Base du groupe des unités cyclotomiques pour certains corps

SOUANEF Rafik

Université de Franche-Comté

13 juillet 2025

Introduction

Notations

Dans tout ce qui suit, on note $\mathbb{K}$ un corps de nombres abélien.
On note $\mathrm{E}(\mathbb{K}) = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^{\times}$ le groupe des unités de $\mathbb{K}$.
On note $h(\mathbb{K})$ le cardinal du groupe des classes d'idéaux de $\mathbb{K}$.
On note $\zeta_n = \exp(2i\pi/n)$.

Introduction - Les unités cyclotomiques

Histoire

Kummer a eu l'idée de regarder un sous-groupe de $E(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ pour approximer ce dernier groupe. Il a remarqué que l'indice ce sous-groupe était égal à $h(\mathbb{Q}(\zeta_p)^+)$.

Introduction - Les unités cyclotomiques

Histoire

Kummer a eu l'idée de regarder un sous-groupe de $\mathrm{E}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ pour approximer ce dernier groupe. Il a remarqué que l'indice ce sous-groupe était égal à $h(\mathbb{Q}(\zeta_p)^+)$.

Théorème (d'Iwasawa)

Le $\Lambda(G)$-module $\mathrm{E}_\infty^{(1)}/\mathrm{Was}_\infty^{(1)}$ est isomorphe à $\Lambda(G)/I(G).\zeta_p$ avec

$$
\begin{aligned}
G &= \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \\
\Lambda(G) &= \varprojlim \mathbb{Z}_p[G/H] \\
E_\infty^{(1)} &= \varprojlim E(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))^{(1)}
\end{aligned}
$$

Introduction - Les unités

Théorème (Kronecker-Weber)

Le corps $\mathbb{K}$ est contenu dans un corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_n)$. Le plus petit entier n satisfaisant cette condition s'appelle le conducteur de $\mathbb{K}$.

Introduction - Les unités

Théorème (Kronecker-Weber)

Le corps $\mathbb{K}$ est contenu dans un corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_n)$. Le plus petit entier n satisfaisant cette condition s'appelle le conducteur de $\mathbb{K}$.

Théorème (des unités de Dirichlet)

Le groupe $\mathrm{E}(\mathbb{K})$ est isomorphe au produit de $\mu(\mathbb{K})$ et d'un groupe abélien libre de rang $r_1 + r_2 - 1$ où r_1 désigne le nombre de plongements réels de $\mathbb{K}$ et r_2 désigne le nombre de plongements complexes de $\mathbb{K}$ à conjugaison près.

Unités cyclotomiques

Définition

On pose $\mathcal{C}_n$ le module galoisien (loi multiplicative) engendré par les racines de l'unité de $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ et les $1-\zeta_d$ pour $d \mid n$. On pose $\mathrm{Was}(\mathbb{K}) = \mathrm{E}(\mathbb{K}) \cap \mathcal{C}_n$.

Définition

On note $\mathrm{Sin}(\mathbb{K})$ l'intersection de $\mathrm{E}(\mathbb{K})$ avec le module galoisien engendré par les racines de l'unité de $\mathbb{K}$ et les

$$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{K}\cap\mathbb{Q}(\zeta_d)}(1-\zeta_d).$$

Unités cyclotomiques

Proposition (générateurs)

Le groupe $\mathrm{Sin}(\mathbb{K})$ est engendré par :
-les racines de l'unité de $\mathbb{K}$
-les $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{K}\cap\mathbb{Q}(\zeta_d)}(1-\zeta_d^a)$ avec d composé
-les $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{K}\cap\mathbb{Q}(\zeta_d)}(1-\zeta_d/1-\zeta_d^a)$ avec $d = p^e$
où $d \mid n$ est tel que $d \wedge (n/d) = 1$ et $a \wedge d = 1$

Unités cyclotomiques

Proposition (générateurs)

Le groupe $\mathrm{Sin}(\mathbb{K})$ est engendré par :
-les racines de l'unité de $\mathbb{K}$
-les $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{K}\cap\mathbb{Q}(\zeta_d)}(1-\zeta_d^a)$ avec d composé
-les $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{K}\cap\mathbb{Q}(\zeta_d)}(1-\zeta_d/1-\zeta_d^a)$ avec $d = p^e$
où $d \mid n$ est tel que $d \wedge (n/d) = 1$ et $a \wedge d = 1$

