Contents

Conseils généraux

Pour écrire vos leçons facilement je vous conseille de procéder comme suit.

Au début de votre année de préparation, il convient sûrement de commencer à écrire entièrement les plans des leçons qui vous mettent le plus à l'aise jusqu'à ce que vous vous sentiez qu'il est maintenant facile pour vous d'écrire des plans. Cela vous permettra en particulier de bien vous rendre compte de la longueur de vos leçons et vous donnera un avant-goût du jour J. Quand vous aurez pris l'habitude d'écrire des leçons, vous pourrez vous contenter de n'écrire que des plans de leçons. A ce stade, il faudra construire des plans de leçon qui vous permettront facilement de construire vos leçons le jour J en suivant simplement vos plans, vos références et, surtout, le rapport du jury.

Pour savoir quoi mettre dans vos leçons, je vous conseille de créer des plans en vous basant sur le rapport du jury, sur plusieurs plans écrits par d'autres personnes et sur les références que vous pensez pouvoir utiliser. Si vous ne savez pas quelles références utiliser globalement, vous les trouverez dans les leçons écrites par d'autres personnes. Il est très important de commencer par lire le rapport du jury: il donne souvent assez d'indications pour construire un plan qui vous convient mais, surtout, il donne les attendus des membres du jury.

Essayez de mettre des choses qui vous plaisent (dans la limite du possible bien entendu) pour essayer de trouver du fun à faire des leçons.

Visez un niveau de difficulté de leçon qui vous convient et qui permet de répondre aux attendus du jury. On nous a beaucoup répété qu'il n'était pas nécessaire de faire des leçons très poussées pour avoir 20.

Pour les leçons qui vous plaisent le moins, essayez de prendre des développements pas trop durs qui se recasent dans beaucoup de leçons. Par exemple, je me suis beaucoup servi de développements comme Galton-Watson ou les polynômes orthogonaux dans des leçons de probabilités ou autre qui ne me plaisent pas vraiment voire pas du tout.

Quand viendra le moment des vrais oraux, ne restez pas butés sur vos erreurs parce qu'il est très compliqué de deviner sa note, en particulier aux oraux de modélisation. Je pensais mon oral de modélisation complètement nul et j'ai eu 14. J'ai aussi entendu l'histoire de quelqu'un qui a eu 18 alors qu'il pensait avoir fait une bouse magistrale. Restez donc concentrés sur le moment présent jusqu'à la fin de vos oraux et donnez tout jusqu'au bout sans vous poser de question.

Leçons complètes

J'essaie de donner les références qui m'ont permis de construire mes leçons sans donner les références des développements; ces dernières se trouvent dans la partie dans laquelle je regroupe tous mes développements.

Leçon 204 - Connexité. Exemples et applications.

1 Ensemble connexe

1.1 Définition et conditions équivalentes

Definition 1. Un espace topologique (X,τ) est dit connexe quand

$$\forall O_1, O_2 \in \tau, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset \text{ et } X = O_1 \cup O_2 \implies X = O_1 \text{ ou } X = O_2.$$

Proposition 2. X est connexe si et seulement si, pour tous fermés F_1, F_2 tels que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $X = F_1 \cup F_2$ impliques $X = F_1$ ou $X = F_2$ si et seulement si les ouverts qui sont également fermés sont X et $\emptyset$.

Definition 3. Soient (X,τ) un espace topologique. On dit que $A \subset X$ est une partie connexe si A muni de la topologie induite est connexe.

Proposition 4. A est connexe signifie que l'on a

$$\forall O_1, O_2 \in \tau, \quad A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subset O_1 \cup O_2 \implies A \subset O_1 \text{ ou } A \subset O_2$$

ou, de façon équivalente

$$\forall F_1^c, F_2^c \in \tau, \quad A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset \text{ et } A \subset F_1 \cup F_2 \implies A \subset F_1 \text{ ou } A \subset F_2.$$

Exemple 5. $\mathbb{Q}$ n'est pas connxe puisque $\mathbb{Q} \subset \{x < \sqrt{2}\} \cup \{x > \sqrt{2}\}$.

$\mathbb{R}$ est connexe.

$\emptyset$ et $\{x\}$ sont toujours connexes.

1.2 Lien avec les fonctions

Proposition 6. L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Exemple 7. Le cercle unité $\mathbb{U}$ est connexe grâce à $t \mapsto \exp(it)$.

Proposition 8. X est connexe ssi toute application continue de X dans $\{0;1\}$ est constante.

Proposition 9. Si X est connexe et $f : X \to Y$ est continue localement constante alors f est constante.

1.3 Propriétés et composantes connexes

Proposition 10. Soit $A \subset X$ une partie connexe. Pour tout $A \subset B \subset \overline{A}$, on a B connexe. En particulier, la partie $\overline{A}$ est connexe.

Proposition 11. Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Corollaire 12. Soient X connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tout $f(x_1) < f(x_2)$, on a $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(X)$.

Definition 13. Soit (X, τ) un espace topologique. On considère sur X la relation d'équivalence suivante : $x \sim y$ signifie que x et y appartienne à un même connexe. On appelle composante connexe toute classe de cette relation.

Proposition 14. Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de X telle qu'il existe $i_0 \in I$ vérifiant $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. Alors $\cup C_i$ est connexe.

Remarque 15. C'est en particulier le cas lorsque $\cap C_i \neq \emptyset$.

Remarque 16. Si $I = \mathbb{N}$, on peut affaiblir les hypothèses en demandant $C_{i+1} \cap C_i \neq \emptyset$.

Proposition 17. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On a $\prod X_i$ connexe (pour la topologie produit) ssi chaque X_i est connexe.

Proposition 18. Pour tout $x \in X$, la classe (définie plus haut) $\mathrm{cl}(x)$ est le plus grand connexe contenant x.

Proposition 19. Pour tout x, la classe $\mathrm{cl}(x)$ est fermée.

Exemple 20. Les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$.

Proposition 21. Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme. Alors, f induit une bijection de l'ensemble des composantes connexes de X dans celui des composantes connexes de Y.

Proposition 22. Toute partie connexe s'inclut dans une composante connexe.

2 Connexes par arcs

2.1 Définition et premières propriétés

Definition 23. Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que X est connexe par arcs lorsque, pour tout $x, y \in X$, il existe un chemin $\gamma : [0; 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Théorème 24. Tout connexe par arcs est connexe.

Remarque 25. La réciproque est fausse. Prendre l'adhérence du graphe de $x \in \mathbb{R}^*_+ \mapsto \sin(1/x)$.

Definition 26. On définit de même les parties connexes par arcs et les composantes connexes par arcs.

Proposition 27. Soit $f : X \to Y$ une application continue avec X connexe par arcs. Alors, $f(X)$ est connexe par arcs.

Exemple 28. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Les $\{x\}$ sont toujours connexes par arcs.

2.2 Cas des evn

Soit E un evn.

Definition 29. On appelle ligne brisée tout ensemble de la forme

$$\bigcup_{i=1}^{n} [x_i, x_{i+1}]$$

avec $x_i \in E$.

Definition 30. Une partie $A \subset E$ est dite connexe par lignes brisées lorsque tout x, y admet une ligne brisée contenue dans A et contenant

x, y.

Proposition 31. Connexe par lignes brisées implique connexe par arcs.

Remarque 32. La réciproque est fausse comme le montre le cercle unité $\mathbb{U}$.

Proposition 33. Soit U un ouvert de E. On a U connexe par arcs ssi connexe par ligne brisées.

3 Utilisation de la connexité

3.1 Dans les espaces de matrices

Proposition 34. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a pour composantes connexes (par arcs) les parties $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Proposition 35. $O_n(\mathbb{R})$ a pour composantes connexes $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

Développement 36 (Théorème de Lie-Kolchin 3.1).

Proposition 37. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Théorème 38. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

3.2 En analyse complexe

Développement 39 (Prolongement le long d'une courbe 2.2).

Notes: on peut remplacer la dernière sous-partie par une sous-partie sur la topologie algébrique.

Références: [12], [25], [22]

Leçon 205 - Espaces complets. Exemples et applications.

1 Espaces complets

1.1 Notion d'espace complet, complété

Definition 1. Soit (E, d) un espace métrique. Une suite (u_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad \forall p, q > n,\ d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

Exemple 2. Toute suite convergente est de Cauchy.

La suite $(1/n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}^*$ mais ne converge pas dans cet espace.

La suite (n) n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3. Toute suite de Cauchy est bornée et converge ssi elle admet une valeur d'adhérence.

Definition 4. Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy converge (dans ce même espace).

Exemple 5. $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet mais $(\mathbb{R}, d)$ ne l'est pas, où $d(x, y) = \arctan(x) - \arctan(y)$ (la suite (n) est de Cauchy pour d) bien que ces deux espaces métriques aient la même topologie. Ainsi, la notion de complétude n'est pas une notion topologique.

$\mathcal{C}_b(X, E)$ est complet pour d_∞ lorsque X est un espace topologique et E est un espace métrique.

Proposition 6. Un sous-ensemble fermé d'un espace complet est lui-même complet (pour la distance induite).

Théorème 7. Soit (X, d) un espace métrique. Il existe un espace complet (Y, δ) et une isométrie $j : X \hookrightarrow Y$ tels que $j(X)$ soit dense dans Y.

