

Poti DM

1 Partie 1

Definition 1. On appelle droite affine de \mathbb{R}^n tout sous-espace affine de \mathbb{R}^n dont la direction est une droite vectorielle.

1. Soient F, G deux sous-espaces affines de \mathbb{R}^n . Montrer que l'on a

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n = \vec{F} + \vec{G} &\implies F \cap G \neq \emptyset \\ \mathbb{R}^n = \vec{F} \oplus \vec{G} &\implies \text{Card}(F \cap G) = 1.\end{aligned}$$

2. Dans \mathbb{R}^2 , montrer que deux droites affines sont concourantes en un unique point ou sont parallèles. Ce résultat est-il toujours vérifié en dimension supérieure ?
3. Dans \mathbb{R}^3 , montrer que deux plans affines se coupent une droite affine ou sont parallèles.
4. Soit H un plan de \mathbb{R}^3 et soit F une droite affine de \mathbb{R}^3 tel que $\vec{F} \not\subset \vec{H}$ (on dit que F n'est pas faiblement parallèle à H). Montrer que H et F se coupent en un unique point.

2 Partie 2

Proposition 2. Soit $A \in \mathbb{R}^n$ et soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Il existe un unique sous-espace affine de \mathbb{R}^n passant par A et de direction F .

Il s'agit du postulat d'Euclide, c'est un des axiomes d'Euclide pour la géométrie du plan. Pendant longtemps les mathématiciens ont cherché à déduire ce postulat des parallèles des quatre autres axiomes d'Euclide pour la géométrie. Au XIXème siècle Gauss, puis indépendamment János Bolyai et Nikolai Lobachevsky en 1823, ont montré qu'on pouvait considérer d'autres modèles géométriques, non-contradictaires, dans lequel ce postulat n'est pas vrai. C'est la découverte des géométries dites non-euclidiennes. On se propose ici d'étudier la géométrie hyperbolique, qui est un exemple de géométrie non-euclidienne.

Definition 3. Soit X un ensemble. On appelle distance (sur X) toute application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (symétrie) $\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = d(y, x)$
- (séparation) $\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Definition 4. On note \mathbb{H} le demi-plan de Poincaré défini par

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

Definition 5. On appelle chemin (dans \mathbb{H}) toute application continue $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{H}$. Un chemin γ est dit (de classe) C^1 si, en tant que fonction, γ est de classe C^1 par morceaux.

Remarque 6. Soit $I = (a, b)$ un intervalle réel. On rappelle qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dite de classe C^1 par morceaux si f est continue sur I et qu'il existe des réels $t_1 < \dots < t_n$ appartenant à I de sorte que pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, f est de classe C^1 sur $[t_i, t_{i+1}]$, sur $(a, t_1]$ et sur $[t_n, b)$.

Definition 7. Pour tout $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{H}$ un chemin C^1 , on pose

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{|d\gamma|}{y(t)} dt$$

où $y(t)$ désigne la partie imaginaire de $\gamma(t)$. On dit que $h(\gamma)$ est la longueur hyperbolique de γ . On pose alors $d(u, v) = \inf_{\gamma \in C^1} h(\gamma)$ où γ relie u à v .

1. (2 points) On admet que d sépare les points. Montrer que l'application d définit une distance sur \mathbb{H} .

Indication : On pourra remarquer que l'on peut concaténer deux chemins en utilisant le paramétrage suivant

$$\varphi : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow & [0; 1] \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0; 0.5] \\ 2t - 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Definition 8. On appelle groupe des transformations l'ensemble suivant muni de la loi \circ de composition des applications

$$\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}.$$

Remarque 9. Dans la littérature, ces applications sont habituellement appelées homographies.