Proposition (relations)

$$N_{\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}(\zeta_d)}(1-\zeta_n) = \left(\prod_{p|n/d}(1-\mathrm{Frob}(p)^{-1})\right)(1-\zeta_d)$$

$$(1-\zeta_d) = -\zeta_d(1-\zeta_d^{-1})$$

Unités cyclotomiques

Théorème (Sinnott, 1980/1981)

Les groupes $\mathrm{Was}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Sin}(\mathbb{K})$ sont d'indice fini dans $\mathrm{E}(\mathbb{K})$ (et ce sont des groupes abéliens de type fini, de rang $r_1 + r_2 - 1$). On a

$$[\mathrm{E}(\mathbb{K}) : \mathrm{Sin}(\mathbb{K})] \longleftrightarrow h(\mathbb{K}^+).$$

Unités cyclotomiques

Théorème (Sinnott, 1980/1981)

Les groupes $\mathrm{Was}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Sin}(\mathbb{K})$ sont d'indice fini dans $\mathrm{E}(\mathbb{K})$ (et ce sont des groupes abéliens de type fini, de rang $r_1 + r_2 - 1$). On a

$$[\mathrm{E}(\mathbb{K}) : \mathrm{Sin}(\mathbb{K})] \longleftrightarrow h(\mathbb{K}^+).$$

Attention

Dans la suite, on quotiente ces groupes par celui des racines de l'unités.

Unités cyclotomiques

Théorème (Sinnott, 1980/1981)

Les groupes $\mathrm{Was}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Sin}(\mathbb{K})$ sont d'indice fini dans $\mathrm{E}(\mathbb{K})$ (et ce sont des groupes abéliens de type fini, de rang $r_1 + r_2 - 1$). On a

$$[\mathrm{E}(\mathbb{K}) : \mathrm{Sin}(\mathbb{K})] \longleftrightarrow h(\mathbb{K}^+).$$

Attention

Dans la suite, on quotiente ces groupes par celui des racines de l'unités.

Théorème (Gold et Kim, 1989, Kucera, 1991/1992)

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_n)$, une base de $\mathrm{Was}(\mathbb{Q}(\zeta_n)) = \mathrm{Sin}(\mathbb{Q}(\zeta_n))$ a été explicitée.

Corps totalement déployés

Définition

Supposons $\mathbb{K}$ de conducteur $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i} = \prod_{i=1}^{r} q_i$. On dit que $\mathbb{K}$ est totalement déployé si

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \cdots \mathbb{K}_r$$

où $\mathbb{K}_i$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{q_i})$.

Remarque

Certains cas sont traités dans
-Werl, Milan "On bases of Washington's group of circular units of some real cyclic number fields", JNT, 2014
-Kučera, Radan "The circular units and the Stickelberger ideal of a cyclotomic field revisited", Acta Arith., 2016

Mon travail

Théorème (S.)

Si $\mathbb{K}$ est totalement déployé, alors $\mathrm{Was}(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$ est un facteur direct de $\mathrm{Was}(\mathbb{Q}(\zeta_n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$ et on sait expliciter une base de $\mathrm{Was}(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$.

Mon travail

Théorème (S.)

Si $\mathbb{K}$ est totalement déployé, alors $\mathrm{Was}(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$ est un facteur direct de $\mathrm{Was}(\mathbb{Q}(\zeta_n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$ et on sait expliciter une base de $\mathrm{Was}(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$.

Corollaire

Soient $A_1, \dots, A_k$ des parties disjointes de $\llbracket 1, r \rrbracket$.
En notant $h_p(\mathbb{K}^+)$ la p-partie du nombre de classes de $\mathbb{K}^+$, on a, pour tout p premier impair

$$\prod_{j=1}^{k} h_p(\mathbb{K}^+_{A_j}) \mid h_p(\mathbb{K}^+).$$

Idées de la preuve

La preuve se décompose en plusieurs étapes :

- trouver une famille (libre) de $\mathrm{Was}(\mathbb{K})$ qui convienne
- montrer qu'elle a pour cardinal $r_1 + r_2 - 1$
- montrer qu'elle génère un facteur direct de $\mathrm{Was}(\mathbb{Q}(\zeta_n)) \otimes \mathbb{Z}[1/2]$.