Definition 8. On verra que Y est unique (en un certain sens) et on appelle alors cet espace le complété de X.

Exemple 9. $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$.

1.2 Prolongement de fonctions uniformément continues et applications

Théorème 10. Soient $(E, d), (F, \delta)$ deux espaces métriques. Supposons F complet. Soit $A \subset E$ dense et $f : A \to F$ une application uniformément continue. Alors, f admet un unique prolongement par continuité à E. De plus, ce prolongement est uniformément continu.

Application 11. On en déduit l'unicité du complété à homéomorphisme isométrique près (cet homéomorphisme fait commuter le diagramme avec les j du théorème 7).

1.3 Théorèmes de point fixe

Théorème 12. Soient (E, d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ une fonction k-contractante avec $0 < k < 1$. Alors, la fonction f admet un unique point fixe $a \in E$ et toute suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a. De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(u_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(u_0, a).$$

Exemple 13. $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x^2+1}$ n'a pas de point fixe et vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ donc le théorème est en défaut si $k = 1$.

Application 14 (Cauchy-Lipschitz). Soient E un Banach, I un intervalle réel ouvert et $f : I \times E \to E$ une fonction localement-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, continue sur $I \times E$. Alors, il existe une unique solution maximale à tout problème de Cauchy $[y'(t) = f(t, y(t)), y'(t_0) = x_0]$. De plus, cette solution maximale est définie sur un intervalle ouvert de I.

1.4 Théorème de Baire

Théorème 15. Soit (E, d) un espace complet. Soit (O_n) une suite d'ouverts denses dans E. Alors, l'intersection des O_n est dense dans E. De façon équivalente, si (F_n) est une suite de fermés d'intérieur vide, alors l'union des F_n est encore d'intérieur vide.

Corollaire 16. Tout espace vectoriel normé complet n'a pas de base dénombrable infini.

Exemple 17. $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

2 Espace de Banach

2.1 Notion d'espace de Banach

Definition 18. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ complet pour cette norme.

Exemple 19. Les espaces L^p et ℓ^p sont des Banach.

L'espace $L_c(E, F)$ avec E evn et F Banach est un Banach pour la norme subordonnée.

$\mathcal{C}_b(X, F)$ avec F Banach, X espace topo est un Banach pour la norme infinie.

Développement 20 (Théorème de Fischer 2.15).

Proposition 21. Dans un Banach, la convergence absolu implique la convergence.

2.2 Théorème de Banach-Steinhauss

Théorème 22. Soient E un Banach, F un evn et $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues de $E \to F$. On suppose que l'on a

$$\forall x \in E, \quad \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty.$$

Alors, on a

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| .$$

Corollaire 23. Même notations mais $I = \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))$ converge vers un certain $T(x)$. Alors, T est linéaire continue et $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$ et $\sup \|T_n\| < \infty$.

Application 24 (ma tête). Toute suite faiblement convergente d'un Banach est bornée.

Corollaire 25. Soit E un Banach, $A \subset E$. On suppose que pour tout $f \in E'$, l'ensemble $f(A)$ est borné. Alors, A est borné.

2.3 Théorème de l'application ouverte et du graphe fermé

Théorème 26. Soient E, F deux Banach et $T : E \to F$ linéaire continue et surjective. Alors, il existe $c > 0$ tel que $B(0, c) \subset T(B(0, 1))$.

Corollaire 27. Sous les mêmes hypothèses, supposons de plus que T est injective. Alors, T^{-1} est continue.

Application 28. Si deux normes d'un Banach sont comparables alors elles sont équivalentes.

Théorème 29. Soient E, F deux Banach. Soit $T : E \to F$ linéaire. On a T continu ssi son graphe est fermé dans $E \times F$ pour la norme produit.

Corollaire 30 (ma tête). Sous les mêmes hypothèses, on en déduit que T est continu fort-fort ssi T est continu faible-faible.

3 Espaces de Hilbert

Voir leçon 213

3.1 Notion d'espace de Hilbert

3.2 Théorème de projection et conséquences

Développement 31 (Théorème de projection sur un convexe fermé 2.10).

Références: [5], [20]

Leçon 207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

1 Aspect continu

1.1 Prolongement par continuité

Definition 1. Soient $(X, d_1), (Y, d_2)$ deux espaces métriques, $f : A \to Y$ continue avec $A \subset X$. On dit que $g : X \to Y$ est un prolongemennt par continuité de f à X si g est continue et que sa restriction à A est f.

Proposition 2. Soient $(X, d_1), (Y, d_2)$ deux espaces métriques et $f : U \setminus \{x_0\} \to Y$ avec $U \subset X$ ouvert contenant x_0, telle que f converge en x_0. Alors, f se prolonge par continuité à U de façon unique.

Exemple 3.
- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x)/x$ est prolongeable par continuité en 0
- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(1/x)$ ne l'est pas

Théorème 4. Soient $(E, d_1), (F, d_2)$ deux espaces métriques, $A \subset E$ et $f : A \to F$ uniformément continue. On suppose A dense dans E et F complet. Alors, f se prolonge par continuité à E de façon unique. De plus, ce prolongement est uniformément continu.

Application 5. Sous les mêmes hypothèses, si de plus f est lipschitzienne alors son prolongement l'est également.

Application 6 (Théorème d'Ascoli). Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, supposons de plus E est compact. Soit $A \subset \mathcal{C}^0(E, F)$. On a équivalence entre $\overline{A} = \mathcal{C}^0(E, F)$ pour la norme infinie d'une part et, d'autre part, A est équicontinu, càd

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall f \in A, \quad d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

et pour tout $x \in E$, l'ensemble $A_x = \{f(x) : x \in A\}$ est relativement compact dans F.

1.2 Théorème de Hahn-Banch et applications

Théorème 7. Soit E un espace vectoriel réel. Soit $f : G \to \mathbb{R}$ où G est un sev de E. On suppose que l'on a $f(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in G$, où $p : E \to \mathbb{R}$ est une application convexe. Alors, f admet un prolongement linéaire à E - que l'on note g - tel que $g(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$.

Corollaire 8. Soient E un espace vectoriel normé réel, $f : G \to \mathbb{R}$ linéaire continue où G est un sev de E. Alors, f admet un prolongement linéaire continu à E - que l'on note g - vérifiant $\|f\| = \|g\|$.

Corollaire 9. Pour tout $x_0 \in E$, il existe une forme linéaire continue $f \in E'$ telle que $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\| = 1$.

Application 10. $x \in E \mapsto [f \in E' \mapsto f(x)] \in E''$ est une isométrie.

Definition 11. Soient E un espace vectoriel normé réel, $A, B \subset E$. On dit que l'on peut séparer A et B au sens large par l'hyperplan d'équation $f(x) = a$ si

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B, \quad f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y).$$

On dit que l'on peut les séparer au sens large s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B, \quad f(x) < \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon < f(y).$$

Application 12. Soient E un evn réel, $A, B \subset E$ deux convexes non vides et disjoints. Si A est ouvert, alors on peut séparer A de B au sens large. Si A est compact et B fermé, alors on peut les séparer au sens strict.

Corollaire 13. SOient E evn, F sev de E. On a $\overline{F} = E$ ssi

$$\forall f \in E', \quad f_{|F} = 0 \implies f = 0$$

Definition 14. Soient E evn, $K \subset E$. On dit que $S \subset K$ est extrémale dans K si

$$\forall x, y \in K, \forall t \in]0;1[, \quad tx + (1-t)y \in S \implies x, y \in S.$$

On dit que $x_0 \in K$ est un point extrémal de K si $\{x_0\}$ est une partie extrémale.

Développement 15 (Hahn-Banach analytique et Krein-Milman 2.9).

2 Point de vue différentiel

2.1 Prolongement $\mathcal{C}^k$

Théorème 16. Soit $f : I \to E$ où I est un intervalle réel et E un evn. Soit $x_0 \in I$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on suppose que $f^{(k)}$ est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. Supposons aussi que $f^{(k+1)}$ converge vers un certain l en x_0. Alors, $f^{(k)}$ est dérivable sur I et on a $f^{(k+1)}(x_0) = l$.

Corollaire 17. Si f est $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{x_0\}$ et que $f^{(j)}$ converge vers l_j en x_0 pour tout $j \leqslant k$, alors f est $\mathcal{C}^k$ sur I et on a $f^{(j)}(x_0) = l_j$.

Exemple 18. $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \exp(-1/x^2)$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en 0 avec $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k.

2.2 Equations différentielles

Théorème 19 (Cauchy-Lipschitz). Soient E un Banach, I un intervalle réel ouvert et $f : I \times E \to E$ une fonction localement-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, continue sur $I \times E$. Alors, il existe une unique solution maximale à tout problème de Cauchy $[y'(t) = f(t, y(t)), y'(t_0) = x_0]$. De plus, cette solution maximale est définie sur un intervalle ouvert de I.

Remarque 20. Sous ces conditions, toute solution locale est prolongée par la solution maximale.

Théorème 21. Sous les mêmes hypothèses, soit (y, J) la solution maximale. On a l'alternative suivant: soit $\sup J = \sup I$, soit pour tout compact K de E, il existe T tel que $y(t) \notin K$ pour tout $t \geqslant T$.

Corollaire 22. Si la solution maximale n'est pas globale, alors $\|y(t)\| \to \infty$ quand t tend vers la borne inférieure ou supérieure de I.

