i \in J$. Si $i = i_0$, c'est l'hypothèse. Si $i \neq i_0$, soit $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$. Alors par hypothèse, il existe des scalaires $(\lambda_j)_{j \neq i_0}$ tels que

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \sum_{j \neq i_0} \lambda_j \overrightarrow{A_{i_0}A_j} \\ &= \left(\sum_{j \neq i_0} \lambda_j \right) \overrightarrow{A_{i_0}A_i} + \sum_{j \neq i_0} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} \\ &= - \left(\sum_{j \neq i_0} \lambda_j \right) \overrightarrow{A_iA_{i_0}} + \sum_{j \neq i_0} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} \end{aligned}$$

Donc la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \neq i}$ engendre \overrightarrow{E} .

- (2 \Rightarrow 3). Supposons 2 et soit $M \in E$ et $i \in J$. Comme $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in J \setminus \{i\}}$ est génératrice de \overrightarrow{E} , il existe des scalaires $(\lambda_j)_{j \neq i_0}$ tels que

$$\overrightarrow{A_iM} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} \Leftrightarrow \vec{0} = \left(1 - \sum_{j \neq i} \lambda_j\right) \overrightarrow{MA_i} + \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{MA_j}.$$

Donc $M = \text{Bar} \left((A_i, 1 - \sum_{j \neq i} \lambda_j), (A_j, \lambda_j)_{j \neq i} \right)$. D'où 3.

- (3 \Rightarrow 2) Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{E}$ et $i \in J$. Il existe un unique $M \in E$ tel que $\overrightarrow{A_iM} = \vec{u}$. Or, par hypothèse, $M = \text{Bar} \left((A_j, \lambda_j)_{j \in I} \right)$ avec $\sum_{j \in I} \lambda_j \neq 0$. Donc

$$\vec{u} = \overrightarrow{A_iM} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j}.$$

Par conséquent la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in J \setminus \{i\}}$ est génératrice de \overrightarrow{E} .

Comme la condition 2 implique la condition 1, les trois assertions sont équivalentes. ■

Exercice 7. Soit E un espace affine de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\{A_0, A_1, \dots, A_n\} \subset E$ tel que $(\overrightarrow{A_0 A_k})_{1 \leq k \leq n} \subset \overrightarrow{E}$ soit une famille libre. Pour chaque $i \in [0, n]$, on choisit un point B_i sur la droite $(A_i A_{i+1})$ (avec la convention que $A_{n+1} = A_0$). Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{B_i A_i} = \lambda_i \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, ($0 \leq i \leq n$).

1. On suppose $n = 2$. Montrer que les points B_0, B_1, B_2 sont alignés si, et seulement si,

$$(1 + \lambda_0)(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2.$$

Réponse. Si $n = 2$, on détermine les coordonnées barycentrique des B_i ($0 \leq i \leq 2$) par rapport au repère affine (A_0, A_1, A_2) . Pour $0 \leq i \leq 2$, on a:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_i A_i} &= \lambda_i \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \Leftrightarrow \overrightarrow{B_i A_i} = \lambda_i \overrightarrow{A_i B_i} + \lambda_i \overrightarrow{B_i A_{i+1}} \\ &\Leftrightarrow (1 + \lambda_i) \overrightarrow{B_i A_i} - \lambda_i \overrightarrow{B_i A_{i+1}} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Donc

$$B_i = \text{Bar}((A_i, 1 + \lambda_i), (A_{i+1}, -\lambda_i)).$$

Donc, les coordonnées barycentriques des points B_i ($0 \leq i \leq 2$) sont:

$$\begin{aligned} B_0 &= (1 + \lambda_0, -\lambda_0, 0), \\ B_1 &= (0, 1 + \lambda_1, -\lambda_1), \\ B_2 &= (-\lambda_2, 0, 1 + \lambda_2). \end{aligned}$$

Les points (B_0, B_1, B_2) sont alignés si, et seulement si, ils ne sont pas libres. Donc, d'après l'exercice 4, si et seulement si:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 + \lambda_0 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_1 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & 0 & 1 + \lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant par rapport à sa dernière ligne, on trouve:

$$\begin{aligned} D_2 &= -\lambda_2 \begin{vmatrix} -\lambda_0 & 0 \\ 1 + \lambda_1 & -\lambda_1 \end{vmatrix} + (1 + \lambda_2) \begin{vmatrix} 1 + \lambda_0 & -\lambda_0 \\ 0 & 1 + \lambda_1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda_2 \lambda_0 \lambda_1 + (1 + \lambda_2)(1 + \lambda_0)(1 + \lambda_1) \end{aligned}$$

On a donc:

$$(B_0, B_1, B_2) \text{ alignés} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda_0)(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2.$$

■

2. Pour $n \geq 2$, montrer que les points $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont dans un hyperplan de E si, et seulement si,

$$\prod_{i=0}^n (1 + \lambda_i) = \prod_{i=0}^n \lambda_i.$$

Réponse. En procédant comme dans la question précédente, les $n + 1$ coordonnées barycentriques des B_i sont:

$$\begin{aligned} B_0 &= (1 + \lambda_0, -\lambda_0, 0, \dots, 0), \\ B_1 &= (0, 1 + \lambda_1, -\lambda_1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ B_n &= (-\lambda_n, 0, \dots, 0, 1 + \lambda_n). \end{aligned}$$

Le déterminant devient:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 + \lambda_0 & -\lambda_0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & & 1 + \lambda_n & -\lambda_{n-1} \\ -\lambda_n & 0 & & & 0 & 1 + \lambda_n \end{vmatrix}$$

En développant D_n par rapport à sa dernière ligne, on obtient:

$$\begin{aligned}
 D_n &= (-1)^{n+2} (-\lambda_n) \begin{vmatrix} -\lambda_0 & 0 & & 0 \\ 1 + \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 + \lambda_n & -\lambda_{n-1} \end{vmatrix} \\
 &+ (1 + \lambda_n) \begin{vmatrix} 1 + \lambda_0 & -\lambda_0 & 0 & \\ 0 & 1 + \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & \lambda_{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n+2} (-\lambda_n) \prod_{i=0}^{n-1} (-\lambda_i) + (1 + \lambda_n) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \lambda_i) \\
 &= -\prod_{i=0}^n \lambda_i + \prod_{i=0}^n (1 + \lambda_i).
 \end{aligned}$$

On arrive à la conclusion cherchée puisque les points $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont dans un hyperplan si, et seulement si, $D_n = 0$. \blacksquare

Exercice 8. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On rappelle que si $A, B \in E$, le segment d'extrémités A et B est l'ensemble noté $[AB]$ et défini par $[AB] = \{tA + (1-t)B, t \in [0, 1]\}$. Une partie non vide C de E est convexe si pour tout $(A, B) \in C \times C$, on a $[AB] \subset C$.

1. Soit C une partie non vide de E . Montrer que C est convexe si, et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \dots, A_n) \in C^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j A_j \in C \right). \quad (5)$$

Réponse. La condition suffisante ((5) \Rightarrow C convexe) est immédiate: il suffit de prendre $n = 2$ dans (5). Montrons la réciproque par récurrence en nommant P_n la propriété (5).

Initialisation: Si C est convexe, alors P_1 est trivialement vraie et P_2 est une conséquence de la convexité de C puisque:

$$\begin{cases} (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \in [0, 1]^2,$$

et en posant $t = \lambda_1$ on a $\lambda_2 = 1 - t$ et

$$[AB] = \{tA + (1-t)B, t \in [0, 1]\} = \{\lambda_1 A + \lambda_2 B, t = \lambda_1 \in [0, 1]\}.$$

Hérédité: Soit $n \geq 2$ et supposons P_n . L'expression de P_{n+1} est:

$$\forall (A_1, \dots, A_{n+1}) \in C^{n+1}, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}, \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j A_j \in C \right)$$

Si $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$, on peut supposer sans perte de généralité que $\sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0$. On a alors:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j A_j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j A_j + \lambda_{n+1} A_{n+1} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} A_j + \lambda_{n+1} A_{n+1}
 \end{aligned}$$

Posons $\mu_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}$ pour $1 \leq j \leq n$, on a:

$$\begin{cases} \mu_j \geq 0, 1 \leq j \leq n \\ \sum_{j=1}^n \mu_j = 1. \end{cases} \xrightarrow{P_n} B_n = \sum_{j=1}^n \mu_j A_j = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} A_j \in C.$$

D'autre part, si $\delta_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ alors

$$\delta_n + \lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k + \lambda_{n+1} = 1.$$

Donc l'hypothèse de convexité donne $\delta_n B_n + \lambda_{n+1} A_{n+1} \in C$. On vient donc d'établir que $(P_n \implies P_{n+1})$.

On peut donc conclure que si C est convexe alors P_n est vraie pour tout $n \geq 1$. ■

2. Soit Ω une partie non vide de E et $\mathfrak{C}(\Omega)$ l'ensemble de tous les convexes de E contenant Ω .

(a) Montrer que $\bigcap_{C \in \mathfrak{C}(\Omega)} C \in \mathfrak{C}(\Omega)$ (autrement dit, montrer que l'intersection de tous les convexes de E contenant Ω est un convexe contenant Ω).

Dans la suite, à toute partie Ω non vide de E , on associe le convexe $\text{Conv}(\Omega) = \bigcap_{C \in \mathfrak{C}(\Omega)} C$ que l'on appellera **enveloppe convexe** de Ω .

Réponse. On a d'abord:

$$\Omega \subset C, \forall C \in \mathfrak{C}(\Omega) \implies \Omega \subset \bigcap_{C \in \mathfrak{C}(\Omega)} C.$$

Montrons que $\text{Conv}(\Omega) = \bigcap_{C \in \mathfrak{C}(\Omega)} C$ est convexe. On a:

$$\begin{aligned} A, B &\in \text{Conv}(\Omega) \Leftrightarrow A, B \in C, \forall C \in \mathfrak{C}(\Omega) \\ &\Rightarrow [AB] \subset C, \forall C \in \mathfrak{C}(\Omega) \\ &\Rightarrow [AB] \subset \text{Conv}(\Omega). \end{aligned}$$

Donc $\text{Conv}(\Omega)$ est convexe. ■

(b) Soit Ω une partie non vide de E . Montrer que Ω est convexe si et seulement si $\Omega = \text{Conv}(\Omega)$.

Réponse. Par définition, on a $(\Omega = \text{Conv}(\Omega) \Rightarrow \Omega \text{ convexe})$. Puis, on a déjà $\Omega \subset \text{Conv}(\Omega)$ et:

$$\Omega \text{ convexe} \Rightarrow \Omega \in \mathfrak{C}(\Omega) \Rightarrow \text{Conv}(\Omega) \subset \Omega \Rightarrow \Omega = \text{Conv}(\Omega).$$

Donc $(\Omega \text{ convexe} \Leftrightarrow \Omega = \text{Conv}(\Omega))$. ■

(c) Soient Ω_1 et Ω_2 deux parties non vides de E . Montrer que: $(\Omega_1 \subset \Omega_2) \Rightarrow (\text{Conv}(\Omega_1) \subset \text{Conv}(\Omega_2))$.

Réponse. On a:

$$\begin{aligned} \Omega_1 \subset \Omega_2 &\Rightarrow \mathfrak{C}(\Omega_2) \subset \mathfrak{C}(\Omega_1) \\ &\Rightarrow \text{Conv}(\Omega_1) = \bigcap_{C \in \mathfrak{C}(\Omega_1)} C \subset \bigcap_{C \in \mathfrak{C}(\Omega_2)} C = \text{Conv}(\Omega_2). \end{aligned}$$

(d) Soit Ω une partie non vide de E . Montrer que $\text{Conv}(\Omega)$ est l'ensemble des barycentres de familles finies de points de Ω affectés de coefficients positifs.

Réponse. Soit \mathcal{E} est l'ensemble des barycentres de familles finies de points de Ω affectés de coefficients positifs. Alors

$$\mathcal{E} = \left\{ M \in E, \exists n \geq 1, \begin{array}{l} \exists (A_1, \dots, A_n) \in C^n \\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k = 1 \end{array} , M = \text{Bar} \left((A_k, \lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \right) \right\}.$$

On a immédiatement $\Omega \subset \mathcal{E}$. Montrons que \mathcal{E} est convexe. Si $M, N \in \mathcal{E}$ alors:

$$M = \text{Bar} \left((A_k, \lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \right), N = \text{Bar} \left((A_k, \lambda_k)_{n+1 \leq k \leq n+m} \right)$$

où les points $A_k \in \Omega$ et les $\lambda_k \geq 0$. On a:

$$\begin{aligned} \text{Bar}((M, t), (N, (1-t))) &= \text{Bar}\left(\left(\text{Bar}\left((A_k, \lambda_k)_{1 \leq k \leq n}\right), t\right), \left(\text{Bar}\left((A_k, \lambda_k)_{n+1 \leq k \leq n+m}\right), (1-t)\right)\right) \\ &= \text{Bar}\left((A_k, t\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}, (A_k, (1-t)\lambda_k)_{n+1 \leq k \leq n+m}\right). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité vient de la propriété d'associativité du barycentre. On a donc:

$$\text{Bar}((M, t), (N, (1-t))) = \text{Bar}\left((A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n+m}\right)$$

avec

$$\alpha_k = \begin{cases} t\lambda_k & \text{si } 1 \leq k \leq n, \\ (1-t)\lambda_k & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m. \end{cases}$$

On en déduit que, par définition de \mathcal{E} , $[M, N] \subset \mathcal{E}$. Donc \mathcal{E} est convexe et $\text{Conv}(\Omega) \subset \mathcal{E}$.

Par homogénéité du barycentre, si $\lambda_i \geq 0$ est le poids affectés à A_i avec $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \neq 0$, on peut toujours supposer que $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = 1$. La question 1 donne alors, puisque $\text{Conv}(\Omega)$ est convexe:

$$\text{Bar}\left((A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}\right) \in \text{Conv}(\Omega).$$

Ce qui établit que l'ensemble \mathcal{E} des barycentres de familles finies de points de Ω affectés de coefficients positifs est contenu dans $\text{Conv}(\Omega)$: $\mathcal{E} \subset \text{Conv}(\Omega)$.

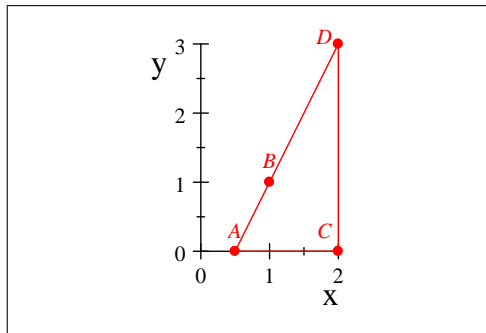
On conclut donc que $\text{Conv}(\Omega) = \mathcal{E}$. ■

Exercice 9. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Dans cette question, E est de dimension 2 et il est rapporté à un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) . Représenter graphiquement les points $A(1/2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 0)$, $D(2, 3)$ puis l'enveloppe convexe de l'ensemble $\Omega = \{A, B, C, D\}$.

