Fiche 2 - Algèbre sur un anneau - Théorie des modules

SOUANEF Rafik - 2024/2025

1 Modules sur un anneau

Dans toute la feuille, A désigne un anneau (unitaire et) commutatif.

1.1 Le module $\mathbb{Z}$

1. Donner une famille de $\mathbb{Z}$ génératrice minimale qui n'est pas une base.
2. Donner une famille libre de $\mathbb{Z}$ qui n'est ni génératrice, ni complétable en une base.
3. Que dire de deux sous-$\mathbb{Z}$-modules M et N de $\mathbb{Z}$ vérifiant $\mathbb{Z} = M + N$? De $M \cap N$?

1.2 Type fini

1. Donner un exemple de A-module qui n'est pas de type fini, mais possède une base.
2. Donner un exemple de A-module de type fini, non libre.

1.3 Module et morphismes

Soit M un groupe abélien.

1. Démontrer que la donnée d'une structure de A-module sur M est équivalente à la donnée d'un morphisme d'anneaux de A dans $\operatorname{End}_{\mathrm{gr}} M$.
2. Démontrer que la donnée d'une structure de $A[X]$-module sur M est équivalente à la donnée d'une structure de A-module sur M, plus le choix d'un endomorphisme de A-modules de M.

1.4 Corps des fractions

On suppose l'anneau A intègre et on note K son corps des fractions.

1. Déterminer les éléments de torsion du A-module K.
2. Démontrer que toute famille d'au moins deux éléments de K est liée sur A.
3. Démontrer : K est libre sur A si et seulement si A est un corps.
4. À quelle condition K est-il de type fini sur A ?
5. Démontrer que tous les éléments du A-module quotient K/A sont de torsion.

1.5 Radical de Jacobson

On appelle radical de Jacobson de A l'intersection J de tous les idéaux maximaux de A.

1. Démontrer que J est l'ensemble des éléments a de A vérifiant : $\forall x \in A, 1 + ax \in A^{\times}$.
2. Soit M un A-module de type fini vérifiant $M \subset JM$. Démontrer que M est nul.

1.6 Calcul de rang

Calculer le rang des sous-$\mathbb{Z}$-modules de $\mathbb{Z}^3$ engendrés par les familles :

1. $(1,-1,-1)$, $(0,1,2)$;
2. $(1,0,-1)$, $(0,2,3)$, $(2,2,1)$

1.7 Sous-modules

1. Soient M et N des A-modules. Tous les sous-A-modules de $M \times N$ sont-ils de la forme $M' \times N'$, avec M' sous-A-module de M et N' sous-A-module de N ?
2. Déterminer tous les sous-modules du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1.8 Sous-module d'indice fini

Soit M un groupe abélien de type fini et soit N un sous-module de M. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- N est d'indice fini dans M
- le rang N est celui de M.

1.9 Comptage

Combien y a-t-il, à isomorphisme près, de groupes abéliens d'ordre 600 ?

1.10 Calcul d'une forme de Smith

Soit F la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 15 & 7 & -10 \\ 2 & 7 & 3 & -6 \\ 14 & 31 & 15 & -18 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la forme de Smith H de F et deux matrices carrées L et C à coefficients dans $\mathbb{Z}$, inversibles (dans $\mathbb{Z}$) et vérifiant $LFC = H$.
2. Soit M le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^3$ engendré par les colonnes de F.
   (a) Déterminer une base de $\mathbb{Z}^3$ adaptée à M, une base de M et ses facteurs invariants.
   (b) Quelle est la structure du groupe abélien $\mathbb{Z}^3/M$?
3. Soit N le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^4$ engendré par les colonnes de ${}^{t}F$.
   (a) Déterminer une base de $\mathbb{Z}^4$ adaptée à N, une base de N et ses facteurs invariants.
   (b) Quelle est la structure du groupe abélien $\mathbb{Z}^4/N$?

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système linéaire suivant (x, y, z et t étant les inconnues et a, b et c des paramètres).
$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1.11 Du calcul, en veux-tu ? En voilà !

Calculer les invariants de similitude des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$