Géométrie affine - DS 1

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient. Prenez soin de bien justifier vos réponses et de bien présenter votre démarche; la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Les calculatrices sont interdites. Le barème est donné à titre indicatif seulement. Des réponses partielles peuvent vous accorder une partie des points de la question en question. N'oubliez pas de numéroter vos pages.

1 Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et projection

1. (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'expression

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution: Symétrie

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a, d'abord par définition

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ = \int_0^1 QP = \langle Q, P\rangle$$

où la deuxième égalité est justifiée par le fait que le produit de nombres réels est commutatif.

Linéarité à gauche

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque les fonctions P, Q, R sont continues, on a

$$\begin{aligned}\langle P + \lambda Q, R\rangle &= \int_0^1 (P + \lambda Q)R \\ &= \int_0^1 PR + \lambda QR \\ &= \int_0^1 PR + \lambda \int_0^1 QR \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \langle P, R\rangle + \lambda\langle Q, R\rangle.\end{aligned}$$

(Comme je l'ai dit en TD, vous n'avez pas à justifier que le caractère symétrique + la linéarité à gauche donnent la linéarité à droite.)

Positivité

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a, d'abord par définition

$$\langle P, P\rangle = \int_0^1 P^2 \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale (qui s'applique car P^2 est une fonction continue positive).

Caractère défini

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$. Par ce qui précède, on a $P^2 = 0$ sur $[0; 1]$ car P^2 est une fonction positive continue d'intégrale nulle. En particulier, le polynôme P s'annule donc une infinité de fois, d'où $P = 0$.

2. (2.5 points) Déterminer une base orthonormale de $\text{Vect}(1, X, X^2)$. On utilisera sans justification que la norme du troisième vecteur construit - avant la normalisation - par la méthode de

Gram-Schmidt est

$$\lambda := \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

Solution: On pose

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \\ Q_1 &= 1/\left\|1\right\| = 1 \end{aligned}$$

car on a

$$\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1^2} = \sqrt{[x]_{x=0}^1} = 1.$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned} P_2 &= X - \langle X, Q_1\rangle Q_1 \\ Q_2 &= P_2/\left\|P_2\right\| = 2\sqrt{3}(X - 1/2). \end{aligned}$$

En effet, on a

$$P_2 = X - \langle X, 1\rangle = X - \int_0^1 x dx = X - [x^2/2]_0^1 = X - 1/2$$

puis

$$\|P_2\| = \sqrt{\int_0^1 P_2^2} = \sqrt{\int_0^1 (x-1/2)^2 dx} = \sqrt{[(x-1/2)^3/3]_0^1} = \cdots = \sqrt{1/12}.$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned} P_3 &= X^2 - \langle X^2, Q_1\rangle Q_1 - \langle X^2, Q_2\rangle Q_2 \\ Q_3 &= P_3/\left\|P_3\right\| = 6\sqrt{5}(X^2 - X - 1/6). \end{aligned}$$

En effet, on a (d'abord par linéarité du produit scalaire)

$$\begin{aligned} P_3 &= X^2 - \langle X^2, 1\rangle - 2\sqrt{3}\langle X^2, X - 1/2\rangle \times 2\sqrt{3}(X - 1/2) \\ &= X^2 - \int_0^1 x^2 dx - 12\int_0^1 x^3 - x^2/2 dx (X - 1/2) \\ &= X^2 - [x^3/3]_0^1 - 12[x^4/4 - x^3/6]_0^1 (X - 1/2) \\ &= X^2 - 1/3 - 12 \times \underbrace{(1/4 - 1/6)}_{=1/12}(X - 1/2) \end{aligned}$$

ce qui conclut puisque l'énoncé affirme que l'on a $\|P_3\| = 1/6\sqrt{5}$.

3. (2 points) On suppose que l'on a $n = 2$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(1)$ dans la base $\{1, X, X^2\}$.