Réponse. Les points A, B, D sont alignés et $B \in [AD]$. En effet:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}.$$



On a donc: $[AD] \subset \text{Conv}(\{A, B, C, D\}) = \text{Conv}(\{A, C, D\})$. Montrons que $\text{Conv}(\{A, C, D\})$ est l'intérieur du triangle ACD auquel on rajoute les côtés $[AD]$, $[AC]$ et $[CD]$. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, la droite (AD) a pour équation $x = 0$ et la droite (CD) a pour équation $y = 1 - x$. Un point M de coordonnées (x, y) dans ce repère a pour coordonnées barycentriques $(1 - x - y, x, y)$ dans le repère affine (A, C, D) . Or, le point M est à l'intérieur du triangle ou sur un de ses côtés si et seulement si:

$$0 \leq y \leq 1 - x.$$

Donc, l'intérieur du triangle auquel on rajoute les côtés $[AD]$, $[AC]$ et $[CD]$ est l'ensemble des barycentres à poids positifs des points A, B, C et d'après l'exercice 8, $\text{Conv}(\{A, C, D\})$ est l'intérieur du triangle auquel on rajoute les côtés $[AD]$, $[AC]$ et $[CD]$. ■

2. On suppose dans cette question que E est de dimension 3 et qu'il est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Montrer que les ensembles

$$\Omega_1 = \{M(x, y, z), x + y + z > 1\}, \quad \Omega_2 = \{M(x, y, z), x + y + z < 1\},$$

sont tous deux convexes.

Réponse. Il suffit de vérifier que si $M(x, y, z)$ et $N(x', y', z')$ sont deux points de Ω_1 (resp. Ω_2) alors les coordonnées des points $tM + (1-t)N$ vérifient les inéquations caractéristiques de Ω_1 (resp. Ω_2) pour tout $t \in [0, 1]$. ■

Exercice 10. On prend $E = \mathbb{C}$ comme espace affine sur \mathbb{R} . L'objectif est de montrer que l'enveloppe convexe des racines complexes d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ contient les racines du polynôme dérivé P' .

1. Montrer que: $P(z) = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0$.

Réponse. $P(z) = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0$ est immédiat pour les polynômes à coefficients réels. ■

2. On suppose que P est unitaire et on le considère sous sa forme factorisée $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k)^{m_k}$ où les z_k sont ses racines complexes et m_k leur multiplicité algébrique. Montrer que

$$\frac{P'}{P}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - \bar{z}_k}.$$

P'/P est appelée dérivée logarithmique de P .

Réponse. Par utilisation de la règle de dérivation d'un produit, on a:

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n m_k (X - z_k)^{m_k-1} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (X - z_j)^{m_j}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P}(X) &= \sum_{k=1}^n m_k (X - z_k)^{m_k-1} \frac{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (X - z_j)^{m_j}}{\prod_{1 \leq j \leq n} (X - z_j)^{m_j}} \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \frac{(X - z_k)^{m_k-1}}{(X - z_k)^{m_k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - z_k}. \end{aligned}$$

Le question précédente indique que

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k)^{m_k} = \prod_{k=1}^n (X - \bar{z}_k)^{m_k}.$$

Le même calcul conduit donc aux égalités:

$$\frac{P'}{P}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - \bar{z}_k}.$$

3. Soit r une racine de P' . On suppose que $r \notin \{z_k, 1 \leq k \leq n\}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{|r - z_k|^2} (r - z_k) = 0$$

En déduire que le point r est dans l'enveloppe convexe des z_k .

Réponse. L'hypothèse $r \notin \{z_k, 1 \leq k \leq n\}$ et la question précédente impliquent:

$$0 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{\bar{r} - \bar{z}_k} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{(\bar{r} - \bar{z}_k)(r - z_k)} (r - z_k) = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{|r - z_k|^2} (r - z_k).$$

Ce qui démontre le premier point. On en déduit que

$$r = \text{Bar} \left((z_k, \lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \right)$$

avec

$$\lambda_k = \frac{\frac{m_k}{|r - z_k|^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{|r - z_j|^2}} > 0, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1.$$

D'après l'exercice 8, r est dans l'enveloppe convexe des z_k . ■

4. Soit $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Calculer $(X-1)P(X)$ et en déduire les racines de P . Représenter graphiquement l'enveloppe convexe de ses racines puis localiser les racines du polynôme P'' .

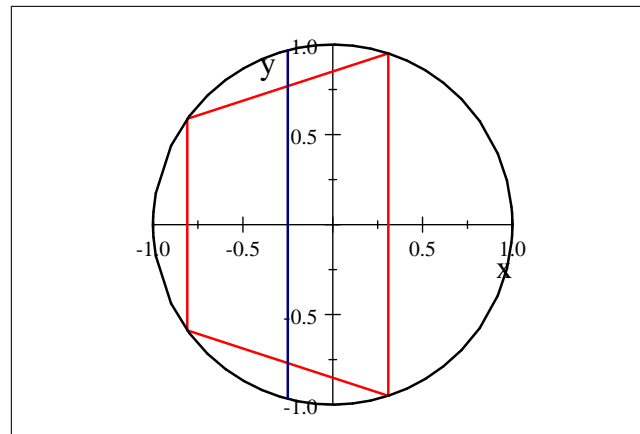
Réponse. On peut vérifier en développant que

$$(X-1)P(X) = X^5 - 1.$$

Comme $P(1) = 5 \neq 0$, on en déduit que les racines de P sont les racines cinquièmes de l'unité autre que 1 :

$$z_k = e^{ik\frac{2\pi}{5}}, \quad 1 \leq k \leq 4.$$

Graphiquement, l'enveloppe convexe de ses racines est:



Enveloppe convexe des z_k et $x = -\frac{1}{4}$

On a

$$P''(X) = 12X^2 + 6X + 2.$$

D'après la question précédente, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des z_k et en appliquant ce même résultat, les racines de P'' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P' , donc dans l'enveloppe convexe des z_k . De plus la somme des racines z_1'' et z_2'' de P'' vaut :

$$z_1'' + z_2'' = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Comme P'' est à coefficients réels, on a $z_1'' = \overline{z_2''}$ et $z_1'' + z_2'' = 2 \operatorname{Re}(z_1'')$. Donc

$$\operatorname{Re}(z_1'') = -\frac{1}{4}.$$

Donc les racines de P'' sont dans l'intersection de la droite d'équation $x = -\frac{1}{4}$ et de l'enveloppe convexe des z_k (voir figure). ■

Dans les exercices qui suivent, sauf mention contraire, le couple (E, \overrightarrow{E}) désigne l'espace affine E dirigé par l'espace vectoriel \overrightarrow{E} sur le corps \mathbb{K} .

Exercice 1. On suppose que $\dim(E) = 3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E . On repère un point $M \in E$ par ses coordonnées $M = (x, y, z) = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Soit $f : E \rightarrow E$ l'application définie par $f(M) = M' = (x', y', z')$ avec:

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - z - 1 \\ y' = -y + 2z - 2 \\ z' = 2x - 4y + 3z - 3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine et préciser l'application linéaire associée.

Réponse. Si $M = (x, y, z)$, on a:

$$f(M) = A(\overrightarrow{OM}) + B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On a donc $f(O) = B$ et on en déduit que

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = A(\overrightarrow{OM})$$

et A est la matrice d'une application linéaire dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Donc f est une application affine. ■

2. Résoudre l'équation $f(M) = M$.

Réponse. Si $M = (x, y, z)$, on a:

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow A(\overrightarrow{OM}) + B = M \\ &\Leftrightarrow A(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow (A - I_d)(\overrightarrow{OM}) = -\overrightarrow{OB}. \end{aligned}$$

Or:

$$A - I_d = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $\det(A - I_d) = 4$. La matrice $A - I_d$ est donc inversible et par calculs:

$$\begin{aligned} (A - I_d)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{OM} &= (A - I_d)^{-1}(-\overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc f admet un unique point fixe que l'on notera $M_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. ■

3. En déduire qu'il existe un repère cartésien dans lequel l'application f admet comme représentation cartésienne:

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - z \\ y' = -y + 2z \\ z' = 2x - 4y + 3z \end{cases}$$

Réponse. Si $M = (x, y, z)$, on a, puisque $f(M_0) = M_0$

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(M) = A(\overrightarrow{OM}) + B \\ f(M_0) = A(\overrightarrow{OM_0}) + B \end{cases} &\Leftrightarrow \overrightarrow{f(M_0)f(M)} = A(\overrightarrow{M_0M}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0f(M)} = A(\overrightarrow{M_0M}) \end{aligned}$$

Donc, dans le repère $(M_0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$f(M) = A(\overrightarrow{M_0M}).$$

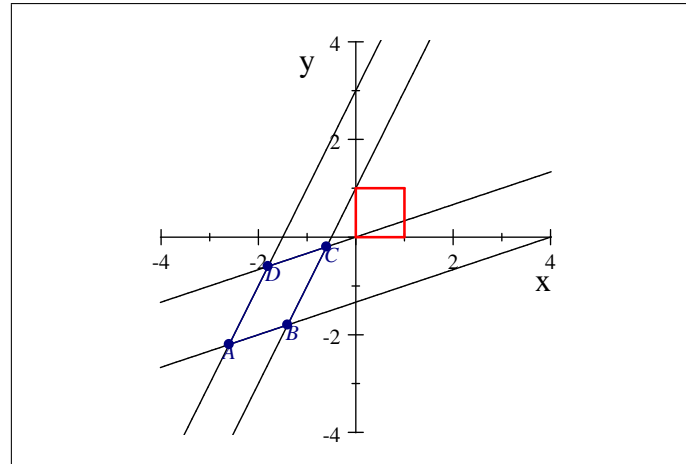
■

Exercice 2. Soit E un plan affine réel muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer l'expression d'une application affine $f : E \rightarrow E$ qui transforme le parallélogramme délimité par les droites d'équations

$$(D) : y = 2x + 1; (D') : y = 2x + 3; (\Delta) : x = 3y; (\Delta') : x = 3y + 4$$

en le quadrilatère convexe de sommets $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ et $(1, 0)$.

Réponse. Les droites (D) et (D') (resp. (Δ) et (Δ')) sont parallèles car elles ont $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (resp. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$) comme vecteur directeur. La représentation graphique de ces droites est la suivante:



Les sommets du parallélogramme délimitée par les droites ont pour coordonnées:

$$A = \left(-\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}\right), B = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{9}{5}\right), C = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right), D = \left(-\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Il suffit donc que (par exemple) l'application affine cherchée vérifie:

$$f(A) = O, \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{i}, \vec{f}(\overrightarrow{AD}) = \vec{j}$$

Soit $P_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de \vec{f} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . On a:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

Puisque $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base et que \vec{f} transforme une base en une base, \vec{f} est inversible. L'application $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$ vérifie alors:

$$\begin{cases} \vec{g}(\vec{i}) = \overrightarrow{AB} = \frac{6}{5}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j} \\ \vec{g}(\vec{j}) = \overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{8}{5}\vec{j} \end{cases} \Rightarrow P_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow P_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Donc f est de la forme

$$f(M) = P_{\vec{f}}(\overrightarrow{OM}) + B.$$

Comme $f(A) = O$, on doit avoir

$$f(A) = P_{\vec{f}}(\overrightarrow{OA}) + B = O \Rightarrow \overrightarrow{OB} = -P_{\vec{f}}(\overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, si $M = (x, y)$:

$$f(M) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

Exercice 3. On suppose que $K = \mathbb{R}$ et $\dim(E) = 2$. Soit (A, B, C) un repère affine de E . Soit $f : E \rightarrow E$ l'application définie par $f(xA + yB + zC) = yA + zB + xC$ où $x + y + z = 1$.

1. f est-elle une application affine?

Réponse. f est une application affine et, pour le montrer, on applique la proposition 3.2 (p. 42 du cours). Si $M = xA + yB + zC$ avec $x + y + z = 1$, alors

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$$

Les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc (y, z) .

De la même manière, on peut écrire que:

$$\begin{aligned} f(M) &= yA + zB + xC \\ &= A + z\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} \\ &= A + z\overrightarrow{AB} + (1 - y - z)\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, l'application f transforme le point de coordonnées (y, z) en le point de coordonnées (y', z') données par:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 1 - y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{:=P} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{AM}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=C}$$

La matrice P est la matrice de \overrightarrow{f} dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $f(A) = B$. On a bien:

$$f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}), \forall M \in E.$$

Remarque 1. On peut aussi remarquer que:

$$f(xA + yB + zC) = yA + zB + xC = yf(B) + zf(C) + xf(A).$$

On en déduit que f conserve les barycentres puisque (A, B, C) est un repère affine. On applique alors l'exercice 6. ■

2. Montrer que $f^3 = Id_E$.

Réponse. Par définition de f , on a:

$$f(A) = C, f(C) = B, f(B) = A.$$

D'où

$$f^3(A) = f^2(C) = f(B) = A.$$

De la même manière:

$$f^3(B) = B, f^3(C) = C.$$

f a donc trois points fixes affinement libres dans un espace affine de dimension deux: elle est donc l'identité (voir exercice 4). ■

3. Résoudre $f(M) = M$.

Réponse. On a

$$\begin{aligned} f(xA + yB + zC) &= xA + yB + zC \Leftrightarrow yA + zB + xC = xA + yB + zC \\ &\Leftrightarrow x = y = z, \end{aligned}$$

par unicité des coordonnées barycentriques. Donc f admet un unique point fixe qui est l'isobarycentre de (A, B, C) (ou le centre de gravité du triangle ABC). ■

Exercice 4. Soit E un espace affine de dimension n et $f : E \rightarrow E$ une application affine. Montrer que f admet $n + 1$ points fixes affinement indépendants si, et seulement si, f est l'identité.

Réponse. Si f est l'identité, tout point est fixe. Si f admet $n+1$ points fixes affinement indépendants $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$, alors ces points forment une base affine et tout point $M \in E$ s'écrit de façon unique

$$M = \sum_{k=1}^{n+1} x_k A_k, \quad \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k = 1 \right).$$

D'où, puisque toute application affine conserve les barycentres (Proposition 3.13 p. 46 du cours):

$$f(M) = f\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k A_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} x_k f(A_k) = \sum_{k=1}^{n+1} x_k A_k = M, \quad \forall M \in E.$$

■

Exercice 5. Soient E un espace affine, $f : E \rightarrow E$ une application affine. Montrer que s'il existe $\lambda \neq 0; 1$ tel que $\vec{f} = \lambda \text{id}_{\vec{E}}$ alors f est une homothétie.

Réponse. Puisque f est application affine telle que $\vec{f} = \lambda \text{id}_{\vec{E}}$, on a, pour tout $A, M \in E$,

$$f(M) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = f(A) + \lambda \overrightarrow{AM}.$$

Fixons $A \in E$. Ω est un point fixe de f si, et seulement si:

$$f(\Omega) = f(A) + \lambda \overrightarrow{A\Omega} = \Omega \Leftrightarrow \lambda \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{f(A)\Omega} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{\lambda - 1} \overrightarrow{f(A)A}$$

Ceci détermine de façon unique Ω . Donc, en remplaçant A par Ω , on obtient:

$$f(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

■

Exercice 6. Soient E un espace affine, $f : E \rightarrow E$ une application qui préserve les barycentres. Montrer que f est une application affine.