Exemple 23. Quand $I = \mathbb{R}$ et que f est bornée, la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de $y' = y^2, y(0) = y_0 > 0$ ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$.

3 Aspect algébrique - extension des morphismes de corps (voir notes)

Definition 24. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps. On appelle $\mathbb{K}$-morphisme tout morphisme de corps $\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ - où $\mathbb{M}$ est une extension de $\mathbb{K}$ - vérifiant $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{K}$. On note $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ le groupe formé par les $\mathbb{K}$-automorphismes de $\mathbb{L}$.

Proposition 25. Soit $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ un morphisme de corps. Soient $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ deux extensions algébriques. Soient $\alpha \in \mathbb{L}$, $\beta \in \mathbb{M}$. Alors, le morphisme σ se prolonge en un morphisme de corps $\mathbb{K}(\alpha) \to \mathbb{K}(\beta)$ vérifiant $\sigma(\alpha) = \beta$ si et seulement si $\Pi_{\mathbb{K},\beta} = \sigma.\Pi_{\mathbb{K},\alpha}$.

Corollaire 26. Soient $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ et $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension finie. Alors, σ se prolonge en $\sigma : \mathbb{L} \to \overline{\mathbb{K}}$ et il y a au plus $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ prolongements de cette sorte. On a donc $|\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})| \leqslant [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Definition 27. Une extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est séparable lorsque ...

Definition 28. Soit x algébrique sur $\mathbb{K}$. On appelle $\mathbb{K}$-conjugués de x toutes les racines de $\Pi_{\mathbb{K},x}$ (dans un surcorps).

Definition 29. Une extension est dite normale lorsque...

Théorème 30. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension finie. On a $|\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})| = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ si et seulement $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est normale et séparable.

Definition 31. Dans ce cas, on dit que $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est galoisienne.

Théorème 32. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension finie. On a $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ galoisienne ssi

$$\forall x \in \mathbb{L},\ [\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}),\ \sigma(x) = x] \implies x \in \mathbb{K}.$$

Application 33. Soient $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension algébrique, $x, y \in \mathbb{L}$. On écrit $\Pi_{\mathbb{K},x} = \prod X - x_i$, $\Pi_{\mathbb{K},y} = \prod X - y_i$. Alors, on a $\prod X - (x_i + y_j) \in \mathbb{K}[X]$ et ce polynôme annule $x + y$.

Théorème 34. Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\overline{\mathbb{K}}_1, \overline{\mathbb{K}}_2$ deux clôtures algébriques de $\mathbb{K}$. Alors, tout $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ se prolonge en $\overline{\mathbb{K}}_1 \to \overline{\mathbb{K}}_2$.

Application 35. On retrouve l'unicité des corps de rupture, de décomposition et de la clôture algébrique.

Application 36. Soient $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension et $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Soit $P = \prod P_i$ sa décomposition en irréductibles dans $\mathbb{L}[X]$. Alors, les P_i ont tous même degré.

Application 37. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{L}$ un corps de décomposition d'un polynôme $P = \prod (X - x_i)^{\alpha_i} \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Alors, on a $\alpha_i = \alpha_j$.

Application 38. Par restriction, on a $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})/\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{H}) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{H}/\mathbb{K})$.

Notes: la dernière partie de ma leçon est dangereuse. Comme c'est une leçon d'analyse, des gens sont tentés de dire qu'algèbre n'a sa place dans la leçon que pour produire des exemples ou des "petits" items, pas toute une partie de la leçon. Cependant, je n'ai jamais lu de règle qui impose réellement cela. Dans le doute, il convient de faire preuve de prudence et de ne pas consacrer toute une partie à cela. Ce que j'aurais sûrement fait à la place: une partie sur les fonctions holomorphes pour pouvoir caser mon développement 2.2 et parler de la fonction Γ, de la fonction ζ. On peut alors envisager de faire une petite ouverture sur l'aspect algébrique en montrant rapidement que ce genre de question se pose en théorie de Galois.

Références: partie 1 ma tête + [20] + [5], 2 [20] + [9], 3 ma tête + [7]

Leçon 213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

1 Espaces de Hilbert

1.1 Propriétés du produit scalaire

Definition 1. Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $\langle .,. \rangle : \begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x,y \rangle \end{array}$ est un produit scalaire si

- $\langle .,. \rangle$ est sesquilinéaire
- $\langle .,. \rangle$ est symétrique
- $\langle x,x \rangle \leqslant 0$ avec égalité ssi $x = 0$.

On dit alors que $(H, \langle .,. \rangle)$ est un Hilbert si H muni de la norme induite par le produit scalaire est complet.

Proposition 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit H un Hilbert. On a

$$\forall x, y \in H, \quad |\langle x,y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \, .$$

Proposition 3. Soit H un evn. La norme découle d'un produit scalaire ssi

$$\forall x, y \in H, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Exemple 4. $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert pour $\langle f,g \rangle = \int fg$

Definition 5. Soit H un Hilbert et soit $A \subset H$. On note

$$A^\perp = \{x \in H : \forall a \in A, \quad \langle x,a \rangle = 0\}$$

l'orthogonal de A. On dit que $x, y \in H$ sont orthogonaux si $\langle x,y \rangle = 0$.

Proposition 6. On a $\mathrm{Vect}(A)^\perp = A^\perp = \overline{A}^\perp$ et $A^\perp$ est un sev fermé.

Proposition 7 (Pythagore). Soient $x_1, \dots, x_n \in H$ deux à deux orthogonaux. On a

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \, .$$

Théorème 8. Gram-Schmidt

1.2 Projection sur un convexe fermé et conséquences

Développement 9 (Théorème de projection sur un convexe fermé 2.10).

Corollaire 10. Soit F un sev fermé de H. Soit $x \in H$. Alors, $p_F(x)$ est caractérisé par $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Proposition 11. Si F est de dimension finie dont $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale, alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, ei \rangle e_i$.

Corollaire 12. Si F est un sev fermé de H alors on a $H = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 13. Un sev F est dense si et seulement si $F^\perp = 0$.

Corollaire 14. Pour toute forme linéaire $f \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que $f(.) = \langle ., x \rangle$. De plus, on a $\|f\| = \|x\|$.

Application 15. Tout Hilbert est réflexif.

Exemple 16. Le théorème 8 est faux si C n'est pas convexe puisque $(x+y)/2$ est équidistant de x et y (prendre $C = \{0; 1\}$, $H = \mathbb{R}$ et $x = 1/2$).

Si C n'est pas fermé, le théorème est également en défaut : $H = \mathbb{R}^2$, $C = B(0, 1)$ et prendre un x de norme 1.

Si C n'est pas complet, pareil (il conviendrait de trouver un contre-exemple explicite).

2 Base hilbertienne

2.1 Généralités

Definition 17. Soient (E_n) une suite de sev de H. On dit que H est somme hilbertienne des E_n si

- les E_n sont deux à deux orthogonaux
- l'espace vectoriel qu'ils engendrent est dense dans H.

Proposition 18. On suppose que H est somme hilbertienne des E_n. Soit $u \in H$. On pose $u_n = p_{E_n}(u)$. On a

- $u = \sum_n u_n$
- $\|u\|^2 = \sum_n \|u\|^2$.

Réciproquement, étant donnée une suite (u_n) telle que $u_n \in E_n$ et $\sum_n \|u_n\|^2 < \infty$, la série $\sum u_n$ converge et $u = \sum_n u_n$ vérifie $p_{E_n}(u) = u_n$.

Definition 19. On appelle base hilbertienne de H toute suite (e_n) d'éléments de H telle que H soit la somme hilbertienne de $(\mathrm{Vect}(e_n))$.

Remarque 20. Dans ce cas, on a $u = \sum_n \langle u, e_n \rangle e_n$ et $\|u\|^2 = \sum_n |\langle u, e_n \rangle|^2$

Théorème 21. Soit H un Hilbert. On a H séparable ssi H admet une base hilbertienne.

Remarque 22. Dans ce cas, H est isomorphe de façon isométrique à $\ell^2(\mathbb{K})$ via $u \mapsto (\langle u, e_n \rangle)$.

Développement 23 (Polynômes orthogonaux 2.11).

2.2 Application aux séries de Fourier

Voir leçon 246. Bien faire le lien avec la leçon actuelle, càd expliciter une base hilbertienne de $L^2([0;2\pi[)$.

2.3 Opérateurs compacts

Dans tout ce qui suit, H est un Hilbert réel.

Definition 24. Soit $T \in L(H)$ un opérateur linéaire sur H. On dit que T est compact si $T(B_H)$ est relativement compact. On note $K(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H.

Definition 25. Soit $T \in L(H)$, il existe un unique $T^* \in L(H)$ telle que

$$\forall x, y \in H, \quad \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle.$$

Lemme 26. Soit G un evn, F un sev fermé de G tel que $F \neq G$. Il existe $u \in G$ tel que $d(u, H) \leqslant 1/2$ et $\|u\| = 1$.

Théorème 27. Soit $T \in K(H)$. On a

- $\mathrm{Ker}(I - T)$ est de dimension finie
- $\mathrm{Im}(I - T) = \mathrm{Ker}(I - T^*)^\perp$
- $\mathrm{Ker}(I - T) = 0$ ssi $\mathrm{Im}(I - T) = H$.

Definition 28. Soit $T \in L(H)$ un opérateur compact. L'ensemble résolvant de T est $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda id \text{ est bijectif}\}$.

Son spectre est $\sigma(T) = \rho(T)^c = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

Proposition 29. L'ensemble $\sigma(T)$ est compact et $\sigma(T) \in [-\|T\|, \|T\|]$.

Théorème 30. Soit $T \in K(H)$ avec $\dim H = \infty$. On a

- $0 \in \sigma(T)$
- $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{vp}(T) \setminus \{0\}$
- Soit $\sigma(T)$ est fini, soit il est dénombrable (infini) donné par une suite qui tend vers 0.

Lemme 31. Si $\lambda_n \to \lambda$ avec $\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ et λ_n deux à deux distincts avec $\lambda = 0$.

Definition 32. $T \in L(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$

Proposition 33. Soit $T \in K(H)$ autoadjoint. On a $\pm\|T\|$ dans le spectre de T.

Corollaire 34. Si $T \in K(H)$ autoadjoint est tel que $\sigma(T) = \{0\}$ alors $T = 0$.

Théorème 35. On suppose que H est séparable. Soit $T \in K(H)$ autoadjoint. Alors, il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

Exemple 36. $(u_n) \in \ell^2 \mapsto (\alpha_n u_n)$ où $\alpha_n \to 0$ avec $\alpha_n \neq 0$ est un opérateur compact tel que $\sigma(T) = \{\alpha_n : n \geqslant 0\}$ et la base canonique est comme dans le théorème précédent.

Notes: quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il faut faire attention à quel côté du produit scalaire est considéré comme linéaire car cela change parfois les énoncés. Sauf erreur, j'ai fait comme si le côté gauche était linéaire dans cette leçon.

Références: [5]

Leçon 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence un+1 = f(un). Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

1 Suites réelles récurrentes

1.1 d'ordre 1

Definition 1. Une suite de réels (u_n) est dite récurrente s'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to I$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple 2.
- Suites arithmétiques
- Suites géométriques

Proposition 3. Soient I un intervalle réel et $f : I \to I$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si f est croissante, alors (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.

Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de monotonie opposé.

Corollaire 4. Dans le premier cas, si I est compact et f continue, alors f admet un point fixe et (u_n) converge vers ce point fixe.

Proposition 5. Si $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue en l et que (u_n) converge vers l, alors on a $f(l) = l$.

Remarque 6. Quand le point fixe est unique, on peut énoncer le même corollaire sous l'hypothèse que f est décroissante.

Exemple 7. $f = \sin$ avec $u_0 \in [0; 1]$, alors (u_n) converge vers 0.

1.2 d'ordre k

Definition 8. Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est récurrente d'ordre k s'il existe $f : E^k \to E$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = f(u_{n+k-1}), \dots, u_n).$$

Definition 9. On dit que $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre k à coefficients constants s'il existe $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n.$$

Proposition 10. Les suites vérifiant une même relation de récurrence linéaire d'ordre k donnée à l'avance forment un espace vectoriel de dimension k.

Proposition 11. Soient $x_1, \dots, x_r$ les racines de $X^k - a1X^{k-1} - \dots - a_k$, avec multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Alors, (u_n) s'écrit de façon unique sous la forme $(u_n) = P_1(n)x_1^n + \dots + P_r x_r^n$ avec $P_i \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P_i) < \alpha_i$

Remarque 12. Les suites récurrente linéaire d'ordre 1 sont les suites géométriques.

Développement 13 (Caractérisation des suites récurrences linéaires 2.17).

1.3 Aspect matriciel

[Eventuellement à ne pas faire]

Remarque 14. Les suites récurrentes linéaires d'ordre k peuvent se voir comme des suites récurrentes d'ordre 1:

$U_{n+1} = AU_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k} \end{pmatrix}$ et A est la matrice compagnon du polynôme $X^k - a1X^{k-1} - \dots - a_k$.

Proposition 15 (ma tête). On a $U_n = A^n U_0$.

2 Points fixes

2.1 Théorème de Picard

Théorème 16. Soient (E, d) un espace métrique, $f : E \to E$ continue. On suppose que f est k-contractante, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k < 1$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y).$$

Alors, f a un unique point fixe a et toute suite itérée converge vers ce point fixe. Plus précisément, si $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on a

$$d(u_n, a) \leqslant k^n d(u_0, a).$$

Exemple 17. Le théorème est faux si l'on suppose juste $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$: la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $[0, +\infty[$ convient.

Application 18. Cauchy-Lipschitz

Remarque 19. QUand E est englobé par un espace vectoriel normé, cela peut servir à la résolution d'équation de la forme $f(x) = 0$ quand f est différentiable avec df bornée sur E en trouvant C tel que $x \mapsto x - Cf(x)$ vérifie les hypothèses de l'énoncé précédent.

2.2 Attraction, répulsion

Dans tout ce qui suit, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

Definition 20. On dit que $a \in I$ est un point fixe attractif de $f \in \mathcal{C}^1(I, I)$ si $|f'(a)| < 1$. De plus, si $f'(a) = 0$, on dit que a est superattractif.

Remarque 21. Si a est attractif, la continuité de f' assure qu'il existe un intervalle ouvert centré en a sur lequel on a $|f'| < k$ avec $k < 1$, de sorte que le théorème de Picard s'applique.

On décrit en annexe le comportement des suités d'itérées selon que l'on ait $f'(a) > 0$ ou $f'(a) < 0$.

Si l'on a $f \in \mathcal{C}^2$ avec $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, alors a est un extrémum de f et on se retrouve dans un cas semblable au cas $f'(a) > 0$.

Si l'on a $f \in \mathcal{C}^2$ avec $f'(a) = 0$ et M tel que $|f''| \leqslant M$ sur I, alors la suite des itérées converge vers a et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant \frac{2}{M}(\frac{M}{2}\,|u_0 - a|)^{2^n}.$$

On ne peut pas conclure si $f' = 1$.

Definition 22. a est dit répulsif si l'on a $|f'(a)| > 1$.

Remarque 23. Dans ce cas, f induit une bijection sur un intervalle centré en a et f^{-1} admet a comme point fixe attractif, ramenant donc l'étude des points fixes répulsif à celle des attractifs.

2.3 Galton-Watson

[Galton-Watson 2.4]

Développement 24.

3 Méthode de Newton

3.1 Fonctions réelles

blabla on énonce le théorème

3.2 Newton-Raphson

Références: partie 1 [12], 2 et 3 [9]

Leçon 235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

1 Intervertion limite-limite

1.1 Suites et séries de fonctions

Proposition 1. Soient $(E, d), (F, \delta)$ deux espaces métriques et (f_n) une suite de fonctions de E dans F convergeant uniformément vers une fonction f. Si les f_n sont continues en $x_0 \in E$, alors f aussi.

Exemple 2. Un contre-exemple lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme: $x \mapsto x^n$ sur $[0; 1]$.

Proposition 3. Soient E un Banach, une suite de fonctions (f_n) de $[a, b]$ dans E, continues, convergeant uniformément vers une fonction f. Alors, $x \mapsto \int\limits_a^x f_n$ convergence uniformément vers $x \mapsto \int\limits_a^x f$.

Corollaire 4. Soient (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans E de classe $\mathcal{C}^k$ telles que pour tout $j < k$, la suite $(f_n^{(j)})$ converge simplement vers une fonction g_j et $(f_n^{(k)})$ convergence uniformément vers g_k. Pour tout $j < k$, on a alors $(f_n^{(j)})$ converge uniformément vers g_j et $g_j' = g_{j+1}$.

Remarque 5. Ce corollaire s'applique aux séries de fonctions et permet de dériver sous la somme (sous hypothèses). Exemple : $\exp' = \exp$.

Exemple 6. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de k-ème dérivée $t \mapsto A^k \exp(tA)$.

Proposition 7. Soient $(E, \tau), (F, \delta)$ deux espaces topologiques et métriques respectivement. Soit (f_n) une suite de fonctions $A \to F$ avec $A \subset E$. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que $f_n(x)$ tend vers $b_n \in F$ quand $x \in A$ tend vers a et f_n converge uniformément vers une fonction f. Si F est complet, alors b_n converge vers un certain $b \in F$ et on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = b$.

Exemple 8 (ma tête). $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum\limits_{n \leqslant 1} 1/(n^2x^2 + 1)$ est bien définie et on a $f(x) \sim 1/x^2\zeta(2)$ à l'infini.

1.2 Avec des fonctions holomorphes

Proposition 9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur tout compact de Ω. Alors, f est holomorphe et (f_n') converge uniformément vers f' sur tout compact de Ω.

Développement 10 (Application: Prolongement de la fonction Γ 2.5).

Corollaire 11. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions holomorphes sur Ω. Si $\sum f_n$ converge uniformément alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est holomorphe et sa k-ème dérivée est $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$.

Exemple 12. $\exp' = \exp$

2 Intervertion limite-intégrale

2.1 Théorème de convergence dominée

Dans cette partie, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré.

Théorème 13. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions $X \to \mathbb{R}$ mesurables positives. On a

$$\int_X \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Théorème 14 (Lemme de Fatou). Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. On a

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leqslant \liminf_n \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Exemple 15. L'inégalité précédente n'est pas vérifiée si l'on enlève l'hypothèse de positivité : $f_n(x) == \mathbb{1}_{[-n,n]}(x)x, X = \mathbb{R}$ fournit un contre-exemple.