2. (1 point) Montrer que $(\text{PSL}_2(\mathbb{R}), \circ)$ est effectivement un groupe. On notera T^{-1} l'inverse de toute transformation T .
3. (0.5 points) Montrer que l'on a

$$\text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

4. (0.5 points) Montrer que \mathbb{H} est stable par toute transformation $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$.
5. (1 point) Montrer que les transformations sont des isométries pour la distance hyperbolique, c'est-à-dire que l'on a

$$\forall T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}), \forall u, v \in \mathbb{H}, \quad d(T(u), T(v)) = d(u, v).$$

6. Soit \mathcal{C} le demi-cercle de centre $c \in \mathbb{R}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ défini par

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{H} : |z - c| = r\}$$

(a) (0.5 points) On suppose que l'on a $c = 0, r = 1$. Montrer que l'application T_0 définie par

$$T_0(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}$$

est une transformation vérifiant $T_0(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}_+^*$.

(b) (0.5 points) En déduire que, dans le cas général, il existe une transformation T_c vérifiant $T_c(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}_+^*$.

Definition 10. Soient $u, v \in \mathbb{H}$. On appelle géodésique (reliant u à v) tout chemin γ de classe C^1 vérifiant

$$\gamma(0) = u, \quad \gamma(1) = v, \quad h(\gamma) = d(u, v).$$

7. Soient $u, v \in \mathbb{H}$.

(a) (0.5 points) Supposons que l'on a $\operatorname{Re}(u) = \operatorname{Re}(v)$. Montrer qu'il y a une géodésique reliant u à v et qu'elle est donnée par le segment $[u, v]$.

Indication : on pourra minorer $|\gamma'|$ par $|y'|$.

(b) (1.5 points) Supposons que l'on a $\operatorname{Re}(u) \neq \operatorname{Re}(v)$. Montrer qu'il y a un unique cercle \mathcal{C} (au sens euclidien usuel) de centre $c \in \mathbb{R}$ passant par u et v . Montrer qu'il y a une géodésique reliant u à v et qu'elle est donnée par ce cercle.

8. Soient $u, v \in \mathbb{H}$.

(a) (0.5 points) Montrer que l'on a, pour toute transformation T :

$$|T(u) - T(v)| = |u - v| |T'(u)T'(v)|^{1/2}.$$

(b) (2 points) En déduire que l'on a

$$d(u, v) = \ln \left(\frac{|u - \bar{v}| + |u - v|}{|u - \bar{v}| - |u - v|} \right).$$

(c) (0.5 points) Montrer que d sépare les points, c'est-à-dire que l'on a

$$\forall u, v \in \mathbb{H}, \quad d(u, v) = 0 \iff u = v.$$

Definition 11. On appelle droite de \mathbb{H} ou droite hyperbolique toute partie de \mathbb{H} qui est

- soit l'intersection avec \mathbb{H} d'une droite verticale du plan \mathbb{C}
- soit l'intersection avec \mathbb{H} et d'un cercle du plan \mathbb{C} centré en un réel.

Deux droites hyperboliques sont dites parallèles si elles sont identiques ou disjointes.

Remarque 12. On peut voir ces définitions comme des extensions naturelles de ce que sont des droites et ce qu'est la notion de parallélisme dans le plan usuel. En effet, dans le plan usuel, les droites relient deux points de sorte que le chemin le plus court est donné par cette droite. De même, dans le plan usuel, deux droites distinctes sont soit d'intersection non vide - dans quel cas elles ne sont pas parallèles - soit d'intersection vide - dans quel cas elles sont parallèles.

9. (0.5 points) Montrer que par deux points distincts il passe une unique droite de \mathbb{H} . On admettra que, dans le plan euclidien, une droite coupe un cercle en au plus deux points.
10. (1 point) Soit \mathcal{D} une droite de \mathbb{H} et soit $z \in \mathbb{H} \setminus \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe une infinité de droite de \mathbb{H} passant par z et parallèle à \mathcal{D} .

Indication : Dans le cas où \mathcal{D} provient d'un cercle, on pourra ingénieusement faire varier le centre.

11. (0.5 points) Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ trois droites hyperboliques. On suppose que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles à \mathcal{D}_3 . Est-il vrai que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles ?