
TD 2 : PROJECTION ORTHOGONAL, SYMÉTRIE ORTHOGONAL ET HYPERPLANS

Exercice 1 . On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on munit E d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit Π le plan d'équation $y + z = 0$. Déterminer la matrice P de la projection orthogonale p sur Π dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 . Déterminer la matrice de la projection (orthogonale) P sur le sous espace $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^4$ engendré par $x = (1, 2, -2, 4)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice Q de la projection sur $\mathcal{S}^\perp$, puis la matrice S de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{S}^\perp$ (une symétrie par rapport à un hyperplan s'appelle une réflexion). Enfin, calculer $(I + S)^{10}$.

Exercice 3 . Soit $R \in \mathbb{M}_n$ une matrice (on dit aussi un opérateur linéaire) de rang 1. Montrer que

$$Rz = \langle y, z \rangle x$$

pour un certain couple de vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, et que de façon équivalente

$$R = (x_i y_j).$$

Donner une relation entre la trace de R, x et y.

Exercice 4 . Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la symétrie orthogonale sur le sous-espace $\mathrm{Vect}(X - 1)$ lorsque $\mathbb{R}_2[X]$ est muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Exercice 5 . Soit p un projecteur d'un espace euclidien E.

1. Montrer que si p est orthogonal alors p est symétrique, c'est-à-dire
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle.$$
2. En déduire que, si p est orthogonal, la matrice de p dans une base orthonormale est symétrique.
3. Montrer que si p est un endomorphisme symétrique alors p est un projecteur orthogonal.
4. Soit s une symétrie de E. Déduire de ce qui précède que :
   (a) si s est orthogonale, la matrice de s dans une base orthonormale est symétrique ;
   (b) si s est un endomorphisme symétrique alors s est une symétrie orthogonale.

Exercice 6 .

1. Déterminer une équation cartésienne du sous-espace affine F de $\mathbb{R}^3$ contenant le point A de coordonnées $(1, 0, 1)$ et dirigé par le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u} = (0, 2, 1)$ et $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du sous-espace affine P de dimension 2, parallèle à F et contenant le point $B = (0, 1, 0)$.

Exercice 7 . On pose $E = \mathbb{R}^n$.

1. Soit $(a_1, ..., a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que l'ensemble $H = \{X = (x_1, ..., x_n) \in E : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$ est un hyperplan de E si $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. À quelles conditions les deux équations
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \;\; et \;\; a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'$$
décrivent-elles des hyperplans parallèles de E ?

Exercice 8 . Dans $\mathbb{R}^4$ déterminer la distance entre les hyperplans d'équations

$$x + 2y - 2z + 4t = 5, \qquad x + 2y - 2z + 4t = -10.$$

Exercice 9 .Soit r projections non nulles $\{Q_i\}_{i=1}^r$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{S}_k = \mathrm{ran}\, Q_k$. Montrer que $Q_1 + \cdots + Q_r = I$ si et seulement si $\mathcal{S}_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp \mathcal{S}_r = \mathbb{R}^n$.