Application 16. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et telle que $(\int_X |f_n|)$ soit bornée. Alors, on a $f \in L^1$.

Application 17. Soit f une fonction croissante sur $[0;1]$ continue en 0 et en 1.(On suppose f dérivable λ-p.p., ce qui est en fait donné par un autre théorème difficile à démontrer). On a

$$\int_0^1 f' d\lambda \leq f(1) - f(0).$$

Remarque 18. L'inégalité est parfois stricte : prendre $f = \mathbb{1}_{[1/2;1]}$.

Théorème 19. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle qu'il existe $g \in L^1$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $|f_n| \leqslant |g|$ p.p. et telle que (f_n) converge simplement vers une fonction f p.p.

Alors, on a $f \in L^1$ et

$$\lim \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

En particulier, on a

$$\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Application 20. Soit $f \in L^1$. On a

$$\lim \int f(t) \exp(int) dt = 0.$$

Théorème 21. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables. Si les f_n sont positives, on a

$$\int_X \sum_n f_n = \sum_n \int_X f_n.$$

Si l'on a

$$\sum_n \int_X |f_n| < \infty$$

alors on a encore cette même égalité.

Application 22. Soit $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Si l'on a $\sum\limits_n \mu(A_n) < \infty$, alors on a $\mu(\limsup\limits_n A_n =) = 0$.

Application 23. Soit $f \in L^1$. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{F}, \quad \mu(A) < \delta \implies \int_A |f| < \varepsilon.$$

2.2 Intégrales à paramètre

Théorème 24. Soit (E, d) un espace métrique et soit $f : E \times X \to \mathbb{K}$. Soit $u_0 \in E$. Pour tout $u \in E$, on suppose $x \mapsto f(u, x)$ mesurable et pour tout $\mu(dx)$-p.p. on suppose $u \mapsto f(u, x)$ continue en u_0. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que

$$\forall u \in E, \quad |f(u, x)| \leqslant g(x) \quad \mu(dx) - p.p.$$

Alors, l'application $u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est définie sur E et continue en u_0.

Exemple 25. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \int\limits_a^x f d\lambda$ est continue.

Théorème 26. Soit $f : I \times X \to \mathbb{K}$ telle que

-pour tout $u \in I$, $f(u, .) \in L^1(\mu)$

-$\mu(dx)$-p.p., on a $u \mapsto f(u, x)$ dérivable sur I

-$\mu(dx)$-p.p., pour tout $u \in I$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)\right| \leqslant |g(x)|$ pour une certaine fonction $g \in L^1(\mu)$.

Alors, l'application $u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est dérivable sur I, de dérivée $u \mapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x)$.

Corollaire 27. Supposons que:

-$\mu(dx)$-p.p. l'application $u \mapsto f(u, x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$

-pour tout $j < k$, pour tout $u \in I$, on a $\frac{\partial^j f}{\partial u^j}(u, x) \in L^1$

-$\mu(dx)$-p.p., pour tout $u \in I$, on a $\left|\frac{\partial^k f}{\partial u^k}(u, x)\right| \leqslant |g(x)|$ pour une certaine fonction $g \in L^1(\mu)$.

Alors, l'application $u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ de classe $\mathcal{C}^k$ et sa j-ème dérivée est $u \mapsto \int_X \frac{\partial^j f}{\partial u^j}(u, x) d\mu(x)$.

Application 28. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est dérivable et l'on peut dériver sous l'intégrale.

Théorème 29. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$. On suppose que l'on a:

-pour tout $z \in \Omega$, l'application $f(z, .)$ est mesurable

-$\mu(dx)$-p.p., l'application $f(.x)$ est mesurable

-pour tout compact K de Ω, il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que $\mu(dx)$-p.p. on a $|f(.x)| \leqslant |g(x)|$.

Alors, l'application $z \mapsto \int_X f(z,x)d\mu(x)$ est holomorphe et on peut dériver sous l'intégrale.

Développement 30 (Application: Polynômes orthogonaux 2.11). *Soit p une fonction poids définie sur I telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant $\int_I \exp(-a\,|x|)p(x)dx < \infty$. Alors, les polynômes orthogonaux sont denses dans $L^2(I,p)$*

3 Interversion intégrale-intégrale

Théorème 31 (Fubini-Tonelli). Soient $(X,\mathcal{A}),(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On suppose que μ et ν sont des mesures σ-finies sur $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ respectivement. Soit $f : (X\times Y, \mathcal{A}\times\mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Alors, l'application $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est bien définie et $\mathcal{A}$-mesurable. De même pour $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu &= \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)\\ &= \int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).\end{aligned}$$

Théorème 32 (Fubini). Avec les mêmes notations, si $f \in L^1(\mu\otimes\nu)$

-$\mu(dx)$-p.p., on a $f(x.) \in L^1(\nu)$

-$\nu(dy)$-p.p., on a $f(.,y) \in L^1(\mu)$

-$\int_Y f(.,y)d\nu(y) \in L^1(\mu)$ et $\int_X f(x,.)d\mu(x) \in L^1(\nu)$

- et on a également

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu &= \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)\\ &= \int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).\end{aligned}$$

Exemple 33. Contre-exemple: on a pas le droit d'échanger l'ordre d'intégration sans avoir l'hypothèse $f \in L^1(\mu\otimes\nu)$: prendre $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$, $X = \mathbb{R}_+$ et $Y = [0;1]$ avec la mesure de Lebesgue.

Application 34 (IPP). Soient f, g localement intégrables sur $\mathbb{R}$. On pose $F : x \in \mathbb{R} \to \int\limits_0^x f(t)dt$, $G(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$. On a

$$\int\limits_0^x f(t)G(t)dt = F(x)G(x) - \int\limits_0^x F(t)g(t)dt$$

en appliquant Fubini à $\mathbb{1}_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant x} f(t)g(s)$ sur $[0,x]^2$.

Application 35. Soit $(a_{p,q})$ une famille sommable. On a

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}} a_{p,q} = \sum_p\sum_q a_{p,q} = \sum_q\sum_p a_{p,q}.$$

Exemple 36. On a $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{pi}}{2}$

Notes: la leçon tient bien sur trois pages.

Références: [12] pour partie 1, [25] pour 1 et 2, [6] pour partie 2 et 3

Plans de leçons ou leçons partielles

Le but est de donner des plans de leçons que je peux reconstruire en suivant les références bêtement, en m'aidant du rapport du jury, du titre de mes parties et celui de mes sous-parties.

Pardonnez-moi d'écrire sous forme de prise de notes.

Leçon 201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

1 Fonctions continues, dérivables, $\mathcal{C}^\infty$

1.1 Les théorèmes fondamentaux

2 Espaces $L^p(\mathbb{R})$

2.1 Les bases

Définition, $\|.\|_p$

Développement 1 (Théorème de Fischer 2.15).

2.2 Densité

3 Séries de Fourier

Développement 2 (Théorème de Fejér 2.13).

Références: partie 1 [12], 2 [6], 3 [21]

Leçon 203 - Utilisation de la notion de compacité.

1 Compacité

A peu près suivre [12].

1.1 dans un espace topologique

1.2 dans un espace métrique

2 Lien avec les fonctions

2.1 Fonctions continues et espaces compacts

- L'image d'un compact est compacte
- Théorème de Heine
- Théorème des bornes atteintes, Rolle, point fixe

2.2 Analyse complexe et Ascoli

Théorème 1. Ascoli

Application 2. Théorème des familles normales aka le théorème de Montel.

Proposition 3 (voir [25]). Si $f_n \to f$ uniformément sur tout compact et f_n holomorphe alors f holomorphe.

Développement 4 (Prolongement le long d'une courbe 2.2).

Développement 5 (Prolongement de la fonction Γ 2.5).

3 Opérateurs compacts

Références: [21] pour Ascoli et Montel, partie 1 [12], partie 2.1 [12]+ma tête, partie 3 [5]

Leçon 208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Premières définitions

1.2 Cas de la dimension finie

Attention à bien travailler sous l'hypothèse $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour ne pas raconter de bêtise (par exemple, l'équivalence des normes ne tient plus quand $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$).

2 Applications linéaires

2.1 Continuité

- Définitions, équivalence avec le caractère lipschitzien
- Exemple de non-continuité (et de non équivalence des normes) en dimension infinie

$$Pasid : \begin{array}{ccc} (L^2([0;1]), \|.\|_1) & \longrightarrow & (L^2([0;1]), \|.\|_2) \\ f & \longmapsto & f \end{array}.$$

  En effet, en prenant la suite de fonctions constantes $f_n = n$, blablabla.

- Norme subordonnée

2.2 Théorème de Hahn-Banach et applications

Développement 1 (Hahn-Banach analytique et Krein-Milman 2.9).

Application 2 (voir [21]). On a $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = B(0,1)$.

2.3 Dans un Banach

- Si F Banach et E evn, alors $L_c(E,F)$ Banach
- Théorème de Baire et applications

2.4 Dans un Hilbert

Développement 3 (Théorème de projection sur un convexe fermé 2.10).

Conséquences, projection avec base hilbertienne, exemples avec les séries de Fourier

Notes: la leçon est peut-être trop longue.