Réponse. On suppose que $\dim(E) = n \geq 1$ et soit (A_0, A_1, \dots, A_n) une base affine de E . Soit g une application affine telle:

$$g(A_i) = f(A_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

L'application g existe et est unique car:

$$\vec{g}(\overrightarrow{A_0 A_i}) = \overrightarrow{f(A_0) f(A_i)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

car sa matrice dans la base $(\overrightarrow{A_0 A_i})_{1 \leq i \leq n}$ est donnée par $M_{\vec{g}} = (a_{ij})_{1 \leq i, j}$ où

$$\overrightarrow{f(A_0) f(A_i)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \overrightarrow{A_0 A_j}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Comme g est affine, elle préserve les barycentres. Si M est un point quelconque de E de coordonnées barycentriques $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ (avec $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$), alors

$$\begin{aligned} g(M) &= g\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i A_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i g(A_i) \quad (\text{car } g \text{ est affine}) \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i f(A_i) \quad (\text{par définition de } g) \\ &= f\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i A_i\right) \quad (\text{hypothèse sur } f) \\ &= f(M) \end{aligned}$$

Donc $f = g$ et il s'ensuit que f est affine.

■

Exercice 7. Soit $f \in GA(E)$ et \vec{f} son application linéaire associée.

1. Soit $\vec{v} \in \vec{E}$ et $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur \vec{v} . Montrer que l'application affine $f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{f}(\vec{v})$.

En déduire que:

$$f \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ f \Leftrightarrow \vec{v} \in \text{Ker}(\vec{f} - Id_{\vec{E}}).$$

Réponse. Soit $M \in E$. On peut écrire:

$$\begin{aligned} f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1}(M) &= f(t_{\vec{v}}(f^{-1}(M))) \\ &= f(f^{-1}(M) + \vec{v}) \\ &= f(f^{-1}(M)) + \vec{f}(\vec{v}) \\ &= M + \vec{f}(\vec{v}). \end{aligned}$$

Donc $f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{f}(\vec{v})$.

On a ensuite:

$$\begin{aligned} f \circ t_{\vec{v}} &= t_{\vec{v}} \circ f \Leftrightarrow f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1} = t_{\vec{v}} \\ \Leftrightarrow t_{\vec{f}(\vec{v})} &= t_{\vec{v}} \\ \Leftrightarrow \vec{f}(\vec{v}) &= \vec{v} \\ \Leftrightarrow \vec{v} &\in \text{Ker}(\vec{f} - Id_{\vec{E}}). \end{aligned}$$

■

2. Soit $\Omega \in E$, $k \in \mathbb{K}$ et $h_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k . Montrer que l'application affine $f \circ h_{\Omega,k} \circ f^{-1}$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

Réponse. Comme dans la question précédente, pour tout $M \in E$ $f \circ h_{\Omega,k} \circ f^{-1} f \circ h_{\Omega,k} \circ f^{-1}$

$$\begin{aligned} f \circ h_{\Omega,k} \circ f^{-1}(M) &= f(\overrightarrow{\Omega + k\Omega f^{-1}(M)}) \\ &= f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{k\Omega f^{-1}(M)}) \\ &= f(\Omega) + k\vec{f}(\overrightarrow{\Omega f^{-1}(M)}) \\ &= f(\Omega) + k\overrightarrow{f(\Omega)(M)} \\ &= h_{f(\Omega),k}(M). \end{aligned}$$

Donc $f \circ h_{\Omega,k} \circ f^{-1}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

■

Exercice 8. Dans l'espace affine E de dimension 3, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite D

$$\text{d'équations: } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}.$$

1. Déterminer la projection sur le plan $P = O + \text{Vect} \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ dans la direction D .

Réponse. Le plan P a pour équation $z = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et

$$\vec{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

Soit π la projection sur le plan $P = O + \text{Vect} \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ dans la direction \vec{D} . Si $M = (x, y, z)$ et $M' = \pi(M) =$

(x', y', z') , on doit avoir:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \pi(M) \in P \\ \text{et} \\ \overrightarrow{M\pi(M)} \in \overrightarrow{D} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z' = 0 \\ (x' - x) + 2(y' - y) + (z' - z) = 0 \\ (x' - x) + (y' - y) - 2(z' - z) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' + 2y' = x + 2y + z \\ x' + y' = x + y - 2z \\ z' = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 5z \\ y' = y + 3z \\ z' = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc:

$$\pi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la symétrie par rapport à D dans la direction $\overrightarrow{F} = \text{Vect}\langle \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \rangle$.

Réponse. L'équation analytique du plan vectoriel \overrightarrow{F} est $x = 0$. Soit s la symétrie par rapport à D dans la direction \overrightarrow{F} . Si $M = (x, y, z)$ et $M' = s(x, y, z) = (x', y', z')$, on doit avoir:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M' \in D \\ \overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{F} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + x') + 2(y + y') + (z + z') = 1 \\ (x + x') + (y + y') - 2(z + z') = 2 \\ x' - x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y' + z' = -2x - 2y - z + 1 \\ y' - 2z' = -2x - y + 2z + 2 \\ x' - x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -x - y + 4/5 \\ z' = -z + 3/5 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$s(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer une équation de la projection de D sur P dans la direction \overrightarrow{k} .

Réponse. Déterminons d'abord $D \cap P$:

$$M = (x, y, z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (3, -1, 0).$$

On notera ce point

$$A = (3, -1, 0) \in D \cap P,$$

et il est un point fixe de la projection sur P . Un autre point de la droite D est (par exemple... on peut procéder avec n'importe quel autre point de D qui n'est pas dans P):

$$B = (8, -4, 1)$$

La projection d'un point $M = (x, y, z)$ sur le plan P dans la direction \overrightarrow{k} est le point $M' = (x, y, 0)$. Donc la projection de B sur P dans la direction \overrightarrow{k} est $B' = (8, -4, 0)$. Comme les projections sont affines, l'image d'une droite est une droite. On en déduit que l'image de la droite D est la droite de P qui passe par A et B' car les transformés de $A, B \in D$ sont $A, B' \in D$. Les équations paramétriques de la projection D' de D sur le plan P dans la direction de \overrightarrow{k} sont alors:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5t \\ -1 - 3t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

En éliminant le paramètre t , on trouve les équations cartésiennes de D' :

$$\begin{cases} y = -1 - 3\left(\frac{x-3}{5}\right), \\ z = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

■

Exercice 9. (*Théorème de Pappus*). Soient A, B et C trois points d'une droite D et soient A', B' et C' trois points d'une droite D' du plan affine. On suppose que toutes les droites considérées ci-après existent et que les droites (AB') , $(A'B)$ sont parallèles ainsi que les droites (BC') et $(B'C)$.

1. On suppose que D et D' sont sécantes en O . Montrer que les droites (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

Réponse.

■

2. On suppose que les droites D et D' sont parallèles. Montrer que les droites (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

Réponse.

■

Exercice 10. (*Théorème de Desargues*). Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles du plan affine. On suppose que toutes les droites considérées ci-après existent.

1. On suppose que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes et que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles ainsi que les droites (BC) et $(B'C')$. Montrer que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

Réponse.

■

2. On suppose que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles et que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles ainsi que les droites (BC) et $(B'C')$. Montrer que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

Réponse.

■

Exercice 11. Soient E un espace affine, $f : E \rightarrow E$ une application affine bijective qui transforme toute droite en une droite parallèle à la première. Montrer que f est une homothétie ou une translation.

Réponse. Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine bijective qui transforme toute droite en une droite parallèle.

Si f est l'identité, toute droite est transformée en elle-même: c'est le cas trivial.

Supposons que $f \neq I_E$ et soit $A \in E$ tel que $f(A) = A' \neq A$. Pour tout $M \in E$, soit $M' = f(M)$. Par hypothèse, $(AM) \parallel (A'M')$. Les deux droites sont donc coplanaires.

Si f n'admet pas de point fixe, alors $(AA') \parallel (MM')$. En effet, les points A, A', M, M' étant coplanaires, si $(AA') \nparallel (MM')$ alors il existe $O \in (AA') \cap (MM')$. Comme, $A' = f(A)$, l'image de la droite (AA') est une droite parallèle qui passe par le point $A' = f(A)$. Cette droite est donc (AA') . De même, l'image de (MM') par f est (MM') . Donc:

$$\begin{cases} O \in (AA') \Rightarrow f(O) \in (AA') \\ O \in (MM') \Rightarrow f(O) \in (MM') \end{cases} \Rightarrow f(O) \in (AA') \cap (MM') \Rightarrow f(O) = O.$$

Contradiction. Donc $(AA') \parallel (MM')$. Dans ce cas, le quadrilatère $AMM'A'$ est un parallélogramme et on en déduit que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$$

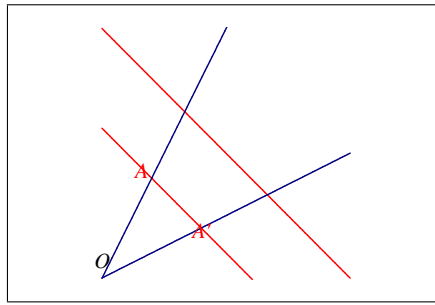
Donc f est une translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ et \vec{u} ne dépend pas de A .

Si f admet un point fixe O , alors $O \in (AA')$. En effet, l'image de (OA) par f est (OA') et comme $(OA) \parallel (OA')$, on en déduit que $(OA) = (OA')$. Il découle de cette remarque que O est l'unique point fixe de f . en effet, si O_1 est un deuxième point fixe, alors $O_1 \in (AA')$. Il existe donc α tel que $A = \alpha O + (1 - \alpha) O_1$ et

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\alpha O + (1 - \alpha) O_1) \\ &= \alpha f(O) + (1 - \alpha) f(O_1) \\ &= \alpha O + (1 - \alpha) O_1 \\ &= A \end{aligned}$$

Donc $A = A'$ et cela contredit l'hypothèse. De même, on a $O \in (MM')$ pour tout $M \neq O$. De nouveau, les droites (AA') et (MM') sont coplanaires, se coupent en O et $(AM) \parallel (A'M')$: c'est une configuration de Thalès et $k = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ est tel que

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$



Donc f est une homothétie de centre O et de rapport k . ■

Dans cette fiche, E désigne un espace vectoriel euclidien sur \mathbb{R} , $\dim E = n \geq 1$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Exercice 1. Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Soit $2 \leq k \leq n$ et $(a_j)_{1 \leq j \leq k}$ une famille libre de vecteurs de E . On pose:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_1, \\ b_j = a_j - \sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{\langle a_j, b_\ell \rangle}{\|b_\ell\|^2} b_\ell \quad (2 \leq j \leq k). \end{array} \right.$$

1. Si u et v sont deux vecteurs de E , que représente géométriquement le vecteur $\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u$? Le vecteur $v - \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u$?

Réponse. Le vecteur $v_0 = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u$ est le projeté orthogonal de v sur $\text{Vect} \langle u \rangle$. En effet, si $U = \text{Vect} \langle u \rangle$ alors $E = U \oplus U^\perp$ et:

$$\exists! (\alpha, w) \in \mathbb{R} \times U^\perp : v = \alpha u + w.$$

On a donc:

$$\langle u, v \rangle = \alpha \|u\|^2 \quad (\text{car } \langle u, w \rangle = 0).$$

Donc

$$\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2},$$

et

$$v = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u + w = v_0 + w.$$

Il apparaît alors que:

$$v - \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u = w \in U^\perp.$$

■

2. Montrer par récurrence sur k que la famille $(b_j)_{1 \leq j \leq k}$ est orthogonale, que $\text{Vect} \{a_1, \dots, a_k\} = \text{Vect} \{b_1, \dots, b_k\}$ et que $\langle a_k, b_k \rangle = \|b_k\|^2$.

Réponse. Montrons que $(b_j)_{1 \leq j \leq k}$ est orthogonale, c'est à dire que:

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Pour $k = 2$, on a, d'après la question précédente:

$$b_2 = \left(a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 \right) \perp b_1$$

De plus:

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} a_1.$$

Donc $\text{Vect} \{a_1, a_2\} = \text{Vect} \{b_1, b_2\}$ puisque $\{a_1, a_2\}$ et $\{b_1, b_2\}$ sont combinaisons les uns des autres. Enfin, $\langle a_2, b_2 \rangle = \|b_2\|^2$ car:

$$\begin{aligned} a_2 &= b_2 + \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 \\ \Rightarrow \\ \langle a_2, b_2 \rangle &= \left\langle b_2 + \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1, b_2 \right\rangle \\ &= \langle b_2, b_2 \rangle + \frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} \langle b_1, b_2 \rangle \\ &= \|b_2\|^2 \quad (\text{car } \langle b_1, b_2 \rangle = 0). \end{aligned}$$

Soit $k \geq 2$ et supposons que $(b_j)_{1 \leq j \leq k-1}$ est orthogonale. Soit

$$B_k = \text{Vect} (b_1, \dots, b_{k-1}).$$

Alors $E = B_k \oplus B_k^\perp$ et

$$\exists! (u, w) \in B_k \times B_k^\perp : a_k = u + w.$$

Comme $(b_j)_{1 \leq j \leq k-1}$ est orthogonale, elle constitue une base de B_k et si $(x_j)_{1 \leq j \leq k-1}$ sont les coordonnées de u dans cette base, on a:

$$u = \sum_{j=1}^{k-1} x_j b_j.$$

Or, pour $1 \leq \ell \leq k-1$, on a:

$$\begin{aligned} \langle u, b_\ell \rangle &= \sum_{j=1}^{k-1} x_j \langle b_j, b_\ell \rangle = x_\ell \|b_\ell\|^2 \\ &\Downarrow \\ x_\ell &= \frac{\langle u, b_\ell \rangle}{\|b_\ell\|^2} \end{aligned}$$

Or

$$\langle a_k, b_\ell \rangle = \langle u, b_\ell \rangle, \quad (\text{car } w \in B_k^\perp).$$

Donc

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u, b_j \rangle}{\|b_j\|^2} b_j + w \Rightarrow b_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u, b_j \rangle}{\|b_j\|^2} b_j = w \in B_k^\perp.$$

On conclut que la famille $(b_j)_{1 \leq j \leq k}$ est orthogonale. On peut de la même manière montrer que

$$\text{Vect} \{a_1, \dots, a_{k-1}\} = \text{Vect} \{b_1, \dots, b_{k-1}\} \Rightarrow \text{Vect} \{a_1, \dots, a_k\} = \text{Vect} \{b_1, \dots, b_k\},$$

et que $\langle a_k, b_k \rangle = \|b_k\|^2$. ■

Exercice 2. On pose $\dim E = 3$ et on munit E d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$. On considère l'application $f : E \rightarrow E$ définie par son expression analytique:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y + z) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) \\ z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) \end{cases}$$

Soit s_Π la réflexion de plan Π d'équation $y + z = 0$ et $s_{\Pi'}$ la réflexion de plan Π' d'équation $x - y = 0$.

1. Donner les expressions analytiques de s_Π et $s_{\Pi'}$, puis la nature de l'application $s_\Pi \circ s_{\Pi'}$ (en donner les caractéristiques géométriques).