Solution: Notons p cette projection. Par théorème, on a

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad p(P) = \langle P, 1\rangle \times 1$$

car, par les calculs effectués précédemment, la famille constituée uniquement de l'élément $1 \in \mathbb{R}_n[X]$ est une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(1)$. Ainsi, on a en particulier (par les calculs effectués précédemment)

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 \\ p(X) &= 1/2 \\ p(X^2) &= 1/3. \end{aligned}$$

Finalement, la matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Espaces affines

1. (2 points) Montrer que l'ensemble suivant n'est pas un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{777} - \pi x\right\}$$

Solution: Par l'absurde, supposons que A est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$. Remarquons que l'on a $(0,0) \in A$. Ainsi, il existe $\overrightarrow{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$A = (0,0) + \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}.$$

De plus, on a $(1, 1-\pi), (2, 2^{777} - 2\pi) \in A$. Ainsi, on a $(1, 1-\pi), (2, 2^{777} - 2\pi) \in \overrightarrow{A}$ mais ces vecteurs forment une famille libre: s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(2, 2^{777} - 2\pi) = \lambda(1, 1-\pi)$ alors, en identifiant les premières coordonnées on trouve $\lambda = 2$ et en identifiant les deuxièmes coordonnées, on aurait alors $2^{777} - 2\pi = 2(1-\pi)$ ce qui est absurde car $2^{777} - 2\pi = 2(2^{776} - \pi)$ et $2^{776} - \pi > 2 - \pi > 1 - \pi$.

Finalement, puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, on en déduit que l'on a $\overrightarrow{A} = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $A = \mathbb{R}^2$ mais on a $(0,1) \notin A$, ce qui est absurde.

2. (2 points) (Interdiction d'utiliser des propositions/théorèmes du cours ou du TD, on vous demande ici de refaire toute la preuve.) Montrer que l'ensemble suivant est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{777}$ et donner sa direction.

$$\left\{(x_i)_{i=1}^{777} : \sum_{i=1}^{777} x_i = \pi^e\right\}$$

Solution: Observons que le point $(\pi^e, 0, \ldots, 0)$ est solution de l'équation mentionnée. Ainsi, on a, pour tout $(x_i) \in \mathbb{R}^{777}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{777} x_i = \pi^e \\
&\iff (x_1 - \pi^e) + \sum_{i=2}^{777} x_i = 0 \\
&\iff (x_i)_i - (\pi^e, 0, \ldots, 0) \in \left\{(y_i) \in \mathbb{R}^{777} : \sum_{i=1}^{777} y_i = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\left\{(x_i)_{i=1}^{777} : \sum_{i=1}^{777} x_i = \pi^e\right\} = (\pi^e, 0, \ldots, 0) + \left\{(x_i) \in \mathbb{R}^{777} : \sum_{i=1}^{777} y_i = 0\right\}$$

et ne reste qu'à montrer que $A := \left\{(x_i) \in \mathbb{R}^{777} : \sum_{i=1}^{777} y_i = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{777}$. On a bien $0 \in A$ et si $x, y \in A, \lambda \in \mathbb{R}$, on a (par linéarité de la somme)

$$\sum_{i=1}^{777} x_i + \lambda y_i = \sum_{i=1}^{777} x_i + \lambda \sum_{i=1}^{777} y_i = 0 + 0$$

d'où $x + \lambda y \in A$.

3. (1 point) Donner une équation décrivant le plan affine $\mathcal{P}$ - défini dans $\mathbb{R}^3$ - orthogonal à $u = (3,2,1)$ et passant par le point $(4,5,6)$.

Solution: Le plan vectoriel orthogonal à u est

$$\overrightarrow{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y + z = 0\right\}.$$

On a ensuite

$$P = (4,5,6) + \overrightarrow{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y + z = 28\right\}$$

car le point $(4,5,6)$ satisfait cette dernière équation, de sorte que $P-(4,5,6)=\overrightarrow{P}$ (voir la réponse à la question précédente)

3 Question de cours

1. (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble X suivant est un convexe de $\mathbb{R}^n$

$$X=\{(x_1,\ldots,x_n) : x_1 \geqslant 0,\ x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Solution: Soient $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n) \in X$ et soit $t \in [0;1]$. On a

$$\forall i \geqslant 2, x_i+ty_i \in \mathbb{R}$$

et $x_1+ty_1 \geqslant 0$ car on a $x_1,t,y_1 \geqslant 0$. Autrement dit, on a bien $x+ty \in X$.

2. (1 point) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit $u \in \mathbb{R}^n$. Rappeler (sans justifier) quel est le vecteur $z \in F$ satisfaisant

$$\|u-z\|=\min_{x\in F}\|u-x\|$$