Références: partie 1 et 2.1 [12], peut-être [20], 2.2 [5], 2.3 [5] peut-être [12], 2.4 [5]

Leçon 209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

1 Densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans L^p

1.1 Le cas $\mathcal{C}_c^0$

Dans tout ce suit suit, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Definition 1. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dit à support compact lorsqu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $f = 0$. On note $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies sur Ω, de classe $\mathcal{C}^k$ et à support compact.

Théorème 2. Les fonctions en escaliers appartenant à $L^p(\Omega)$ sont denses dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 3. Les fonctions continues sont denses dans $L^p(\Omega)$.

Exemple 4. La suite

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{n(x^2-1)}) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

approxime $\mathbb{1}_{]0;1[}$.

1.2 Convolution

Definition 5. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On considère la famille (ω_i) des ouverts de Ω tels que $f_{|\omega_i} = 0$ p.p. On note $\text{supp}(f) = \Omega \setminus \omega$ où $\omega = \cup_i \omega_i$ est le plus grand ouvert de Ω tel que $f = 0$ p.p. sur ω.

Remarque 6. Lorsque f est continue, on a $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Definition 7. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'application $f(x - .)g(.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

On pose alors $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dt$.

Proposition 8. On a $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Proposition 9. On a $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$.

Proposition 10. Soient $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On a $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 11. Soient $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On a $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$

et $d^k(f * g) = (d^k f) * g$.

Definition 12. (p_n) est une suite régularisante si

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$
- $\mathrm{supp}(p_n) \subset B(0, 1/n)$
- $\int p_n = 1$
- $p_n \geqslant 0$

Remarque 13. De telles suites existent bien. On poser $p = x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{n(\|x\|^2-1)}) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ puis $p_n : x \mapsto Cn^d p(nx)$, où $C = (\int p)^{-1}$.

Proposition 14. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. On a $p_n * f$ tend vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 15. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On a $p_n * f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 16. $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

1.3 Polynômes orthogonaux

Voir [3]

Développement 17 (Polynômes orthogonaux 2.11).

2 Approximation des fonctions périodiques

blabla séries de Fourier

Développement 18 (Théorème de Fejér 2.13).

Notes: changer ma dernière grande partie en 2-Approximation polynomiale, 2.1 par des polynômes, 2.2 par des polynômes trigonométriques.

Références:

Leçon 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

1 Inversion locale

Développement 1 (Exponentielle surjective 2.6).

2 Théorèmes des fonctions implicites

3 Géométrie

3.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

3.2 Extrémas liés

Développement 2 (Extrémas liés 2.20).

Références: [23] comme base, [15], [3] pour les applications et l'inversion globale

Leçon 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

1 Différentielle

1.1 A l'ordre 1

1.2 A l'ordre 2

2 Théorème d'inversion locale et conséquences

2.1 Enoncé etc

Développement 1 (Exponentielle surjective 2.6).

2.2 Extrémas liés

Développement 2 (Extrémas liés 2.20).

Références: [23] comme base, [3] pour les applications et l'inversion globale, [15]

Leçon 223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

1 Convergence de suites

1.1 Généralités

- Définition limite, convergence implique bornée. Pseudo-réciproque avec Bolzano-Weierstrass
- Définition valeur adhérence, lien avec l'item précédent (une seule valeur d'adhérence dans un compact, espace complet...)
- Définition $\limsup, \liminf$. Lien avec tout ce qui précède (quand $\limsup = \liminf$ alors on converge, les $\limsup$ et $\liminf$ sont des valeurs d'adhérences, ce sont les plus grandes et plus petites valeurs d'adhérence)

1.2 Densité

- Définition
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, les nombres 2-adiques aussi. Application : $\mathrm{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = \{1\}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $f((x+y)/2) \leqslant (f(x)+f(y))/2$

Développement 1 (Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ 2.18).

2 Approximation et calcul de suites

2.1 Relations de comparaison

- Notation de Landau, suites équivalentes. Parler de la sommation des équivalents.
- Exemple: Equivalent de Stirling, Cèsaro

2.2 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Développement 2 (Equivalent de $u_{n+1} = \sin(u_n)$ 2.19).

Parler de la méthode de Newton

2.3 Suites récurrentes linéaires

Voir leçon 226

Références: Modulo epsilon, tout est dans le [12] mais c'est éparpillé.

Leçon 228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

1 Continuité et dérivabilité

1.1 Les bases

1.2 Les théorèmes fondamentaux

TVI, Heine, bornes atteintes, Rolle, accroissements fini

Développement 1 (Théorème de Darboux 2.16).

1.3 Fonctions convexes

Développement 2.

2 Fonctions définies par une intégrale

2.1 Théorèmes de dérivation

Développement 3 (Galton-Watson 2.4).

2.2 Convolution

3 Séries de Fourier

4 Dérivation faible

Notes: la partie sur les séries de Fourier est optionnelle, attention à pas trop parler d'espace L^p (ça serait hors sujet je pense).

Références: partie 1 [12] (voir leçon 253 pour le 1.3), 2 [6], 3 [21], 4 [4]

Leçon 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

1 Fonctions monotones

- Définition, caractérisation par la dérivée
- Fonctions strictement monotones, caractérisation par l'injectivité
- $f' > 0$ implique stricte croissance et pseudo-réciproque (si strictement croissante alors l'ensemble des zéros de de f' est d'intérieur vide et $f' \leqslant 0$).

2 Fonctions convexes

2.1 Généralités

2.2 Cas réel

3 Applications

3.1 Inégalités classiques

3.2 Hahn-Banach

Développement 1 (Hahn-Banach analytique et Krein-Milman 2.9).

Application 2. On a $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = B(0,1)$.

- Hahn-Banach géométrique

3.3 Galton-Watson

Développement 3 (Galton-Watson 2.4).

Notes: on peut mettre Galton-Watson ailleurs éventuellement.

Références: partie 1 ma tête, 2.1 [3], 2.2 [12], 3.1 [12], 3.2 [5], 3.3 [8]

Leçon 230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles. Exemples.

1 Généralités sur les séries

- Définition série convergente, divergente
- Cas des séries à termes positifs
- Ex : série géométrique
- Série absolument convergente, permutation dans l'ordre de sommation, sommation par paquet, contre exemple avec $(-1)^n/n$
- Si $\sum u_n$ convergente alors u_n tend vers 0. Réciproque fausse
- Une suite converge ssi $\sum u_{n+1} - u_n$ converge
- Application: Riez-Fischer

2 Critères de convergence

2.1 Les théorèmes généraux

- Comparaison série intégrale
- Application: Série de Riemann, estimation du reste, équivalent de la série harmonique, si $u_n n^\alpha$ tend vers 0 avec $\alpha > 1$ alors...
- Critère pour les séries alternées, majoration du reste. Exemple: $(-1)^n/n$.
- Règle de d'Alembert
- Application: $\exp(z)$ existe bien

2.2 Théorème de sommation dans les relations de comparaison

- Enoncés

- Application: on retrouve l'équivalent de la série harmonique
- Théorème de Césaro. Possible application: théorème de Fejér.

3 Séries entières

- exp, log, $1/1-x$
- dérivation, unicité des coefficients, intégration

Développement 1 (Nombres de Bell 2.14).

Développement 2 (Galton-Watson 2.4).

Notes: Il faut parler de produit de Cauchy dans la partie une pour pouvoir parler des nombres de Bell. On peut peut-être aussi mention l'équivalent de Stirling. Références: [12]

Leçon 234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrable

1 Intégrale de Lebesgue

2 Fonctions intégrables

3 Espaces L^p

3.1 L'espace vectoriel normé L^p

Développement 1 (Théorème de Fischer 2.15).

3.2 Convolution, fonctions lisses à support compact

3.3 Le cas particulier de L^2

Développement 2 (Polynômes orthogonaux 2.11).

Références: [6] pour quasiment tout, [5] pour la partie sur la convolution

Leçon 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

Références: partie 1 [21], 2 [5], 3.1 [24], 3.2 [3], 3.3 [18]

1 Fonction Γ

Développement 1 (Prolongement de la fonction Γ 2.5).

2 Convolution

3 Transformée de Fourier

3.1 Propriétés de base (inversion)

3.2 Polynômes orthogonaux

Développement 2 (Polynômes orthogonaux 2.11).

3.3 Fonction caractéristique

Notes: Peut-être pas le temps/pas la place d'écrire la dernière sous-partie. Il conviendrait de changer ma partie 1 en "théorèmes de bases" et mettre la fonction Gamma en application dans cette partie.

Leçon 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

1 Modes de convergence

Dans tout ce qui suit, X est un ensemble et (E,d) est un espace métrique.

Definition 1. Une suite de fonctions $f_n : X \to E$ convergence simplement (vers f) lorsqu'il existe une fonction $f : X \to E$ telle que pour tout $x \in X$ on a $f_n(x) \to f(x)$.

Definition 2. Elle converge uniformément lorsque $||f - f_n||_\infty \to 0$.

Definition 3. Ces définitions s'appliquent aux séries de fonctions en considérant la suite des sommes partielles.

Exemple 4. Détailler convergence simple et non uniforme sur $[0;1]$ de $x \mapsto x^n$. Convergence uniforme sur tout $[0,a]$ avec $a < 1$.

