CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

4 heures — Calculatrices autorisées

2018

Objectifs et notations

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines questions liées à la fonction zêta, notée ζ, définie par

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

— Dans la partie I, on introduit la fonction ζ et on étudie son allure (variations, limites, courbe représentative).

— La partie II étudie une fonction f définie comme la somme d'une série de fonctions. Le développement en série entière de la fonction f fait intervenir la fonction ζ.

— La partie III utilise la fonction ζ pour construire une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et montrer des résultats liant les probabilités et l'arithmétique.

I Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

On note $\mathcal{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

Q 1. Déterminer $\mathcal{D}_\zeta$.

Q 2. Montrer que ζ est continue sur $\mathcal{D}_\zeta$.

Q 3. Étudier le sens de variation de ζ.

Q 4. Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

Q 5. Soit $x\in\mathcal{D}_\zeta$ et soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\leqslant\frac{1}{n^x}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

Q 6. En déduire, que pour tout $x\in\mathcal{D}_\zeta$,

$$1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\leqslant\zeta(x)\leqslant 1+\frac{1}{x-1}$$

Q 7. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Q 8. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q 9. Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

II Étude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, f désigne la fonction définie par

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}\right)$$

On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

II.A – Ensemble de définition et variations

Q 10. Déterminer $\mathcal{D}_f$.

Q 11. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$ et étudier ses variations.

II.B – Équivalents

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 12. Calculer $f(k)$.

Q 13. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Q 14. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, vérifier que $x+k \in \mathcal{D}_f$, puis calculer $f(x+k)-f(x)$.

Q 15. En déduire un équivalent de f en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

II.C – Série entière

On considère la série entière de la variable réelle x donnée par $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$.

Q 16. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Y a-t-il convergence en $x = \pm R$?

Q 17. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 18. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1,1[, \quad |f^{(k)}(x)| \leqslant k! \left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right)$$

Q 19. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$$

II.D – Intégrales

Q 20. Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale ci-dessous est convergente

$$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1-t} \, \mathrm{d}t$$

Q 21. En remarquant que, pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$, montrer que

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{1-t} \, \mathrm{d}t$$

Q 22. Déduire des questions précédentes une expression intégrale de $\zeta(k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 23. Montrer enfin que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(k+1) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{\mathrm{e}^u - 1} \, \mathrm{d}u$$

III Probabilités

Rappels d'arithmétique

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$. On dit aussi que a est un diviseur de b, ou encore que b est multiple de a.

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi, a divise b si et seulement si $b \in a\mathbb{N}^*$.

— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$, le plus grand commun diviseur (PGCD) de a et b est l'entier naturel noté $a \wedge b$ tel que

$$a \wedge b = \max\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b\}$$

— Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$n \text{ divise } a \wedge b \iff n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b$$

— On dit qu'un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.

On note $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $q_1, ..., q_n$ sont des nombres premiers distincts et, alors pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$(\forall i \in [\![1,n]\!], \quad q_i \text{ divise } a) \iff \prod_{i=1}^{n} q_i \text{ divise } a$$

— Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \geqslant 2$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que p divise a.

III.A – Loi zêta

Q 24. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x.

Dans les questions suivantes de cette sous-partie III.A, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

Q 25. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.

Q 26. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.

Q 27. En déduire la variance de X.

Q 28. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

III.B – Mutuelle indépendance

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x.

Soit enfin $(q_1, ..., q_n) \in \mathcal{P}^n$, un n-uplet de nombres premiers distincts.

Q 29. Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), ..., (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Cela entraine, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

Q 30. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

III.C – Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x. Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} \left((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*) \right)$$

Q 31. Exprimer l'événement A à l'aide des événements C_n. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}$$

III.D – Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $W_n = U_n \wedge V_n$.

Q 32. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\mathbb{P}(W_n = k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k.

Q 33. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \implies 1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1$$

Q 34. En déduire que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode de la question 33, on peut établir que, pour tout partie B de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(W \in B) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y ont la même loi de probabilité.

Q 35. Préciser la loi de W. En considérant ℓ_1, que peut-on alors en conclure ?

• • • FIN • • •