Fiche 3 - Algèbre sur un anneau - Théorie des modules

SOUANEF Rafik - 2024/2025

1 Modules sur un anneau

Dans toute la feuille, $\mathbb{A}$ désigne un anneau principal.

1.1 Des facteurs

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, d leur pgcd et m leur ppcm. Démontrer que les groupes $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sont isomorphes. En déduire les facteurs invariants de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.
2. Donner les facteurs invariants de $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/1400\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2156\mathbb{Z}$.

1.2 Encore

Soient $\mathbb{K}$ un corps, n dans $\mathbb{N}^*$ et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les invariants de similitude de M.
2. Montrez que $M^2 + M$ est semblable à M sur $\mathbb{K}$.

1.3 Simple

On rappelle qu'un $\mathbb{A}$-module M est dit simple s'il possède exactement deux sous-$\mathbb{A}$-modules, $\{0_M\}$ et M. Démontrer qu'un $\mathbb{Z}$-module de type fini est simple si et seulement s'il est fini et d'ordre premier.

1.4 La structure des sous-modules

Soit M un $\mathbb{A}$-module de type fini, de rang n et de facteurs invariants $d_1, \ldots, d_r$. Soit N un sous-module de rang m et de facteurs invariants $d'_1, \ldots, d'_s$.

1. Montrer que l'on a $m \leqslant n$.
2. Montrer que, pour démontrer que l'on a $s \leqslant r$, on peut supposer que l'on a $n = 0 = m$.
3. Dans tout ce qui suit, on suppose que l'on a $n = 0 = m$.

(a) Montrer que pour démontrer que l'on a $s \leqslant r$, il suffit de montrer le même énoncé en tout facteur irréductible. Autrement dit, si l'on écrit

$$M \simeq \prod_{p \in I} \prod_{i=1}^{r_p} \mathbb{A}/p^{m_{i,p}}\mathbb{A}$$

$$N \simeq \prod_{p \in J} \prod_{i=1}^{s_p} \mathbb{A}/p^{n_{i,p}}\mathbb{A}$$

où I et J désignent des ensembles d'éléments irréductibles de $\mathbb{A}$, alors on a $J \subset I$ et il s'agit de montrer

$$(\forall p \in J, \quad s_p \leqslant r_p) \Leftrightarrow s \leqslant r.$$

(b) Démontrer que l'on a $s_p \leqslant r_p$ pour tout $p \in J$.

IndicationS

- On pourra chercher à manipuler des espaces vectoriels.
- On pourra considérer $\{x \in N : px = 0\}$.

(c) On souhaite montrer que l'on a $d'_1 \mid d_1, \ldots, d'_s \mid d_s$. Comment cela se retraduit sur la décomposition en facteurs irréductibles ?

IndicationS

- On pourra montrer que, si l'on suppose que pour tout p les $n_{i,p}$ et $m_{i,p}$ sont rangés dans l'ordre croissant, cela revient à avoir $n_{i,p} \leqslant m_{i,p}$ pour tout $i \leqslant s_p$ et pour tout $p \in J$.
- Pour démontrer cela on pourra se rappeler comment on passe d'une version du théorème de structure à l'autre.

(d) Démontrer l'énoncé dans sa version facteurs irréductibles.

IndicationS

- On pourra réfléchir à un moyen de faire une récurrence.
- On pourra s'intéresser au module $pM = \{pm : m \in M\}$.