Géométrie - Interro 1

Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient. Prenez soin de bien justifier vos réponses et de bien présenter votre démarche; la qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Les calculatrices sont interdites. Le barème est donné à titre indicatif seulement. Des réponses partielles peuvent vous accorder une partie des points de la question en question. N'oubliez pas de numéroter vos pages.

1 Questions de cours

1. Rappeler la définition d'un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

   Solution: Un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

   $$E = x + \overrightarrow{E}.$$

2. Rappeler la définition d'une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

   Solution: Une base orthonormale de E est une base $(u_i)_{i \in I}$ de l'espace vectoriel E vérifiant les deux points suivant

   - $\forall i_1 \neq i_2 \in I, \quad \langle u_{i_1}, u_{i_2} \rangle = 0$
   - $\forall i \in I, \quad \|u_i\| = 1.$

2 Un pas vers l'espace L^2

Dans cet exercice, on pourra faire appel aux résultats et définitions du cours sans se soucier de la dimension de l'espace vectoriel.

On considère l'espace vectoriel réel $E = C^0([0;1])$ des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall f, g \in E, \quad < f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E. Dans ce qui suit, on note $\|.\|$ la norme associée.

Solution: Symétrie

Soient $f, g \in E$. On a, d'abord par définition

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg = \int_0^1 gf = \langle g, f\rangle$$

où la deuxième égalité est justifiée par le fait que le produit de nombres réels est commutatif.

Linéarité à gauche

Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque les fonctions f, g, h sont continues, on a

$$\begin{aligned}
\langle f + \lambda g, h\rangle &= \int_0^1 (f + \lambda g)h \\
&= \int_0^1 fh + \lambda gh \\
&= \int_0^1 fh + \lambda \int_0^1 gh \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&= \langle f, h\rangle + \lambda\langle g, h\rangle.
\end{aligned}$$

(Comme je l'ai dit en TD, vous n'avez pas à justifier que le caractère symétrique + la linéarité à gauche donnent la linéarité à droite.)

Positivité

Soit $f \in E$. On a, d'abord par définition

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2 \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale (qui s'applique car f^2 est une fonction continue positive).

Caractère défini

Soit $f \in E$ tel que $\langle f, f\rangle = 0$. Par ce qui précède, on a $f^2 = 0$ car f^2 est une fonction positive continue d'intégrale nulle. Ainsi, on a $f = 0$.

2. Justifier que l'on a

$$\forall f, g \in E, \quad \int\limits_0^1 f(x)g(x) \leqslant \|f\| \, \|g\|$$

et préciser le cas d'égalité.

Solution: Soient $f, g \in E \setminus \{0\}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwars au produit scalaire que l'on vient de définir et aux éléments f, g, on a

$$\left|\int_0^1 fg\right| \leqslant \|f\| \, \|g\| \,.$$

De plus, on a

$$\int_0^1 fg \leqslant \left|\int_0^1 fg\right|$$

d'où l'inégalité demandée.

Supposons que l'on a $\int_0^1 fg = \|f\| \|g\|$. Les inégalités précédentes imposent que l'on ait

$$\int_0^1 fg = \left|\int_0^1 fg\right| = \|f\| \|g\| .$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'existence d'un réel λ tel que $f = \lambda g$ et la première égalité donne $\lambda = \left|\int_0^1 fg\right| / \int_0^1 f^2 \geqslant 0$.

Remarquons de plus que si f ou g est nulle, alors il y a effectivement égalité dans l'inégalité de la question 2. Ainsi, il y a égalité si et seulement f ou g est nulle ou qu'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $f = \lambda g$.

3. On pose f_1, f_2, f_3 les fonctions polynomiales respectivement associées aux polynômes $1, X, X^2$. Trouver une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Solution: On applique le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$h_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = 1$$

puis

$$\begin{aligned} g_2 &= f_2 - \langle f_2, h_1\rangle h_1 \\ h_2 &= \frac{g_2}{\|g_2\|} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_3 &= f_3 - \langle f_3, h_1\rangle h_1 - \langle f_3, h_2\rangle h_2 \\ h_3 &= \frac{g_3}{\|g_3\|}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_2(x) &= x - \int_0^1 tdt = x - \left[t^2/2\right]_{t=0}^1 = x - \frac{1}{2} \\ \|g_2\| &= \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt} = \sqrt{\left[\frac{1}{3}(t - \frac{1}{2})^3\right]_{t=0}^1} = \sqrt{1/12} \\ h_2(x) &= \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ g_3(x) &= x^2 - \int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 \sqrt{12}t^2(t - \frac{1}{2})dt \times \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 - \left[t^3/3\right]_0^1 - 12\left[t^4/4 - t^3/3\right]_0^1 (x - \frac{1}{2}) \\
&= x^2 - \frac{1}{3} - (x - \frac{1}{2}) \\
&= x^2 - x + \frac{1}{6} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} \\
\|g_3\| &= \sqrt{\int_0^1 \left((t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12}\right)^2 dt} \\
&= \sqrt{\int_0^1 (t - \frac{1}{2})^4 - \frac{1}{6}(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12^2} dt} \\
&= \sqrt{\left[\frac{(t-1/2)^5}{5} - \frac{1}{18}(t-1/2)^3 + \frac{1}{12^2}\right]_{t=0}^1} \\
&= \cdots \\
&= \sqrt{1/180} \\
h_3(x) &= \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})
\end{aligned}
$$