Réponse. Le plan Π a pour équation $y + z = 0$. On a donc

$$\Pi^\perp = \text{Vect} \left\{ n_\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tout $u \in E$ admet une décomposition unique

$$u = v + \alpha n_\Pi, \quad v \in \Pi, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$s_\Pi(u) = v - \alpha n_\Pi.$$

On a donc

$$\begin{cases} u = v + \alpha n_\Pi \\ s_\Pi(u) = v - \alpha n_\Pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - s_\Pi(u) = 2\alpha n_\Pi \\ u + s_\Pi(u) = 2v \in \Pi \end{cases}.$$

Si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $s_\Pi(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on doit avoir, en tenant compte de l'équation de Π et en posant $t = 2\alpha$:

$$\begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ z - z' = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ y + y' + z + z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' - z' = y - z \\ y' + z' = -y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -z \\ z' = -y \end{cases}.$$

Par conséquent, si on note A_{Π} la matrice de s_{Π} dans \mathcal{B} , on a:

$$A_{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On procède de la même manière pour l'expression analytique de $s_{\Pi'}$. On a:

$$n_{\Pi'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u - s_{\Pi'}(u) = 2\alpha n_{\Pi'} \\ u + s_{\Pi'}(u) = 2v \in \Pi' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases}$$

Donc:

$$A_{\Pi'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice A de $s_{\Pi} \circ s_{\Pi'}$ est:

$$A = A_{\Pi} A_{\Pi'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est une matrice orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormale et, par calculs, on a $\det(A) = 1$. C'est donc une rotation et

$$\text{Ker}(A - I_d) = \text{Vect} \left\{ w = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit θ l'angle de cette rotation. On sait par le cours que

$$\text{trace}(A) = 0 = 1 + 2 \cos(\theta) \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

Pour déterminer le signe de θ , on se ramène au plan P orthogonal à w . Il a pour équation: $-x - y + z = 0$. Donc

$$P = \text{Vect} \left\{ u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On détermine une base orthonormée $\{u, v'\}$ de P telle que $\{u, v', w\}$ soit directe. Pour cela, on prend

$$v' = w \wedge u = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par calcul, on a:

$$Au = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\langle v', Au \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\theta).$$

On en déduit que $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

■

2. Montrer que $f = s_{\Pi} \circ r$ où r est une rotation.

Réponse. On sait que $s_{\Pi} \circ s_{\Pi} = I_d$. Déterminer r revient donc à calculer $s_{\Pi} \circ f$. Or la matrice M de f est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de $s_{\Pi} \circ f$ est $A_{\Pi}M$ et par calcul:

$$A_{\Pi}M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A_{\Pi}M) = 1$ et que ses colonnes forment une base orthonormale, $s_{\Pi} \circ f$ est une rotation. Par calcul, on trouve

$$\text{Ker}(A - I_d) = \text{Vect} \left\{ w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a de même:

$$\text{trace}(A_{\Pi}M) = 1 = 1 + 2 \cos(\theta) \Leftrightarrow \theta = \pm\pi [2\pi].$$

On procède comme précédemment pour déterminer le signe de θ . ■

Exercice 3. On pose $\dim E = 3$ et on munit E d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit Π le plan d'équation $y + z = 0$. Déterminer la matrice P de la projection orthogonale p sur Π . A-t-on $p \in O(E)$?

Réponse. On a, d'après l'équation de Π :

$$\Pi^{\perp} = \text{Vect} \left\{ n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour tout $u = (x, y, z)$, pose $p(u) = (x', y', z')$. On doit avoir:

$$\begin{cases} p(u) \in \Pi \\ \text{et} \\ u - p(u) \in \Pi^{\perp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' + z' = 0 \\ x' - x = 0 \\ y' - y = z' - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}(y - z) \\ z' = -\frac{1}{2}(y - z) \end{cases}$$

Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

P est symétrique mais

$$P^2 = P^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq I_3.$$

Donc $p \notin O(E)$. ■

Exercice 4. On pose $\dim E = 3$ et on munit E d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est orthogonale puis calculer $\det A$. Que peut-on en déduire? Donner les caractéristiques géométriques de A .

Réponse. La matrice A est symétrique et

$$A^t A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a, après calculs:

$$\det(A) = -1.$$

Donc, d'après le Théorème 4.12 (p. 73) du cours, A est soit une réflexion (si $\dim \ker(A - id_E) = 2$), soit une antirotation (si $\dim \ker(A - id_E) = 0$). On a

$$A - id_E = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

et un calcul simple montre que $\ker(A - id_E) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Donc A est une antirotation (la composée d'une rotation $r = r_{D,\theta}$ d'axe D et d'angle θ et d'une réflexion $s = s_{D^\perp}$ de plan D^\perp :

$$A = r \circ s = s \circ r.$$

Déterminons D . Si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow Au = -u.$$

En effet, $r(u) = u$ (puisque les vecteurs de D sont fixes par la rotation d'axe D) et $s(u) = -u$ (car s est la réflexion par rapport à D^\perp). Donc $u \in \ker(A + id_E)$. Or:

$$A + id_E = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

et par calculs,

$$\ker(A + id_E) = \text{Vect} \left\{ d = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = D.$$

Le plan D^\perp a pour équation:

$$D^\perp : x + y + z = 0.$$

On peut poursuivre en déterminant l'angle θ de r . ■

Exercice 5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

- Déterminer les couples (a, b) tels que $A \in O(\mathbb{R}^3)$.

Réponse. On a:

$$A \in O(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow A^t A = A^2 = id_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ b^2 + 2ab = 0 \end{cases}$$

On a:

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ b^2 + 2ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 9a^2 = 1 \\ b = -2a \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b) \in \left\{ (1, 0), (-1, 0), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

Donc $A \in O(\mathbb{R}^3)$ si, et seulement si, elle est l'une des matrices suivantes:

$$I_3, -I_3, \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

- Pour de tels couples (a, b) , préciser les caractéristiques géométriques de A suivant (a, b) .

Réponse. ■

Exercice 6. On pose $\dim E = 3$ et on munit E d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Déterminer les rotations r de E telles que:

$$r(i) = -j, \quad r(i - j + k) = i - j + k.$$

Réponse. Si cette rotation existe, alors $n = i - j + k$ dirige son axe. Soit $u = \alpha i + n$ et déterminons α pour que $\langle u, n \rangle = 0$. On a:

$$\langle u, n \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha \langle i, n \rangle + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{\langle i, n \rangle} = -3.$$

Donc

$$\begin{aligned} u &= -3i + n = -2i - j + k \Rightarrow \|u\| = \sqrt{6} \\ r(u) &= 3j + n = i + 2j + k \Rightarrow \langle u, r(u) \rangle = -3 \end{aligned}$$

Pour déterminer l'angle de la rotation, on écrit que:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, r(u) \rangle}{\|u\| \|r(u)\|} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{2\pi}{3}$$

Pour déterminer θ , on calcule $\sin(\theta)$. Pour cela, on calcule $v = n \wedge u$. On a, alors la bilinéarité du produit vectoriel:

$$\begin{aligned} v &= n \wedge (-3i + n) \\ &= -3n \wedge i \\ &= -3(i - j + k) \wedge i \\ &= 3j \wedge i - 3k \wedge i \\ &= -3k - 3j \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\|v\| = 3\sqrt{2}.$$

La famille $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{n}{\|n\|}\right)$ est une base orthonormale directe et on a:

$$\frac{\langle r(u), v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \sin(\theta).$$

Or par calculs, $r(u) = 3j + n$ et donc

$$\begin{aligned} \langle r(u), v \rangle &= \langle 3j + n, v \rangle \\ &= 3 \langle j, v \rangle \\ &= 3 \langle j, -3k - 3j \rangle \\ &= -9. \end{aligned}$$

Doù:

$$\sin \theta = \frac{-9}{\sqrt{6} \times 3\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3}.$$

Donc r est la rotation d'axe dirigé par n et d'angle $\theta = -\frac{2\pi}{3}$. ■

Exercice 7. On pose $\dim E = 3$ et on munit E d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

- Rappeler la définition du produit vectoriel $u \wedge v$ de deux vecteurs u, v de E et ses propriétés.

Réponse.

Par définition, $y = u \wedge v$ est l'unique vecteur de E tel que:

$$\forall x \in E, \det(u, v, x) = \langle y, x \rangle. \quad (1)$$

On en déduit en particulier:

- Si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$. En effet, dans ce cas:

$$\forall x \in E, \langle u \wedge v, x \rangle = \det(u, v, x) = 0.$$

En particulier, si $x = u \wedge v$, cette relation implique que $\|u \wedge v\| = 0$.

- $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v . En effet, en remplaçant x par u puis par v dans (1), on obtient successivement:

$$\langle u \wedge v, u \rangle = \det(u, v, u) = 0, \quad \langle u \wedge v, v \rangle = \det(u, v, v) = 0$$

- Le produit vectoriel est une application bilinéaire. Cela découle de la propriété du déterminant qui est forme multilinéaire (linéaire par rapport à chacune de ses variable).
- $u \wedge v = -v \wedge u$. De nouveau, par propriété du déterminant.
- Si u et v sont orthonormaux, alors $\|u \wedge v\| = 1$ et $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormale directe. (Exercice!)

- Si u et v sont orthogonaux, alors $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\|$. En effet, d'après ce qui précède, on a $\left\| \frac{u}{\|u\|} \wedge \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$.

■

2. Pour tout $a = (a_1, a_2, a_3) \in E \setminus \{0\}$, on définit l'endomorphisme f_a de E par:

$$f_a(x) = a \wedge x, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in E.$$

Justifier que $\ker(f_a) = \langle a \rangle$.

Réponse. D'après la question précédente,

$$f_a(x) = a \wedge x = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda a \Leftrightarrow \ker(f_a) = \langle a \rangle.$$

■

3. Soit $\mathcal{B}' = \left(\frac{a}{\|a\|}, v, w \right)$ une base orthonormée directe de E .

(a) Déterminer la matrice A_a de f_a par rapport à \mathcal{B}' et calculer A_a^2 .

Réponse. Comme $\mathcal{B}' = \left(\frac{a}{\|a\|}, v, w \right)$ une base orthonormée directe de E , on a:

$$\frac{a}{\|a\|} \wedge v = w, \quad v \wedge w = \frac{a}{\|a\|}, \quad w \wedge \frac{a}{\|a\|} = -\frac{a}{\|a\|}.$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} f_a\left(\frac{a}{\|a\|}\right) &= \frac{a \wedge a}{\|a\|} = 0 \\ f_a(v) &= a \wedge v = \|a\| \frac{a}{\|a\|} \wedge v = \|a\| w \\ f_a(w) &= a \wedge w = \|a\| \frac{a}{\|a\|} \wedge w = -\|a\| \frac{a}{\|a\|}. \end{aligned}$$

Donc

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}.$$

■

(b) En déduire l'expression de la matrice:

$$e^{A_a} := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A_a^n.$$

Réponse. On note d'abord que la série de terme général $\frac{1}{n!} A_a^n$ converge normalement dans $\mathcal{L}(E)$ puisque

$$\left\| \frac{1}{n!} A_a^n \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{\|A_a\|_{\mathcal{L}(E)}^n}{n!}, \quad \forall n \geq 0,$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{\|A_a\|_{\mathcal{L}(E)}^n}{n!} = e^{\|A_a\|_{\mathcal{L}(E)}}.$$

Cela justifie la définition de e^{A_a} comme une série. Ensuite, la convergence étant assurée, on a:

$$A_a^0 = I_3, \quad A_a = \|a\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_a^2 = -\|a\|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{2n} = (-1)^n \|a\|^{2n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{2n+1} = (-1)^n \|a\|^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right., \quad n \geq 0.$$

On a alors:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A_a^n &= I_3 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)!} A_a^{2n} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} A_a^{2n+1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \|a\|^{2n}}{(2n)!} & - \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \|a\|^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ 0 & \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \|a\|^{2n+1}}{(2n+1)!} & 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \|a\|^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\|a\|) & -\sin(\|a\|) \\ 0 & \sin(\|a\|) & \cos(\|a\|) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

car on sait que

$$\sin(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

4. Montrer que e^{A_a} est une rotation et en donner les éléments caractéristiques.

Réponse. Par le cours, e^{A_a} est une rotation d'axe dirigé par $\frac{a}{\|a\|}$ et d'angle $\theta = \|a\| [2\pi]$. ■

1 Géométrie euclidienne dans le plan

Dans les exercices qui suivent, on se place dans un plan affine euclidien \mathcal{P} .

Exercice 1 (Théorème d'Al Kashi). Soit ABC un triangle non dégénéré. On pose $AB = c, AC = b, BC = a$. Montrer que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}).$$

Réponse. On écrit:

$$a^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle.$$

Or $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}\right)$, $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = b^2$ et $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$. On arrive donc à la relation demandée en posant $\widehat{A} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$. ■

Exercice 2. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes de \mathcal{P} .

- On suppose que $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$. Quelle est la transformation $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ ($s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}'}$ sont les réflexions d'axes \mathcal{D} et \mathcal{D}' respectivement)?

Réponse. Soit $M \in \mathcal{P}$ et Δ la droite perpendiculaire à \mathcal{D} issue de M . On note $A = \Delta \cap \mathcal{D}$, $B = \Delta \cap \mathcal{D}'$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Le vecteur $\vec{u} \in \overline{\mathcal{D}}^\perp$ est indépendant de M . Soit $M_1 = s_{\mathcal{D}}(M)$ et $M' = s_{\mathcal{D}'}(M_1)$. Alors:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{BM'}$$

Or $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{BM'}$. Donc

$$\overrightarrow{MM'} = 2(\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B}) = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}.$$

Par conséquent $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} = t_{2\vec{u}}$ où $t_{2\vec{u}}$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$.

Remarque 1. Réciproquement, toute translation $t_{\vec{u}}$ peut être obtenue comme produit de deux réflexions d'axes parallèles: on fixe une droite arbitraire \mathcal{D} de vecteur normal \vec{u} et on pose $\mathcal{D}' = t_{\vec{u}/2}(\mathcal{D})$. Alors d'après ce qui précède, $t_{\vec{u}} = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$. ■

- On suppose que \mathcal{D} et \mathcal{D}' se coupent en un point Ω . Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ un point quelconque et $M' = (s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}})(M)$. Calculer l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})}$ en fonction de $\widehat{(\vec{d}, \vec{d}')}$ où \vec{d} (resp. \vec{d}') est un vecteur directeur unitaire de \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}').

Réponse. Soit $M_1 = s_{\mathcal{D}}(M)$ et $M' = s_{\mathcal{D}'}(M_1)$. On a, puisque $s_{\mathcal{D}}$ et $s_{\mathcal{D}'}$ et que $\Omega = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$:

$$\Omega M = \Omega M_1 = \Omega M'.$$

De plus:

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{d})} + \widehat{(\vec{d}, \overrightarrow{\Omega M_1})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega M_1}, \vec{d}')} + \widehat{(\vec{d}', \overrightarrow{\Omega M'})}$$

Or, puisque les réflexions conservent les angles géométriques, $\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{d})} = \widehat{(\vec{d}, \overrightarrow{\Omega M_1})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{\Omega M_1}, \vec{d}')} = \widehat{(\vec{d}', \overrightarrow{\Omega M'})}$. D'où:

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} = 2\left(\widehat{(\vec{d}, \overrightarrow{\Omega M_1})} + \widehat{(\overrightarrow{\Omega M_1}, \vec{d}')}\right) = 2\widehat{(\vec{d}, \vec{d}')} = \theta$$

On en déduit que $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} = r_{\Omega, \theta}$, la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = 2\widehat{(\vec{d}, \vec{d}')}$.

Remarque 2. Si $r_{\Omega, \theta}$ est la rotation de centre Ω et d'angle θ , on peut l'obtenir comme produit de deux réflexions: Soit \mathcal{D} une droite quelconque passant par Ω et dirigée par \vec{d} et \mathcal{D}' une droite passant par Ω et dirigée par \vec{d}' tel que $\widehat{(\vec{d}, \vec{d}')} = \theta/2$. Alors d'après ce qui précède, $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} = r_{\Omega, \theta}$. ■

Exercice 3. Soit f une isométrie de \mathcal{P} . Montrer que:

1. Si f a trois points fixes non alignés alors $f = I_{\mathcal{P}}$ (identité de \mathcal{P}).

Réponse. Cela est vrai pour toute application affine, en particulier pour les isométries du plan. ■

2. Si f a deux points fixes distincts A et B et $f \neq I_{\mathcal{P}}$ alors f est la réflexion d'axe la droite (AB) .

Réponse. Montrons que si f a deux points fixes distincts A et B et $f \neq I_{\mathcal{P}}$, alors $\text{fix}(f) = (AB)$. Puisque f est affine:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha A + (1 - \alpha) B) = \alpha f(A) + (1 - \alpha) f(B) = \alpha A + (1 - \alpha) B.$$

Or

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha A + (1 - \alpha) B.$$

Donc tous les points de la droite (AB) sont fixes pour f . D'après la question précédente, ce sont les seuls points fixes de f .

Soit $M \notin (AB)$ et $M' = f(M)$. Comme f est une isométrie, on a:

$$AM' = f(A) f(M) = AM, \quad BM' = f(B) f(M) = BM.$$

Donc A et B appartiennent à la médiatrice du segment $[MM']$ et il s'ensuit que la droite (AB) est la médiatrice de $[MM']$. Par conséquent, f est la réflexion d'axe (AB) . ■

3. Si f a un unique point fixe A alors f est une rotation de centre A .

Réponse. f ayant A pour unique point fixe, on a, pour $B \neq A$: $f(B) = B' \neq B$. Soit $I = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B'$, $\mathcal{D}' = (AI)$ et $s_{\mathcal{D}'}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}' = (AI)$. On a,

$$s_{\mathcal{D}'} \circ f(A) = A \text{ et } s_{\mathcal{D}'} \circ f(B) = s_{\mathcal{D}'}(B') = B.$$

Donc $s_{\mathcal{D}'} \circ f$ a (au moins) deux points fixes: elle est donc, d'après la question précédente, soit l'identité, soit la réflexion d'axe $\mathcal{D} = (AB)$. Si $s_{\mathcal{D}'} \circ f = I_{\mathcal{P}}$ alors $f = s_{\mathcal{D}'}$ et ceci est impossible car f a alors plus d'un point fixe. Donc $s_{\mathcal{D}'} \circ f = s_{\mathcal{D}}$ puis $f = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$. Comme $\mathcal{D}' \cap \mathcal{D} = A$, d'après l'exercice précédent, f est la rotation de centre A et d'angle $\theta = 2(\widehat{\vec{d}, \vec{d}'})[2\pi]$. ■

4. Si f n'a aucun point fixe, alors f est soit une translation soit une symétrie glissée.

Réponse. Si f n'a aucun point fixe, on a $A' = f(A) \neq A$ pour un $A \in \mathcal{P}$ donné. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{A'A}$. Alors

$$t_{\vec{u}} \circ f(A) = \vec{u} + A' = A.$$

Alors $t_{\vec{u}} \circ f$ est soit l'identité, soit une rotation de centre A , soit une réflexion. Si $t_{\vec{u}} \circ f$ est une rotation r alors $f = t_{\vec{u}} \circ r$ est une rotation (voir une démonstration à la fin de cette question). Ceci est impossible puisque f n'a aucun point fixe. Si $t_{\vec{u}} \circ f$ est l'identité, alors $f = t_{\vec{u}}$ et si $t_{\vec{u}} \circ f$ est réflexion, alors f est une symétrie glissée (même si $\vec{u} \notin \ker(f - id_{\mathbb{E}})$: voir la proposition qui suit).

Proposition 3. Soit $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, $r_{\Omega, \theta}$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et $s_{\mathcal{D}}$ une réflexion d'axe \mathcal{D} . Alors:

(a) $t_{\vec{u}} \circ r_{\Omega, \theta}$ est une rotation.

(b) $t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}}$ est une réflexion.

Preuve. Soit Δ une droite passant par Ω et de vecteur normal \vec{u} et Δ' une droite passant par Ω telle que $(\vec{d}', \vec{d}) = \theta/2[\pi]$ où \vec{d}' et \vec{d} sont deux vecteurs directeurs de Δ' et Δ respectivement. Alors, d'après l'exercice précédent: $r_{\Omega, \theta} = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$. Soit $\Delta'' = t_{\vec{u}/2}(\Delta)$. Alors, de nouveau d'après l'exercice précédent, $t_{\vec{u}} = s_{\Delta''} \circ s_{\Delta}$. Donc:

$$t_{\vec{u}} \circ r_{\Omega, \theta} = s_{\Delta''} \circ s_{\Delta} \circ s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta''} \circ s_{\Delta'}.$$

Comme $\Delta'' \parallel \Delta$, il s'ensuit que Δ' et Δ'' sont concourantes en un point Ω' puisque Δ' et Δ se coupent en Ω . De plus $(\vec{d}'', \vec{d}') = (\vec{d}', \vec{d})[\pi]$. Donc $t_{\vec{u}} \circ r_{\Omega, \theta} = r_{\Omega', \theta}$.

De la même manière, soit \vec{d} un vecteur unitaire directeur de \mathcal{D} et \vec{n} un vecteur unitaire normal à \mathcal{D} . Alors, puisque (\vec{d}, \vec{n}) est une base orthonormale de $\vec{\mathcal{P}}$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = a\vec{d} + b\vec{n}$.

Posons $\vec{v} = a\vec{d}$ et $\vec{w} = b\vec{n}$. Alors $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ et $t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}}$. Or, comme \vec{w} est un vecteur normal à \mathcal{D} , on peut écrire que, si $\mathcal{D}' = t_{\vec{w}/2}(\mathcal{D})$ alors $t_{\vec{w}} = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ et, par conséquent:

$$t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}'}$$

Donc

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ s_D = t_{\vec{v}} \circ s_{D'}.$$

Puisque $\vec{v} \in \vec{D}' = \vec{D}$, $t_{\vec{u}} \circ s_D$ est une symétrie glissée d'axe $D' = t_{\vec{w}/2}(D)$ et de vecteur $\vec{v} \in \vec{D}' = \vec{D}$ avec $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, ($\vec{w} \in \vec{D}^\perp$). Ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

Exercice 4. Soient $r_{\Omega, \theta}$ et $r_{\Omega', \theta'}$ deux rotations affines telles que $\Omega \neq \Omega'$.

1. En utilisant qu'une rotation affine est le produit de deux réflexions, montrer que $r_{\Omega', \theta'} \circ r_{\Omega, \theta}$ est soit une translation, soit une rotation (on déterminera une condition nécessaire et suffisante pour que $r_{\Omega', \theta'} \circ r_{\Omega, \theta}$ soit une translation).

Réponse. Soit $\Delta = (\Omega\Omega')$ et $\vec{\delta}$ un vecteur directeur de Δ . On définit la droite D de vecteur directeur \vec{d} et la droite D' de vecteur directeur \vec{d}' telle que:

$$\begin{aligned} \Omega &\in D, \quad 2(\widehat{\vec{d}, \vec{\delta}}) = \theta [2\pi], \\ \Omega' &\in D', \quad 2(\widehat{\vec{\delta}, \vec{d}'}) = \theta' [2\pi]. \end{aligned}$$

Alors,

$$r_{\Omega, \theta} = s_D \circ s_{D'}, \quad r_{\Omega', \theta'} = s_{D'} \circ s_D.$$

D'où

$$r_{\Omega', \theta'} \circ r_{\Omega, \theta} = s_{D'} \circ s_D \circ s_D \circ s_{D'} = s_{D'} \circ s_{D'}.$$

Si $D' \parallel D$ alors $r_{\Omega', \theta'} \circ r_{\Omega, \theta}$ est une translation d'après l'exercice précédent. Sinon, c'est une rotation. On a:

$$D' \parallel D \Leftrightarrow \theta + \theta' = 0 [2\pi].$$

2. Si $r_{\Omega', \theta'} \circ r_{\Omega, \theta}$ est une rotation, trouver une construction du centre de la rotation $r_{\Omega', \theta'} \circ r_{\Omega, \theta}$.

Réponse. Dans la construction précédente, le centre O de la rotation est le point d'intersection des droites D et D' car:

$$s_{D'} \circ s_D(O) = O.$$

Exercice 5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , trouver l'expression d'une rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ .

Même question pour une réflexion d'axe la droite $D_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \theta [\pi]\}$.

Réponse. On a pour tout M du plan complexe d'affixe z et M' d'affixe z' :

$$M' = r_{\Omega, \theta}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\widehat{\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}}) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) = \theta \end{cases}$$

Ces deux dernières conditions sont équivalentes à:

$$\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega.$$

Pour la réflexion, on note d'abord que $O \in D_\theta$. Puis, notons que si $\theta = 0 [\pi]$ alors

$$M' = s_{D_0}(M) \Leftrightarrow z' = \bar{z}.$$

On sait que $s_{D_0} \circ s_{D_\theta} = r_{O, 2\theta}$. Donc $s_{D_\theta} = s_{D_0} \circ r_{O, 2\theta}$. D'après la question précédente:

$$M' = s_{D_\theta}(M) = s_{D_0} \circ r_{O, 2\theta}(M) \Leftrightarrow z' = \overline{e^{2i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega}$$

Donc, finalement:

$$z' = e^{-2i\theta}(\bar{z} - \bar{z}_\Omega) + \bar{z}_\Omega.$$

Exercice 6. Soit \mathcal{D} une droite du plan et soient A et B deux points en dehors de \mathcal{D} et du même côté de \mathcal{D} . Construire un point M de \mathcal{D} tel que $AM + MB$ soit minimal.

Réponse. On pose $A' = s_{\mathcal{D}}(A)$. Alors: $AM + MB = A'M + MB$ et cette somme est minimale lorsque A', M et B sont alignés. Donc le point M qui réalise ce minimum est l'intersection des droites \mathcal{D} et $(A'B)$. ■

Exercice 7. Trouver toutes les isométries de P qui préservent:

1. un segment $[AB]$ (Groupe diédral D_2);

Réponse. Appliquer le théorème 5.28 p. 97 du cours avec $n = 2$. ■

2. un triangle équilatéral, un carré, un polygone régulier à $n (\geq 5)$ côtés (Groupe diédral d'ordre $n \geq 3$);

Réponse. Idem. ■

3. un losange ou un rectangle non carrés.

Réponse. À faire... ■

2 Géométrie euclidienne en dimension $n \geq 3$

Dans tout ce qui suit, \mathcal{E} espace affine euclidien de dimension n , dirigé par E .

Exercice 8. Dans l'espace \mathcal{E} rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par

$$M(x, y, z) \longmapsto M'(x', y', z')$$

avec:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{cases}$$

1. L'application f admet-elle des points fixes?

Réponse. On pose

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

X est un point fixe si, et seulement si $(I_3 - A)X = B$.

Or, par calcul: $\det(I_3 - A) = 0$. Donc, ou bien le système $(I_3 - A)X = B$ n'admet aucune solution, ou bien il en admet une infinité. Or

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}.$$

On constate que $L_1 + L_2 = -3L_3$. Le système n'admet donc pas de solution puisque B ne vérifie pas une telle condition ($1 + 1 \neq -3(-3) = 9$). f n'a donc pas de point fixe. ■

2. Montrer que \vec{f} est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

Réponse. La matrice de \vec{f} est $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. On vérifie que A est une matrice orthogonale (les

vecteurs colonnes sont unitaires et deux-à-deux orthogonaux) et que $\det(A) = 1$: \vec{f} est donc une rotation (puisque'elle n'est pas l'identité: voir cours Table 4.2. p. 43).

En résolvant le système $AX - X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\ker(\vec{f} - id_E) = \text{Vect} \left\{ \vec{u} = \frac{3}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \vec{D}$. Donc,

l'axe de la rotation est la droite vectorielle \vec{D} .

L'angle θ de cette rotation vérifie:

$$1 + 2 \cos \theta = \text{trace}(A) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow \theta = \pm \arccos\left(-\frac{5}{6}\right).$$

Le plan vectoriel $\vec{P} = \vec{D}^\perp$ a pour équation

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + z = 0$$

Donc

$$\vec{v} = \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \vec{P}.$$

De plus

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{110}} \\ \frac{10}{\sqrt{110}} \\ -\frac{3}{\sqrt{110}} \end{pmatrix}$$

et on a, après calculs:

$$\sin \theta = \langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{55}{9\sqrt{110}} > 0,$$

et il suit que:

$$\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right).$$

\vec{f} est donc la rotation d'axe \vec{D} orienté par $\vec{u} = \frac{3}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$. ■

3. En déduire la nature de l'isométrie f (on en précisera tous les éléments).

Réponse. D'après le cours (voir Table 5.2. p. 96), f est un vissage: $f = t_{\vec{a}} \circ r_{D,\theta}$. On vérifie que son axe est $D = O + \vec{D}$ (dirigé par $\vec{u} = \frac{3}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$), que l'angle de la rotation est $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$ et que la $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. ■

Exercice 9. Dans l'espace \mathcal{E} rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ donné par:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y + z) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) + \frac{3}{2} \\ z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit s_Π la réflexion de plan Π d'équation $y + z = 1$.

Montrer que $f = s_\Pi \circ r$ où r est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

Réponse. Déterminons l'expression analytique de s_Π . Soit $M = (x, y, z)$. Un vecteur normal à Π est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a:

$$M' = (x', y', z') = s_\Pi(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R} : \overline{MM'} = t\vec{n} \\ \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M' \in \Pi \end{cases}.$$

Analytiquement, cela revient à écrire que:

$$M' = s_\Pi(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y + t \\ z' = z + t \\ \frac{y' + y}{2} + \frac{z' + z}{2} = 1 \end{cases}$$

D'où:

$$M' = s_\Pi(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -z + 1 \\ z' = -y + 1 \\ t = 1 - y - z \end{cases}$$

Donc

$$s_{\Pi}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} s_{\Pi} \circ f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-y+z) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) + \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) + \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-y+z) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) - \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z\right) - \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Montrons à présent que $s_{\Pi} \circ f$ est une rotation. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a, après calculs:

$$\ker(I_3 - A) = \text{Vect} \left\{ \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Si $s_{\Pi} \circ f$ est une rotation, alors son axe D est dirigé par \vec{d} et $s_{\Pi} \circ f(M) = M$ pour tout $M \in D$. Cherchons un point $M_0 \in P = O + \ker(I_3 - A)^\perp$, c'est-à-dire un point $M_0 = (x_0, y_0, -y_0)$, tel que $(I_3 - A)(M_0) = B$. On trouve, en résolvant le système: $M_0 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Donc $D = M_0 + t \vec{d}$.

L'angle θ de la rotation $s_{\Pi} \circ f$ vérifie:

$$1 + 2 \cos(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Pour déterminer le signe de $\sin(\theta)$, on remarque que $\vec{u} = \sqrt{2} \overrightarrow{OM_0} \in \vec{P} = \vec{D}^\perp$ est unitaire. On a alors:

$$\sin(\theta) = \left\langle A\vec{u}, \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|} \wedge \vec{u} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 > 0$$

Donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. ■

Exercice 10. Composition.

- Dans l'espace ($n = 3$), on compose deux réflexions. Quelle est l'isométrie obtenue suivant que les plans de ces réflexions sont parallèles ou non?