Definition 5. Si $(E, ||.||)$ est un Banach, on dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement lorsque $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

Proposition 6. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Remarque 7. La réciproque est fausse. On peut quand même préciser le cas suivant.

Proposition 8 (Ma tête). Soit $h_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers 0 en décroissant. ALors, (h_n) converge uniformément vers 0.

Proposition 9. La convergence normale implique la convergence uniforme.

Remarque 10 (Ma tête). La réciproque est fausse : $f_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.

Proposition 11. Il y a unicité de la limite.

1.1 Propriétés limites

Proposition 12. Soit (f_n) une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Alors, f est continue.

Théorème 13 (Fubini). Soit (g_n) une suite de fonctions mesurables, $g_n : X \to E$ avec (X,μ) espace mesuré et E Banach. Si $\sum \int |g_n|(x) d\mu(x)$ convergence alors on peut échanger somme et intégrale et $\sum g_n$ converge presque sûrement.

Théorème 14. Théorème d'inversion limite et dérivée à l'ordre quelconque lorsque l'on a la convergence uniforme de la dernière dérivée.

Remarque 15. Ce théorème s'applique aux séries de fonctions (sous les hypothèses précédentes) et donne le droit de dériver sous le signe somme.

Application 16. Le théorème de Fubini donne (en partie) la complétude des espaces L^p.

2 Série de Fourier

Voir la leçon sur les séries de Fourier.

Développement 17 (Théorème de Fejér 2.13).

3 Séries entières

Voir la leçon sur les séries entières

Développement 18 (Nombres de Bell 2.14).

Références: partie 1 et 3 [12], partie 2 [21]

Leçon 243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

1 Rayon

1.1 Définition

1.2 Calcul du rayon

2 Propriétés de la somme

2.1 Somme et produit

2.2 Dérivation

2.3 Unicité des coefficients

3 Fonctions DSE (développables en série entière)

3.1 Définition, exemples classiques

Développement 1 (Galton-Watson 2.4).

3.2 Nombres de Bell

Développement 2 (Nombres de Bell 2.14).

Notes: On peut parler de fonctions holomorphes facilement, autant le faire.

Références: [12]

Leçon 245 - Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications

Développement 1 (Prolongement de la fonction Γ 2.5).

Développement 2 (Prolongement le long d'une courbe 2.2).

Notes: J'ai plus ou moins perdu mon plan... Il me semble que pour cette leçon, il est facile de trouver un plan solide en suivant le rapport du jury et n'importe quelle référence d'analyse complexe comme le [25] par exemple. En développement, on peut aussi penser aux biholomorphismes du disque unité.

Leçon 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

1 Fonctions 2π-périodiques, coefficients de Fourier

Références: [21]

1.1 Définitions

1.2 Propriétés des coefficients de Fourier

2 Principaux théorèmes de convergence

2.1 Noyau de Dirichlet

2.2 Noyau de Fejér

2.3 Théorèmes de convergence

Développement 1 (Série de Fourier non convergente en 0 2.12).

Développement 2 (Théorème de Fejér 2.13).

Notes: Ma leçon est trop courte.

Leçon 250 - Transformation de Fourier. Applications.

1 Propriétés de base, invertion

2 Extension de la transformée de Fourier à des mesures finies

3 Applications

3.1 Polynômes orthogonaux

Développement 1 (Polynômes orthogonaux).

3.2 Fonctions caractéristiques, Lévy

Développement 2 (Théorème de Lévy faible 2.7).

Références: partie 1 [24], 2 [18], 3.1 [3]

Leçon 253 - Utilisation de la convexité en analyse

1 Lien avec les fonctions

1.1 Fonctions convexes réelles et inégalités

1.2 Minimisation

2 Théorème de Hahn-Banach

2.1 Version analytique

Développement 1 (Hahn-Banach analytique et Krein-Milman 2.9).

2.2 Version géométrique

- Jauge de Minkowski

Application 2. $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = B(0,1)$

3 Théorème de projection et conséquences

Développement 3 (Théorème de projection sur un convexe fermé 2.10).

Notes: Je devrais peut-être mettre la sous-partie 1.2 dans la dernière partie.

Références: 1.1 [12], 1.2 [5] ?, partie 2 [5] avec [21] pour le résultat sur $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$, partie 3 [5]

Leçon 261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications

1 Loi et premiers exemples

- Définition de la loi d'une variable aléatoire.
- Loi de Bernouilli $\rightsquigarrow$ pile ou face
- Loi binomiale $\rightsquigarrow$ nombre de succès dans une expérience répétée de façon indépendante
- Loi uniforme
- Loi de Poisson (sans mémoire)
- Loi normale, loi à densité

2 Caractérisation à l'aide de fonctions

2.1 Espérance

2.2 Fonction de répartition

2.3 Fonction caractéristique

Développement 1 (Théorème de Lévy faible 2.7).

3 Lien avec l'indépendance

- Loi couple, loi conjointe marginale, lien
- Loi d'un couple de variables indépendantes

Développement 2 (Produit eulérien de la fonction ζ par les probabilités 2.3).

Notes: Bien s'appuyer sur le rapport, peut-être mettre une sous-partie dans la deuxième partie pour parler des fonctions génératrices avec la loi de Poisson et mettre le résultat sur la somme de lois de Poisson en application.

Références: [2] pour le plan en m'aidant du [19], [18] pour le développement sur Lévy

Leçon 262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires, théorèmes limite. Exemples et applications

1 Les modes de convergence

Développement 1 (Théorème de Lévy faible 2.7). *Caractérisation de la convergence en loi par les fonctions caractéristiques.*

2 Théorèmes limite

2.1 Loi des grands nombres

Développement 2 (Loi des grands nombres dans le cas L^2. 2.8). *Loi des grands nombres dans le cas L^2.*

2.2 Théorème central limite

2.3 Kolmogorov

Leçon 264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

1 Définitions et lois usuelles

Ne pas oublier de faire le lien entre loi binomiale et loi de Poisson.

2 Moments

3 Indépendance

Développement 1 (Produit eulérien de la fonction ζ par les probabilités 2.3). *Produit eulérien de la fonction ζ par les probabilités*

4 Fonctions génératrices

Développement 2 (Galton-Watson 2.4). *Galton-Watson (sauter la preuve de "G strictement convexe n'a au plus que deux points fixes" par manque de temps)*

Références: [19], [2], [8]

Leçon 265 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales

1 Fonctions usuelles

1.1 L'exponentielle

Definition 1. On pose $\exp(z) = \sum_{n \leqslant 0} z^n/n!$.

Remarque 2. exp définit également une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3. Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, on a $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Proposition 4. Pour tout z, on a $\exp(z) \neq 0$ et exp holomorphe avec $\exp' = \exp$.

Proposition 5. En tant que fonction réelle, exp est strictement croissante et on connaît ses limites à l'infini.

Proposition 6. Il existe un plus petit réel $\pi > 0$ tel que $\exp(i\pi/2) = i$. On a $\exp(z) = 1$ ssi $z = 2i\pi k$.

Proposition 7. $t \mapsto \exp(it)$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité $\mathbb{U}$.

$z \mapsto \exp(z)$ est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

1.2 cos et sin

Definition 8. On définit cos et sin par leur série entière.

Remarque 9. De même, cos et sin définissent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 10. On a $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$.

Corollaire 11. On a $\cos^2 + \sin^2 = 1$, $\cos(t) = \mathrm{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \mathrm{Im}(\exp(it))$.

Proposition 12. On a $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Proposition 13. Les fonctions cos et sin sont surjectives et 2π-périodiques en tant que fonctions réelles à valeurs dans $[-1;1]$.

1.3 Logarithme

2 Fonction Γ

Definition 14. Définition de la fonction Γ.

Proposition 15. Γ est holomorphe.

Proposition 16. On a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et $\Gamma(n+1) = n!$.

Développement 17 (Prolongement de la fonction Γ 2.5). *On a*

$$\Gamma(z)) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

ce qui permet de prolonger Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en les entiers négatifs.

Corollaire 18. $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ et donc $1/\Gamma$ se prolonge en une fonction entière.

3 Exponentielle matricielle

Definition 19. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\exp(M) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{M^k}{k!} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 20. Si A et B commutent, on a $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Proposition 21. $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto A\exp(tA)$.

Corollaire 22. Les solutions de $y' - Ay = 0$ sont les $t \mapsto \lambda \exp(tA)$.

Corollaire 23. Sur un intervalle, les solutions de $y' - Ay = b$ avec b continue sont... (méthode variation de la constante)

Développement 24 (Exponentielle surjective 2.6). $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*

Références: [24], [21], [26]

Leçon 266 - Illustration de la notion d'indépendance

1 Indépendance d'événements

- Indépendance pour deux ensembles.
- Indépendance pour une famille. Mutuellement et 2 à 2, lien et contre-exemple.
- Passage au complémentaire.

Développement 1 (Produit eulérien de la fonction ζ par les probabilités 2.3). *Produit eulérien de la fonction ζ par les probabilités.*

- Lemme de coalition.
- Borel-Cantelli, application à la convergence en probabilité ou convergence presque sûre.

2 Indépendance de variables aléatoires

2.1 Définition et lien avec les fonctions

- Définition, cas de v.a. discrètes.
- Si (X_i) indépendantes, f_i fonctions mesurables alors $f_i(X_i)$ indépendantes.
- Caractérisation de l'indépendance via les lois, via l'espérance, cas de v.a. à densité.
- Lien avec la variance.