Réponse. Soient s_P et $s_{P'}$ deux réflexions de plan P et P' respectivement.

Si $P \parallel P'$ ($\Leftrightarrow \vec{P} = \vec{P}'$), soit \vec{u} l'unique vecteur de \vec{P}^\perp tel que $t_{\vec{u}}(P) = P'$. En procédant exactement comme dans l'exercice 2, on obtient que $s_{P'} \circ s_P = t_{2\vec{u}}$.

Sinon, soit $D = P \cap P'$ et $\vec{\Pi} = \vec{D}^\perp$. Tous les points de D sont fixes pour $s_{P'} \circ s_P$. Soit M un point quelconque et considérons le plan $\Pi = M + \vec{\Pi}$ et $\Omega = \Pi \cap D$. On se ramène au cas de la dimension 2 (voir l'exercice 2) pour montrer que $s_{P'} \circ s_P$ est la rotation d'axe D et d'angle $\theta = 2(\vec{\delta}, \vec{\delta'})$ où $\vec{\delta}$ et $\vec{\delta'}$ sont les vecteurs directeurs des droites $\Delta = \Pi \cap P$ et $\Delta' = \Pi \cap P'$ respectivement. ■

2. Dans l'espace, on compose trois réflexions de plans parallèles. Quelle est l'isométrie obtenue?

Réponse. Si P, P' et P'' sont trois plans parallèles, alors d'après la question précédente,

$$s_{P'} \circ s_P = t_{2\vec{u}}$$

où \vec{u} est l'unique vecteur de \vec{P}^\perp tel que $t_{\vec{u}}(P) = P'$. On a donc:

$$s_{P''} \circ s_{P'} \circ s_P = s_{P''} \circ t_{2\vec{u}}.$$

Soit $P_0 = t_{\vec{u}}(P'')$. Comme $\vec{u} \in \vec{P}''^\perp$, on peut montrer comme dans la prouve de la proposition 3 que $s_{P''} \circ t_{2\vec{u}} = s_{P_0}$. ■

3. On considère deux rotations affines $r_{\mathcal{D},\theta}$ et $r_{\mathcal{D}',\theta'}$.

- (a) On suppose que \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont coplanaires. Montrer que $r_{\mathcal{D}',\theta'} \circ r_{\mathcal{D},\theta}$ est une rotation (dont on donnera l'angle et une construction de l'axe) ou une translation.

Réponse. Utiliser la question 1 et la solution de l'exercice 4. ■

- (b) On suppose que \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas coplanaires. Montrer que $r_{\mathcal{D}',\theta'} \circ r_{\mathcal{D},\theta}$ est un vissage dont on déterminera l'angle, l'axe et le vecteur directeur de l'axe.

Réponse. À faire... ■

Introduction à la géométrie hyperbolique

Définition 1. On note \mathbb{H} le demi-plan de Poincaré défini par

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

Définition 2. On appelle chemin (dans \mathbb{H}) toute application continue $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{H}$. Un chemin γ est dit (de classe) C^1 si, en tant que fonction, γ est de classe C^1 par morceaux.

Remarque 3. Soit $I = (a, b)$ un intervalle réel. On rappelle qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dite de classe C^1 par morceaux si f est continue sur I et qu'il existe des réels $t_1 < \dots < t_n$ appartenant à I de sorte que pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, f est de classe C^1 sur $[t_i, t_{i+1}]$, sur $(a, t_1]$ et sur $[t_n, b)$.

Définition 4. Pour tout $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{H}$ un chemin C^1 , on pose

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|}{y(t)} dt$$

où $y(t)$ désigne la partie imaginaire de $\gamma(t)$. On dit que $h(\gamma)$ est la longueur hyperbolique de γ . On pose alors $d(u, v) = \inf_{\gamma \in C^1} h(\gamma)$ où γ relie u à v .

1. (2 points) On admet que d sépare les points. Montrer que l'application d définit une distance sur \mathbb{H} .

Indication : On pourra remarquer que l'on peut concaténer deux chemins en utilisant le paramétrage suivant

$$\varphi : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow & [0; 1] \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0; 0.5] \\ 2t - 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Solution: Montrons d'abord d est symétrique. Soient $u, v \in \mathbb{H}$, γ un chemin C^1 reliant u à v . Posons $\sigma : t \mapsto \gamma(1-t)$; c'est un chemin C^1 reliant v à u . De plus, le changement de variable $t' = 1-t$ dans l'intégrale définissant $h(\gamma)$ montre que l'on a $h(\gamma) = h(\sigma) \geq d(v, u)$. Cette inégalité étant vérifiée pour tout γ , il suffit maintenant de passer à l'inf pour obtenir $d(u, v) \geq d(v, u)$. L'inégalité $d(u, v) \leq d(v, u)$ s'obtient de façon symétrique.

Montrons que d vérifie l'inégalité triangulaire. Soient $u, v, w \in \mathbb{H}$. Soient γ_1, γ_2 des chemins reliant respectivement u à v et v à w . Notons y_1 et y_2 les parties imaginaires de γ_1 et γ_2 . On pose

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit que σ est un chemin C^1 reliant u à w . De plus, on a

$$h(\sigma) = \int_0^{1/2} 2 * \frac{\left| \frac{d\gamma_1}{dt} \right|(2t)}{y_1(2t)} dt + \int_{1/2}^1 2 * \frac{\left| \frac{d\gamma_2}{dt} \right|(2t-1)}{y_2(2t-1)} dt.$$

Les changements de variables $t' = 2t$ et $t' = 2t - 1$ permettent d'identifier les deux intégrales comme $h(\gamma_1)$ et $h(\gamma_2)$. En particulier, on a $h(\sigma) \leq h(\gamma_1) + h(\gamma_2)$ puis, par définition de la borne inférieure, on obtient $d(u, w) \leq h(\gamma_1) + h(\gamma_2)$. Passant à la borne inférieure sur γ_1 puis sur γ_2 , on obtient l'inégalité triangulaire recherchée.

Définition 5. On appelle groupe des transformations l'ensemble suivant muni de la loi \circ de composition des applications

$$\mathbb{PSL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}.$$

Remarque 6. Dans la littérature, ces applications sont habituellement appelées homographies.

2. (1 point) Montrer que $(\mathbb{PSL}_2(\mathbb{R}), \circ)$ est effectivement un groupe. On notera T^{-1} l'inverse de toute transformation T .
3. (0.5 points) Montrer que l'on a

$$\mathbb{PSL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Solution: Il suffit de diviser chaque coefficient par $\delta = \sqrt{ad - bc}$: on a effectivement

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

avec $a' = \frac{a}{\delta}, b' = \frac{b}{\delta}$ etc et on a bien $a'd' - b'c' = \frac{ad - bc}{\delta^2} = 1$.

4. (0.5 points) Montrer que \mathbb{H} est stable par toute transformation $T \in \mathbb{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Solution: Notons $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. En multipliant par le conjugué de $cz + d$, on obtient

$$T(z) = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}$$

d'où l'on tire

$$\text{Im}(T(z)) = \frac{(ad - bc) \text{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} > 0.$$

5. (1 point) Montrer que les transformations sont des isométries pour la distance hyperbolique, c'est-à-dire que l'on a

$$\forall T \in \mathbb{PSL}_2(\mathbb{R}), \forall u, v \in \mathbb{H}, \quad d(T(u), T(v)) = d(u, v).$$

Solution: En préservant les notations de la solution précédente, on montre par le calcul que l'on a

$$\frac{dT}{dz}(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Soient $u, v \in \mathbb{H}, \gamma$ un chemin C^1 reliant u à v . Remarquons que, par la question précédente, $T \circ \gamma$ est un chemin C^1 reliant $T(u)$ à $T(v)$.

Par la règle de la chaîne, on obtient alors

$$h(T \circ \gamma) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dT \circ \gamma}{dt}(t) \right|}{\text{Im}(T(\gamma(t)))} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \frac{dT}{dz}(\gamma(t)) \right|}{\text{Im}(T(\gamma(t)))} dt.$$

Le calcul de la solution précédente et le calcul de $\frac{dT}{dz}$ donne alors $h(T \circ \gamma) = h(\gamma)$. En particulier, on a $d(T(u), T(v)) \leq h(T \circ \gamma) \leq h(\gamma)$. En passant à la borne inférieure, on obtient $d(T(u), T(v)) \leq d(u, v)$. L'inégalité inverse s'obtient en appliquant le résultat fraîchement obtenu à $u' = T^{-1}(u), v' = T^{-1}(v)$ à la place de u, v .

6. Soit \mathcal{C} le demi-cercle de centre $c \in \mathbb{R}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ défini par

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{H} : |z - c| = r\}$$

(a) (0.5 points) On suppose que l'on a $c = 0, r = 1$. Montrer que l'application T_0 définie par

$$T_0(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}$$

est une transformation vérifiant $T_0(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}_+^*$.

Solution: Il suffit d'écrire $T_0(z)$ comme une seule fraction pour voir que T_0 est une transformation.

Soit $z \in \mathcal{C}$. Il existe $t \in]0, \pi[$ tel que $z = e^{it}$. On a d'abord

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-e^{it}} = \frac{1}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = \frac{-e^{-it/2}}{2i \sin(t/2)}$$

dont la partie réelle est

$$\frac{-\sin(-t/2)}{2 \sin(t/2)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la partie réelle de $T_0(z)$ est 0. On a donc $T_0(z) \in i\mathbb{R} \cap \mathbb{H}$, c'est-à-dire que l'on a $T_0(z) \in i\mathbb{R}_+^*$.

(b) (0.5 points) En déduire que, dans le cas général, il existe une transformation T_c vérifiant $T_c(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}_+^*$.

Solution: Posons $T = \frac{z-c}{r}$. On voit que T est une transformation et que $T_c = T_0 \circ T$ convient puisque T envoie le \mathcal{C} sur le demi-cercle supérieur centré en 0 et de rayon 1.

Définition 7. Soient $u, v \in \mathbb{H}$. On appelle géodésique (reliant u à v) tout chemin γ de classe C^1 vérifiant

$$\gamma(0) = u, \quad \gamma(1) = v, \quad h(\gamma) = d(u, v).$$

7. Soient $u, v \in \mathbb{H}$.

(a) (0.5 points) Supposons que l'on a $\operatorname{Re}(u) = \operatorname{Re}(v)$. Montrer qu'il y a une géodésique reliant u à v et qu'elle est donnée par le segment $[u, v]$.

Indication : on pourra minorer $|\gamma'|$ par $|y'|$.

Solution: Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a $\operatorname{Im}(u) \leq \operatorname{Im}(v)$. Posons $\gamma_0(t) = tv + (1-t)u$, de sorte que γ_0 est un chemin C^1 reliant u à v . Notons y_0 sa partie imaginaire. De plus, on a $\gamma_0'(t) = v - u = y_0'(t) > 0$ puisque l'on a $\operatorname{Re}(u) = \operatorname{Re}(v)$ (faire un dessin pour le comprendre sans faire de calcul). On calcule maintenant

$$h(\gamma_0) = \int_0^1 \frac{y_0'(t)}{y_0(t)} dt = \ln \left(\frac{\operatorname{Im}(v)}{\operatorname{Im}(u)} \right).$$

Soit γ un chemin C^1 reliant u à v et notons y sa partie imaginaire. On a, en minorant $|\gamma'(t)|$ par $|y'(t)|$ puis par $y(t)$

$$h(\gamma) \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \geq \ln \left(\frac{\operatorname{Im}(v)}{\operatorname{Im}(u)} \right) = h(\gamma_0)$$

ce qui conclut.

(b) (1.5 points) Supposons que l'on a $\operatorname{Re}(u) \neq \operatorname{Re}(v)$. Montrer qu'il y a un unique cercle \mathcal{C} de centre $c \in \mathbb{R}$ passant par u et v . Montrer qu'il y a une géodésique reliant u à v et qu'elle est donnée par ce cercle.

Solution: Il s'agit de montrer qu'il y a un unique $c \in \mathbb{R}$ qui soit équidistant de u et v . Or, la médiatrice de u et v (dans le plan euclidien) n'est pas parallèle à l'axe des réels puisque l'on a $\operatorname{Re}(u) \neq \operatorname{Re}(v)$. Ainsi, elle coupe l'axe des réels en unique point, ce qui répond à la première question.

Notons $u = c + re^{ia}$, $v = c + re^{ib}$ pour certains réels r, t, x . Puisque l'on a $u, v \in \mathbb{H}$, on a $x, t \in]0; \pi[$. Soit γ le chemin C^1 donné par $\gamma(t) = c + re^{i(bt+a(1-t))}$. Rappelons que T_c désigne la transformation obtenue à la question 6. Par la question 5, il suffit de montrer que $T_c \circ \gamma$ est la géodésique reliant $T_c(u)$ à $T_c(v)$ (ce qui nous ramène au cas de la question précédente). Or, en reprenant la question 6, on voit que $T_c \circ \gamma$ décrit le segment $[T_c(u), T_c(v)]$ comme dans la question précédente.

8. Soient $u, v \in \mathbb{H}$.

(a) (0.5 points) Montrer que l'on a, pour toute transformation T :

$$|T(u) - T(v)| = |u - v| |T'(u)T'(v)|^{1/2}.$$

Solution: On écrit $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$. On rappelle que l'on a $T'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$. De plus, on a

$$T(u) - T(v) = \frac{au + b}{cu + d} - \frac{av + b}{cv + d} = \frac{ad(u - v) + bc(v - u)}{(cu + d)(cv + d)}$$

d'où le résultat demandé.

(b) (2 points) En déduire que l'on a

$$d(u, v) = \ln \left(\frac{|u - \bar{v}| + |u - v|}{|u - \bar{v}| - |u - v|} \right).$$

Solution: La question précédente montre que le membre de droite est invariant par T (au sens où le membre de droite garde la même valeur si l'on change les u en $T(u)$ et les v en $T(v)$). En effet, il suffit de poser $d = |T'(u)T'(v)|^{1/2} = |T'(u)T'(\bar{v})|^{1/2}$ et de multiplier la fraction par d/d .

Comme le membre de gauche est aussi invariant par T d'après la question 5, on se ramène au cas où $\operatorname{Re}(u) = \operatorname{Re}(v)$ en utilisant l'application T_c de la question 6. Or, dans ce cas, on a vu dans la question 7 que l'on a

$$d(u, v) = \left| \ln \left(\frac{\operatorname{Im}(v)}{\operatorname{Im}(u)} \right) \right|.$$

Il suffit donc de vérifier que, dans ce cas, le membre de droite de l'égalité recherchée est égal au membre de droite de la dernière égalité donnée.

(c) (0.5 points) Montrer que d sépare les points, c'est-à-dire que l'on a

$$\forall u, v \in \mathbb{H}, \quad d(u, v) = 0 \iff u = v.$$

Définition 8. On appelle droite de \mathbb{H} ou droite hyperbolique toute partie de \mathbb{H} qui est
 - soit l'intersection avec \mathbb{H} d'une droite verticale du plan \mathbb{C}
 - soit l'intersection avec \mathbb{H} et d'un cercle du plan \mathbb{C} centré en un réel.
 Deux droites hyperboliques sont dites parallèles si elles sont identiques ou disjointes.

Remarque 9. On peut voir ces définitions comme des extensions naturelles de ce que sont des droites et ce qu'est la notion de parallélisme dans le plan usuel. En effet, dans le plan usuel, les droites relient deux points de sorte que le chemin le plus court est donné par cette droite. De même, dans le plan usuel, deux droites distinctes sont soit d'intersection non vide - dans quel cas elles ne sont pas parallèles - soit d'intersection vide - dans quel cas elles sont parallèles.