Application 2. Somme de lois de Poisson via fonction génératrice.

2.2 Indépendance de tribus

- Définition, définition équivalente de l'indépendance de v.a.
- Tribu asymptotique, sens de cette tribu.
- Loi du $0-1$.

Leçon 267 - Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure

1 En topologie

1.1 Connexité par arcs

Dans tout ce qui suit, X désigne un espace topologique.

Definition 1. Un arc dans X est une application continue de $[0;1]$ dans X.

Definition 2. L'espace topologique X est dit connexe par arcs lorsque pour tout $x, y \in X$, il existe un arc γ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(y)$. On dit que γ relie x à y.

Exemple 3. Les espaces vectoriels réels normés sont connexes par arcs.

Proposition 4. Si X est connexe par arcs alors X est connexe.

Proposition 5. Soient Y un espace topologique, $f : X \to Y$ continue. Supposons X connexe par arcs. Alors, $f(X)$ est connexe par arcs.

Exemple 6. Le cercle unité $\mathbb{U}$ est connexe par arcs puisque l'on dispose de l'application $t \mapsto \exp(2i\pi t)$.

Proposition 7. Soit $f : X \to Y$ continue, localement constante avec X connexe par arcs. Alors, f est constante.

Definition 8. La composante connexe de $x \in X$ est le plus grand sous-espace topologique de X contenant x.

Proposition 9. Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme. L'application f induit une bijection de l'ensemble des composantes connexes par arcs de X dans celles de Y.

Proposition 10. Les sous-espace connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Application 11. -L'espace $\mathbb{R}$ n'est homéomorphe à aucun $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

-TVI

1.2 Topologie algébrique

Dans tout ce qui suit, X est un espace topologique connexe par arcs.

Definition 12. Soit $x \in X$. On appelle lacet basé en x tout arc $\gamma : [0;1] \to X$ tel que $\gamma(0) = x = \gamma(1)$.

Definition 13. On dit que deux lacets sont homotopes lorsque... (homotopie à extrémités fixées)

Proposition 14. La relation d'homotopie sur les lacets basés en x est une relation d'équivalence. On note $[\gamma]$ la classe de γ.

Definition 15. On note $\pi_1(X,x)$ l'ensemble des $[\gamma]$.

Proposition 16. La loi $*$ définit sur $\pi_1(X,x)$ par : donner la formule de la concaténation de deux lacets

fait de $\pi_1(X,x)$ un groupe.

De plus, si $y \in X$, on a $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y)$.

Proposition 17. Deux espaces homotopes ont même groupe fondamental.

Application 18. On a pas $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^n$ quand $n > 2$.

Développement 19 (Brower en dimension 2 2.1). *Brower en dimension* 2.

2 En analyse complexe

2.1 Fonctions holomorphes

Analycité des fonctions holomorphes, formule de Cauchy.

2.2 Fonctions méromorphes

Théorème des résidus

2.3 Equations différentielles complexes

Développement 20 (Prolongement le long d'une courbe 2.2).

Références: 1.1 [12] + ma tête, 1.2 [16], 2 [25]

Développements Avant chaque développement, vous trouverez la liste des leçons dans lesquelles j'ai casés ces développements. Ce choix ne sous-entend pas qu'il n'est pas possible de caser ces développements dans d'autres leçons que celles que j'ai choisies.

Vous y trouverez également les références que j'ai utilisées pour chaque développement. Lorsque j'écris "ma tête", celui signifie que je n'ai pas trouvé de référence pour ces développements voire qu'ils sont faits maison; il faut donc être capable de les restituer de tête.

1 Développements pour leçons d'algèbre

2 Développements pour leçons d'analyse

2.1 Brower en dimension 2

Leçons: 267

Références:

2.2 Prolongement le long d'une courbe

Leçons: 203,204,207,245,267

Références: [17]

2.3 Produit eulérien de la fonction ζ par les probabilités

Leçons: 261,264,266, 264,

Références: ma tête

2.4 Galton-Watson

Leçons: 226,228,229,230,243,264

Références: [8]

2.5 Prolongement de la fonction Γ

Leçons: 203,235,239,245,265

Références: [21]

2.6 Exponentielle surjective

Leçons: 214,215,265

Références: [26]

2.7 Théorème de Lévy faible

Leçons: 250,261,262

Références: [18]

2.8 Loi des grands nombres dans le cas L^2

Leçons: 262

Références: [18]

2.9 Hahn-Banach analytique et Krein-Milman

Leçons: 207,208,229,253

Références: ma tête

2.10 Théorème de projection sur un convexe fermé

Soit H un Hilbert. Soit C un convexe non vide de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in H$ tel que $\|x - p_C(x)\| = \inf_{v \in C} \|x - v\|$.

De plus, $p_c(x)$ est caractérisé par $p_C(x) \in C$ et $\langle x - p_C(x), u - p_C(x) \rangle \leqslant 0$ pour tout $u \in C$. Aussi, p_C est 1-lipschitzienne.

Leçons: 205,208,213,253

Références: [5]

2.11 Polynômes orthogonaux

Leçons: 209,213,234,235,239,250

Références: [3]

2.12 Série de Fourier non convergente en 0

Démonstration en utilisant Steinhauss.

Leçons: 246

Références: ma tête

2.13 Théorème de Fejér

Leçons: 201,209,241,246

Références: [21]

2.14 Nombres de Bell

Leçons: 228,230,241,243

Références: ma tête ou [12]

2.15 Théorème de Fischer

Leçons: 201,205,234

Références: [6]

2.16 Théorème de Darboux

Darboux + c-ex à la réciproque du TVI + $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable implique $\mathcal{C}^1$.

Leçons: 228

Références:

2.17 Caractérisation des suites récurrences linéaires

Leçons: 226

Références: [14]

2.18 Les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Mettre la densité des $\cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$

Leçons: 223

Références: [10]

2.19 Equivalent de $u_{n+1} = \sin(u_n)$

Leçons: 223

Références: [12] (ou peut-être [13])

2.20 Extrémas liés

Voir leçon 214

Leçons: 214,215

Références: [1]

3 Développements allant dans les deux types de leçon

3.1 Théorème de Lie-Kolchin

Leçons: 204

Références: [7]

References

[1] A. Avez. Calcul différentiel. Collection Maitrise de Mathematiques Pures. Paris etc.: Masson. 148 p. FF 118.00 (1983)., 1983.

[2] Philippe Barbe and Michel Ledoux. *Probabilité*. EDP SCIENCES, 2007.

[3] Vincent Beck. *Objectif agrégation: pour les mathématiques.* H ET K, 2005.

[4] Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier.* Palaiseau: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2001.

[5] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Paris: Masson, 1994.

[6] Marc Briane and Gilles Pagès. *Analyse. Théorie de l'intégration. Convolution et transformée de Fourier. Cours & exercices corrigés : Licence 3 & Master 1 mathématiques, écoles d'ingénieurs.* Paris: Vuibert, 6th edition edition, 2015.

[7] Antoine Chambert-Loir. *Algèbre corporelle.* ECOLE POLYTECH, 2005.

[8] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel, and Thierry Meyre. *Exercices de probabilités. Licence, master, écoles d'ingénieurs*, volume 3 of *Enseign. Math., Cassini.* Paris: Cassini, 3rd edition edition, 2005.

[9] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* Les Ulis: EDP Sciences, 4th edition edition, 2016.

[10] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Mathematical exercises for oral examination at the École Polytechnique and the Écoles Normales Supérieures. Vol. I: Algebra*, volume 1 of *Enseign. Math., Cassini.* Paris: Cassini, 2001.

[11] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques des oraux de l'École Polytechnique et des Écoles Normales Supérieures. Analyse. Tome 2*, volume 13 of *Enseign. Math., Cassini.* Paris: Cassini, 2003.

[12] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Paris: Ellipses, 2nd edition edition, 2008.

[13] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre.* Paris: Ellipses, 2nd edition edition, 2009.

[14] Lucas Isenmann and Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques - Une sélection de développements.* ellipses, 2019.

[15] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble; Les Ulis: EDP Sciences, 1996.

[16] Christian Leruste. *Topologie algébrique. Une introduction, et au-delà*, volume 120 of *Math. Devenir.* Paris: Calvage et Mounet, 2017.

[17] Didier Lesesvre. *131 développements pour l'oral.* Dunos, 2020.

[18] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités. Tome II: Maîtrise – Agrégation*, volume 5 of *Enseign. Math., Cassini.* Paris: Cassini, 2000.

[19] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités. Tome I: CAPES–Agrégation*, volume 1 of *Enseign. Math., Cassini.* Paris: Cassini, 2002.

[20] Alain Pommellet. *Cours d'analyse - Agrégation de Mathématiques*. ellipses, 1994.

[21] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunos, 2020.

[22] Jean-Étienne Rombaldi. *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*. Les Ulis: EDP Sciences, 1999.

[23] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, volume 4 of *Enseign. Math., Cassini*. Paris: Cassini, 1999.

[24] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman*. Paris: Masson, 1994.

[25] Patrice Tauvel. *Analyse complexe pour la Licence 3*. Dunos, 2020.

[26] Maxime Zavidovique. *Un Max de Math*. Calvage et Mounet, 2013.