9. (0.5 points) Montrer que par deux points distincts il passe une unique droite de \mathbb{H} . On admettra que, dans le plan euclidien, une droite coupe un cercle en au plus deux points.

Solution: Soient $u, v \in \mathbb{H}$. On distingue deux cas.

Si $\operatorname{Re}(u) = \operatorname{Re}(v)$, alors la droite (verticale) $\operatorname{Re}(u) + i\mathbb{R}_+^*$ passe u et v . Il n'y a clairement pas d'autre droite verticale qui passe par ces points. Il n'y a pas non plus de cercle (au sens euclidien) centré en un réel qui passe par u et v car si un tel cercle passe par u , il passe également par $\bar{u} \in \mathbb{C}$ et on ne peut pas avoir $\bar{u} \in \{u, v\}$ puisque l'on a $\operatorname{Im}(\bar{u}) < 0$.

10. (1 point) Soit \mathcal{D} une droite de \mathbb{H} et soit $z \in \mathbb{H} \setminus \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe une infinité de droite de \mathbb{H} passant par z et parallèle à \mathcal{D} .

Indication : Dans le cas où \mathcal{D} provient d'un cercle, on pourra ingénieusement faire varier le centre.

Solution: Traitons d'abord le cas où \mathcal{D} provient d'un cercle dans le plan euclidien dont l'on note c le centre et r le rayon. Par hypothèse, on a $|z - c| \neq r$. Ainsi, la droite hyperbolique $c + |z - c| \exp(i[0; \pi])$ n'intersecte pas \mathcal{D} . Notons $\gamma_c(t) = c + |z - c| \exp(it)$ et remarquons que l'application $(c, t) \mapsto \gamma_c(t)$ est continue. Ainsi, en posant $\varepsilon = ||z - c| - r|/2$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on a

$$|c - c'| < \delta \implies |\gamma_{c'}(t) - \gamma_c(t)| < \varepsilon.$$

En distinguant les cas selon que l'on a $|z - c| - r > 0$ ou non, on montre en utilisant l'inégalité triangulaire que l'on a $\gamma_{c'} - c \neq r$ pour tout c' vérifiant $|c - c'| < \delta$. En particulier, pour tout ces c' , la droite hyperbolique $c' + |z - c'| \exp(i[0; \pi])$ n'intersecte pas \mathcal{D} .

Lorsque \mathcal{D} provient d'une droite verticale, notons $c \in \mathbb{R}$ son point d'intersection avec l'axe des réels. Supposons sans perte de généralité que l'on a $\operatorname{Re}(z) > c$ (le cas $\operatorname{Re}(z) < c$ s'obtient par symétrie). Remarquons alors que l'on a

$$\operatorname{Re}(c' + |z - c'|e^{it}) > c' - |z - c'|$$

et que lorsque c' tend vers $+\infty$, un développement limité de la fonction racine carré donne

$$\begin{aligned} c' - |z - c'| &= c' - \sqrt{c'^2 - 2c' \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \\ &= c' - c' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{c'} + O(c^{-2})\right) \\ &= \operatorname{Re}(z) + o(1). \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque c' est suffisamment grand, on a $\operatorname{Re}(c' + |z - c'|e^{it}) > c$ ce qui montre que la droite hyperbolique $c' + |z - c'| \exp(i[0; \pi])$ n'intersecte pas \mathcal{D} .

11. (0.5 points) Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ trois droites hyperboliques. On suppose que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles à \mathcal{D}_3 . Est-il vrai que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles ?

Solution: Non, il suffit de faire un dessin avec trois cercles bien choisis.

Théorème de Hahn Banach et Krein Milman

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel normé réel de dimension finie.

Définition 1. On dit qu'une application $p : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une application sous linéaire si l'on a

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \quad p(x + y) &\leq p(x) + p(y) \\ \forall x \in E, \lambda > 0, \quad p(\lambda x) &= \lambda p(x). \end{aligned}$$

Définition 2. Soit C un convexe de E . On appelle jauge de C (ou jauge de Minkowski ou fonctionnelle de Minkowski) l'application p_C définie par

$$\forall x \in E, \quad p_C(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} x \in C \right\} \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}.$$

Définition 3. Soient A, B deux parties de E . On dira que l'hyperplan affine d'équation affine $f = c$ sépare A et B si l'on a

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \quad f(a) &\leq c \\ \forall b \in B, \quad f(b) &\geq c \end{aligned}$$

ou que l'on a cette même propriété en échangeant les rôles de A et B .
On dit que cet hyperplan les sépare strictement si l'on a

$$\sup_{a \in A} f(a) < c < \inf_{b \in B} f(b)$$

ou que l'on a cette même propriété en échangeant les rôles de A et B .

Remarque 4. On pourra remarquer que cette dernière propriété s'écrit aussi

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall (a, b) \in A \times B, \quad f(a) + \varepsilon \leq c \leq f(b) - \varepsilon.$$

1. Soit C un convexe ouvert de E contenant 0. Montrer que p_C est une application à valeurs réelles et sous linéaire. Montrer que l'on a

$$C = \{x \in E : p_C(x) < 1\}$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application sous linéaire. Soit $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire satisfaisant $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Montrer qu'il existe un prolongement g de f à E vérifiant $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Indication : On pourra raisonner par récurrence sur $\dim(F)$.

3. Soit C un convexe ouvert non vide de E et $x_0 \in E \setminus C$. Dédurre qu'il existe une forme linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in C, \quad f(x) < f(x_0).$$

En particulier, l'hyperplan d'équation $f = f(x_0)$ sépare C et $\{x_0\}$.

Indication : On pourra commencer par construire une forme linéaire sur $\text{Vect}(x_0)$ qui vérifie $f(x_0) = 1$ et relier cela aux questions précédentes.

4. Soient A, B deux convexes ouverts non vides disjoints. Démontrer ce qui précède qu'il existe un hyperplan affine séparant A et B .

Indication : On remarquera que l'ensemble suivant est convexe et ouvert dans E :

$$A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

5. Soient C un convexe fermé dans E , non vide et soit $x_0 \notin C$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine séparant strictement C et $\{x_0\}$.

Indication : On pourra considérer $C + B(0, \varepsilon)$ pour un ε bien choisi.

Définition 5. Soit C un convexe de E (possiblement de dimension infinie). On dit qu'une partie $X \subset C$ est extrémale dans C si l'on a

$$\forall t \in]0; 1[, \forall x, y \in C, \quad (tx + (1-t)y \in X \implies x \in X \text{ et } y \in X).$$

On dit qu'un point $s \in C$ est extrémal lorsque $\{s\}$ est extrémale, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\forall t \in]0; 1[, \forall x, y \in C, \quad (s = tx + (1-t)y \implies x = s = y.)$$

On note $\text{Ext}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C .

6. Soit E un espace vectoriel normé réel uniformément convexe (possiblement de dimension infinie), c'est-à-dire que l'on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \left(\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq 1 - \delta \right) \implies \|x - y\| \leq \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \left(\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| \geq \varepsilon \right) \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Montrer que $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité de E a pour ensemble de points extrémaux $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ la sphère unité de E .

7. Décrire l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (qui est l'ensemble des suites réelles bornées) et faire une remarque vis à vis de la question précédente.
8. Soit K un convexe compact non vide de E .

- (a) Notons \mathcal{F}_K l'ensemble des parties extrémales non vides fermées de K . On ordonne \mathcal{F}_K par

$$A \preceq B \iff B \subset A.$$

Montrer que \mathcal{F}_K muni de cette relation d'ordre est un ensemble inductif non vide. En déduire que \mathcal{F}_K admet un élément maximal.

- (b) Soit $A \in \mathcal{F}_K$ et $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Justifier que

$$B = \left\{ x \in A : T(x) = \sup_{y \in A} T(y) \right\}$$

existe et montrer que l'on a $B \in \mathcal{F}_K$.

- (c) En déduire que tout élément de \mathcal{F}_K est une partie réduite à un élément. Conclure que l'ensemble $\text{Ext}(K)$ est non vide.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et remarquer qu'étant donnés deux points distincts $x, y \in K$, il existe $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $T(x) \neq T(y)$.

- (d) Montrer que toute partie extrême de K contient un point extrême de K .
9. Montrer que l'on a

$$K = \overline{\text{Conv}(\text{Ext}(K))}.$$

Exercice 1. VRAI ou FAUX? Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. (2 pts) Dans un espace affine réel E de dimension 3, les droites D et D' d'équations paramétriques:

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 5 - 2t \end{cases} ; D' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -5t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

sont coplanaires.

Réponse. VRAI. Les droites D et D' sont coplanaires si, et seulement si, $D \parallel D'$ ou $D \cap D' \neq \emptyset$. Un point M de coordonnées (x, y, z) est dans $D \cap D'$ si, et seulement si, il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} 1 + t_2 = 1 + t_1 \\ 3 - t_2 = 3 - t_1 \\ -5t_2 - 1 = 5 - 2t_1 \end{cases} \Leftrightarrow t_2 = t_1 = -2.$$

On constate donc que le point de coordonnées $(-1, 5, 9)$ appartient aux deux droites: elles sont donc coplanaires. ■

2. (2 pts) Tout espace vectoriel peut naturellement être vu comme un espace affine.

Réponse. VRAI. Si \vec{V} est un espace vectoriel sur \mathbb{K} , on pose $E = \vec{V}$ et $\vec{E} = \vec{V}$ et on le munit de la loi externe

$$+ : E \times \vec{E} \rightarrow E \\ (A, \vec{u}) \mapsto A + \vec{u}$$

où $+$ est l'addition de \vec{V} . Les axiomes définissant un espace affine (voir Définition 1.1 du cours, p. 7) se ramènent à :

$$\begin{aligned} A + \vec{0} &= A \quad (\text{car } \vec{0} \text{ est l'élément neutre du groupe } (\vec{E}, +)), \\ (A + \vec{u}) + \vec{v} &= A + (\vec{u} + \vec{v}) \quad (\text{car } + \text{ est associative}), \\ \exists! \vec{u} \in \vec{E}, A = B + \vec{u} &\quad (\text{car } \vec{u} = A - B). \end{aligned}$$

3. (2 pts) L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est un convexe de \mathbb{R}^3 .

Réponse. VRAI. Si (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont dans F , soit $t \in [0, 1]$. On a:

$$t(x_1, y_1, z_1) + (1-t)(x_2, y_2, z_2) = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2)$$

et

$$\begin{aligned} &(tx_1 + (1-t)x_2)^2 + (ty_1 + (1-t)y_2)^2 + (tz_1 + (1-t)z_2)^2 \\ &= t^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (1-t)^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \\ &\quad + 2t(1-t)(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\ &\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \\ &= (t + 1 - t)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

où l'inégalité (de Cauchy-Schwarz) suivante a été utilisée:

$$|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \leq 1. \quad \blacksquare$$

4. (2 pts) Si \mathcal{C} est un convexe d'un espace affine E alors \mathcal{C} est stable par barycentre.

Réponse. FAUX. \mathcal{C} est stable par barycentre d'un système de points à poids positifs. Par exemple, si $A \neq B$, alors $[AB]$ est convexe mais :

$$M = tA + (1-t)B \notin [AB] \text{ si } t \notin [0, 1],$$

par définition de $[AB]$. ■

Exercice 2. Soient A, B, C trois points non alignés d'un espace affine réel E et soit

$$G = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$$

(ce qui suppose $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$).

1. (2 pts) Montrer que les droites (AB) et (GC) sont sécantes si et seulement si $\alpha + \beta \neq 0$. Que se passe-t-il lorsque $\alpha + \beta = 0$?

Réponse. Posons $s = \alpha + \beta + \gamma$. On ramène le plan $P = (ABC)$ de E passant par A et dirigé par $\vec{P} = \text{Vect}(\vec{AB}, \vec{AC})$ au repère cartésien (A, \vec{AB}, \vec{AC}) . Dans ce repère, le point G a pour coordonnées $(\frac{\beta}{s}, \frac{\gamma}{s})$ et on a:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{CG} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{s} \\ \frac{\gamma}{s} - 1 \end{pmatrix}.$$

Les droites coplanaires (AB) et (GC) sont sécantes si, et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{CG} sont libres:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\beta}{s} \\ 0 & \frac{\gamma}{s} - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{s} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta \neq 0.$$

Si $\alpha + \beta = 0$, les droites (AB) et (GC) sont parallèles puisque leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. ■

2. (2 pts) Montrer que lorsque (AB) et (GC) sont sécantes, leur point d'intersection est le point

$$H = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta)).$$

Réponse. Par associativité du barycentre, on a:

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar}((\text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta)), \alpha + \beta), (C, \gamma)) \\ &= \text{Bar}((H, \alpha + \beta), (C, \gamma)). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $H \in (AB)$ et par le calcul précédent $G \in (HC)$, donc $H \in (GC)$. H est bien le point d'intersection de (AB) et (GC) lorsque $\alpha + \beta \neq 0$. ■

3. On suppose maintenant que α, β, γ sont non nuls et que $-\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $\alpha - \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta - \gamma \neq 0$. Notons G_1, G_2, G_3 les points définis par:

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{Bar}((A, -\alpha), (B, \beta), (C, \gamma)), \\ G_2 &= \text{Bar}((A, \alpha), (B, -\beta), (C, \gamma)), \\ G_3 &= \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, -\gamma)). \end{aligned}$$

- (a) (2 pts) Montrer que G est distinct de chacun des points G_1, G_2, G_3 .

Réponse. Les coordonnées barycentriques des points G, G_1, G_2, G_3 par rapport au repère affine (A, B, C) du plan $P = (ABC)$ sont:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha}{-\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\beta}{-\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\gamma}{-\alpha + \beta + \gamma} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha - \beta + \gamma} \\ \frac{-\beta}{\alpha - \beta + \gamma} \\ \frac{\gamma}{\alpha - \beta + \gamma} \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha + \beta - \gamma} \\ \frac{\beta}{\alpha + \beta - \gamma} \\ \frac{-\gamma}{\alpha + \beta - \gamma} \end{pmatrix}.$$

Par unicité des coordonnées barycentriques, on a

$$G = G_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{-\alpha}{-\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\beta}{-\alpha + \beta + \gamma} \\ \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\gamma}{-\alpha + \beta + \gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Comme par hypothèse $\alpha \neq 0$, on a donc $G \neq G_1$. On montre de la même manière que G est distinct des points G_2, G_3 . ■

- (b) (2 pts) Montrer que les droites $(AG_1), (BG_2), (CG_3)$ sont concourantes en G .

Réponse. Montrons que $G \in (AG_1)$. On a:

$$\begin{aligned} G &= \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)) \\ &= \text{Bar}((A, 2\alpha), (A, -\alpha), (B, \beta), (C, \gamma)) \\ &= \text{Bar}((A, 2\alpha), (G_1, -\alpha + \beta + \gamma)). \end{aligned}$$

Donc $G \in (AG_1)$. On montrerait de la même manière que $G \in (AG_2)$ et $G \in (AG_3)$. ■

(c) (2 pts) Montrer que les droites (G_2G_3) , (G_3G_1) et (G_1G_2) passent respectivement par A, B, C .

Réponse. Montrons que $A \in (G_2G_3)$. En posant $s_2 = \alpha - \beta + \gamma$ et $s_3 = \alpha + \beta - \gamma$, par propriété du barycentre on a:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG_2} &= \frac{-\beta}{s_2} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{s_2} \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{AG_3} &= \frac{\beta}{s_3} \overrightarrow{AB} + \frac{-\gamma}{s_3} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{vmatrix} \frac{-\beta}{s_2} & \frac{\gamma}{s_2} \\ \frac{\beta}{s_3} & \frac{-\gamma}{s_3} \end{vmatrix} = \frac{\beta\gamma}{s_2s_3} - \frac{\beta\gamma}{s_2s_3} = 0.$$

Donc $A \in (G_2G_3)$. On pourrait démontrer de la même manière que $B \in (G_3G_1)$ et $C \in (G_1G_2)$. ■

Exercice 3. Soit P un plan affine réel et $f : P \rightarrow P$ une application affine telle que $f \neq Id$ et $f^3 = Id$.

1. Soit $A \in P$ tel que $A \neq f(A)$. On suppose que $A, f(A)$ et $f^2(A)$ sont alignés et soit $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $A = (1-t)f(A) + tf^2(A)$.

(a) (2 pts) Montrer que $A \neq f^2(A)$.

Réponse. On a: $A = f^2(A) \Rightarrow f(A) = f^3(A) = A$. Donc, par contraposée, $A \neq f(A) \Rightarrow A \neq f^2(A)$. ■

(b) (2 pts) Montrer que $\overrightarrow{f^2(A)A} = (t-t^2)\overrightarrow{f^2(A)A}$.

Réponse. En utilisant que $f^3 = Id$, on a

$$\begin{aligned} A &= (1-t)f(A) + tf^2(A) \Rightarrow f(A) = (1-t)f^2(A) + tA \\ \Rightarrow f(A) &= (1-t+t^2)f^2(A) + t(1-t)f(A) \\ \Rightarrow f^2(A) &= (1-t+t^2)A + t(1-t)f^2(A) \\ \Rightarrow f^2(A) - A &= (-t+t^2)A + t(1-t)f^2(A) = (t-t^2)(f^2(A) - A) \end{aligned}$$

car f conserve les barycentres.

Cette dernière égalité s'écrit aussi: $\overrightarrow{f^2(A)A} = (t-t^2)\overrightarrow{f^2(A)A}$. ■

(c) (2 pts) Que peut-on en déduire concernant l'alignement de $A, f(A)$ et $f^2(A)$?

Réponse. La relation précédente implique que $t-t^2 = 1$ car $A - f^2(A) \neq \vec{0}$. Or ceci est impossible car l'équation $t^2 - t + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

L'hypothèse $A, f(A), f^2(A)$ alignés est donc absurde. Conclusion: si $A \neq f(A)$ alors $A, f(A), f^2(A)$ sont non alignés. ■

2. Soit $A \in P$ tel que $A \neq f(A)$ et que $A, B = f(A)$ et $C = f^2(A)$ ne sont pas alignés.

(a) (2 pts) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, donner la matrice de l'application linéaire $\overrightarrow{f^2}$.

Réponse. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f^2}(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{f^2(A)f^2(B)} \\ &= \overrightarrow{CA} \quad (\text{car } f^2(B) = f^3(A) = A) \\ &= -\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f^2}(\overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{f^2(A)f^2(C)} \\ &= \overrightarrow{CB} \quad (\text{car } f^2(C) = f^4(A) = f(A) = B) \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Donc la matrice \mathcal{M} de $\overrightarrow{f^2}$ est donnée par

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) (2 pts) Déterminer l'ensemble des points fixes de f^2 .

Réponse. Pour tout M de coordonnées (x, y) dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a:

$$\overrightarrow{f^2(A)f^2(M)} = \overrightarrow{f^2(\overrightarrow{AM})} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - y \end{pmatrix}.$$

Par suite si (x', y') sont les coordonnées de $M' = f^2(M)$, on a:

$$f^2(M) = C + \overrightarrow{f^2(\overrightarrow{AM})} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y + 1 \end{cases}$$

On voit que M est un point fixe si, et seulement si:

$$\begin{cases} x = y \\ y = -x - y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

Ce point est donc l'isobarycentre de (A, B, C) . ■

Exercice 1 (8 pts). **VRAI ou FAUX?** Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. (2 pts) Soit E un espace affine et soit $\Omega \in E$. Le groupe formé par les isométries affines ayant Ω pour point fixe est isomorphe à $O(\vec{E})$.

Réponse. VRAI. Notons $\text{Is}_\Omega(E) \subset \text{Is}(E)$ le groupe formé par les isométries affines ayant Ω pour point fixe. D'après le cours (Théorème 5.18), l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Is}(E) &\rightarrow O(\vec{E}) \\ f &\mapsto \vec{f} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes pour la loi de composition. Le noyau de φ est constitué des isométries dont la partie linéaire est $id_{\vec{E}}$, c'est-à-dire les translations. On en déduit que la restriction de φ à $\text{Is}_\Omega(E)$ est un morphisme injectif. Il est de plus surjectif car si $\vec{u} \in O(\vec{E})$, l'application affine f définie par

$$f(M) = \Omega + \vec{u}(\overrightarrow{\Omega M}), \quad M \in E,$$

est dans $\text{Is}_\Omega(E)$. Donc l'application $\varphi : \text{Is}_\Omega(E) \rightarrow O(\vec{E})$ est un isomorphisme de groupes. ■

2. (2 pts) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice suivante est une rotation

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Réponse. FAUX. En effet, on peut vérifier que la matrice est orthogonale mais:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1.$$

C'est donc la matrice d'une réflexion. ■

3. (2 pts) Dans \mathbb{R}^2 , les points $A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1)$ définissent un parallélogramme.

Réponse. VRAI. Car:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}.$$

4. (2 pts) L'ensemble $]0; 1[\times]0; 1[$ est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Réponse. VRAI. Soient $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in]0; 1[\times]0; 1[$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a:

$$tA + (1-t)B = (ta_1 + (1-t)b_1, ta_2 + (1-t)b_2).$$

Or, pour $i = 1, 2$, on a $0 < a_i, b_i < 1$, l'intervalle $I_i = \{ta_1 + (1-t)b_1, t \in [0, 1]\}$ d'extrémités a_i et b_i est contenu dans $]0; 1[$. Donc $tA + (1-t)B \in]0; 1[\times]0; 1[$.

Remarque 1. On peut aussi dire que si C_1 et C_2 sont deux convexes d'un espace affine E alors $C_1 \times C_2$ est un convexe de l'espace affine produit $E \times E$ (avec la même démonstration adaptée). ■

Exercice 2 (7 pts). Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois, orienté et muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire dont la matrice A dans la base \mathcal{B} est:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (3 pts) Soit P le plan d'équation $x + z = 0$. Former une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que $v, w \in P$.

Réponse. Le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire normal à P . Le vecteur $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in P$ puisque ses coordonnées vérifient l'équation de P . Le vecteur $w = u \wedge v \in P$ car w est orthogonal à u en particulier. On a, par calculs:

$$w = u \wedge v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|w\| = 1.$$

Avec ces vecteurs ainsi déterminés, $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base orthonormée directe. ■

2. (4 pts) Former la matrice de f dans \mathcal{B}' et reconnaître f .

Réponse. Déterminons $f(\mathcal{B}')$. On a:

$$Au = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u,$$

puis

$$Av = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = w$$

et enfin:

$$Aw = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v$$

Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

f est la rotation d'axe dirigé par u et d'angle déterminé par

$$\begin{cases} \text{Trace}(f) = 1 + 2 \cos(\theta) = 1 \\ \langle Av, w \rangle = \sin(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = 0 \\ \sin(\theta) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Finalement: f est la rotation d'axe dirigé par u et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. ■

Exercice 3 (12 pts). L'espace \mathbb{R}^3 est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormale directe. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une application non nulle. L'objectif de cet exercice est de montrer que f est une rotation si, et seulement si:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \quad (1)$$

où $x \wedge y$ désigne le produit vectoriel des vecteurs x et y . On rappelle que ce produit vectoriel ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.

1. (2 pts) À l'aide du produit vectoriel, exprimer que \mathcal{B} est une base orthonormale directe puis justifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3$

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x \wedge y\| = \|x\| \|y\|. \quad (2)$$

Réponse. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est orthonormale directe s'exprime par:

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1, e_3 \wedge e_1 = e_2. \quad (3)$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'implication (2) est triviale. On suppose donc que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Alors:

$$\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \left| \sin(\widehat{(x, y)}) \right| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

■

2. Dans cette question, on suppose que f est une rotation.

(a) (2 pts) Justifier que $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthonormale directe.

Réponse. Comme f est une rotation, elle conserve le produit scalaire, la norme et l'orientation. Donc, pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

et, l'orientation étant conservée, $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est orthonormale directe puisque orientée dans le même sens que \mathcal{B} . ■

- (b) (2 pts) Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ deux vecteurs. Calculer $f(x \wedge y)$ et $f(x) \wedge f(y)$.

Réponse. On a

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

Comme f est linéaire:

$$f(x \wedge y) = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} f(e_1) - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} f(e_2) + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} f(e_3)$$

Par ailleurs

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 x_k f(e_k), \quad f(y) = \sum_{k=1}^3 y_k f(e_k).$$

Par conséquent, puisque $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est orthonormale directe et que le produit vectoriel ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie, on a:

$$f(x) \wedge f(y) = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} f(e_1) - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} f(e_2) + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} f(e_3).$$

■

- (c) (1 pt) Conclure.

Réponse. La question 2b montre que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. Donc, si f est une rotation, elle conserve le produit vectoriel (i. e. f vérifie (1)).

■

3. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est non nulle et vérifie la propriété (1).

- (a) (2 pts) À l'aide du produit vectoriel, exprimer chacun des éléments de la famille $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ en fonction des deux autres puis montrer que:

$$\begin{aligned} \|f(e_1)\| &= \|f(e_2)\| \|f(e_3)\|, \\ \|f(e_2)\| &= \|f(e_1)\| \|f(e_3)\|, \\ \|f(e_3)\| &= \|f(e_1)\| \|f(e_2)\|. \end{aligned}$$

Réponse. Puisque f vérifie (1), on a:

$$\begin{cases} f(e_1 \wedge e_2) = f(e_1) \wedge f(e_2) \\ f(e_2 \wedge e_3) = f(e_2) \wedge f(e_3) \\ f(e_3 \wedge e_1) = f(e_3) \wedge f(e_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_3) = f(e_1) \wedge f(e_2) \\ f(e_1) = f(e_2) \wedge f(e_3) \\ f(e_2) = f(e_3) \wedge f(e_1) \end{cases} \quad (4)$$

Donc, les $f(e_i)$ sont non nuls car les relations précédentes impliquent que si l'un des $f(e_i)$ est nul, ils le sont tous et il s'ensuivrait que f est nulle. Ces mêmes relations impliquent que les $f(e_i)$ sont deux-à-deux orthogonaux. On en déduit en utilisant (2) les relations

$$\begin{aligned} \|f(e_1)\| &= \|f(e_2)\| \|f(e_3)\|, \\ \|f(e_2)\| &= \|f(e_1)\| \|f(e_3)\|, \\ \|f(e_3)\| &= \|f(e_1)\| \|f(e_2)\|. \end{aligned}$$

■

- (b) (2 pts) En déduire que $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthonormale directe.

Réponse. D'après les relations (4) et (3), $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthogonale directe. Il reste à montrer que les $f(e_i)$ sont de norme 1. Or les trois égalités de la question précédente et le fait que les $f(e_i)$ sont non nuls donnent, en considérant la première et la deuxième égalité

$$\frac{\|f(e_1)\|}{\|f(e_2)\|} = \frac{\|f(e_2)\|}{\|f(e_1)\|} \Rightarrow \|f(e_1)\| = \|f(e_2)\|,$$

puis la première et la troisième égalité:

$$\frac{\|f(e_1)\|}{\|f(e_3)\|} = \frac{\|f(e_3)\|}{\|f(e_1)\|} \Rightarrow \|f(e_1)\| = \|f(e_3)\|.$$

Donc $\|f(e_1)\| = \|f(e_2)\| = \|f(e_3)\|$ et en revenant aux égalités:

$$\|f(e_i)\| = 1, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

$\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc une base orthonormale directe.

■

(c) (1 pt) Conclure.

Réponse. L'application linéaire f , non nulle et vérifiant la propriété (1), transforme toute base orthonormale directe en une base orthonormale directe: *c'est donc une isométrie positive, c'est-à-dire une rotation* (voir le cours, §III.1, p. 77). ■

Exercice 4 (6 pts). Soit un plan affine E sur le corps des réels, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Pour $M \in E$, on considère les barycentres suivants :

$$\begin{aligned} H &= \text{Bary}((A, 1), (B, 1), (M, 1)), \\ K &= \text{Bary}((A, 1), (C, 1), (M, 1)), \\ G &= \text{Bary}((A, 1), (B, 1), (C, 1), (M, 1)). \end{aligned}$$

1. (3 pts) Notons (x, y) les coordonnées de M dans \mathcal{R} . Déterminer les coordonnées de H et K dans \mathcal{R} . Justifier l'existence de la droite affine (HK) .

Réponse. Comme $H = \text{Bary}((A, 1), (B, 1), (M, 1))$, on a, par définition:

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HM} = \vec{0}$$

puis

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}.$$

Comme $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, on trouve:

$$\overrightarrow{AH} = \frac{x+1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Les coordonnées de H sont donc $(\frac{x+1}{3}, \frac{y}{3})$.

De la même manière, on trouve:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AM},$$

puis

$$\overrightarrow{AK} = \frac{x}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{y+1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Les coordonnées de K sont donc $(\frac{x}{3}, \frac{y+1}{3})$.

La droite (HK) existe dès lors que $H \neq K$. Or, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{x+1}{3} > \frac{x}{3}$ et $\frac{y}{3} < \frac{y+1}{3}$. Donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $H \neq K$ (puisque ces points ne peuvent avoir les mêmes coordonnées). ■

2. (3 pts) Soit F l'ensemble des points M tels que $G \in (HK)$. Déterminer F : en donner une équation ou un système d'équations cartésiennes, et les éléments caractéristiques.

Réponse. On a:

$$G \in (HK) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{GK} = \lambda \overrightarrow{HK}.$$

Or

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AM} \\ &= \frac{x+1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{y+1}{4}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{GK} = \left(\begin{array}{c} \frac{x}{3} - \frac{x+1}{4} \\ \frac{y+1}{3} - \frac{y+1}{4} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{x-3}{12} \\ \frac{y+1}{12} \end{array} \right).$$

et la question précédente permet d'écrire:

$$\overrightarrow{HK} = \left(\begin{array}{c} \frac{x}{3} - \frac{x+1}{3} \\ \frac{y+1}{3} - \frac{y}{3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right).$$

Les vecteurs \overrightarrow{GK} et \overrightarrow{HK} sont colinéaires si, et seulement si:

$$0 = \det \left(\overrightarrow{GK}, \overrightarrow{HK} \right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{x-3}{12} & -\frac{1}{3} \\ \frac{y+1}{12} & \frac{1}{3} \end{array} \right| = \frac{x-3}{36} + \frac{y+1}{36},$$

Donc, si, et seulement si:

$$x + y - 2 = 0.$$

F est donc la droite de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passant par le point $M_0 = (2, 0)$ (par exemple...). ■