

CONSEILS POUR L'ÉPREUVE DE MODÉLISATION OPTION A PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

THOMAS CAVALLAZZI ET RÉMI MOREAU

Ce document rassemble quelques conseils pour l'épreuve de modélisation option Probabilités et Statistiques à l'agrégation externe. La liste n'est évidemment pas exhaustive et chacun est libre de tenir compte ou non de chaque conseil, le but est de donner une idée globale de ce qui est attendu par les membres du jury.

Table des matières

1	Rappel des règles de l'épreuve	1
2	Organisation de l'exposé	2
3	Modélisation	2
4	Pédagogie, réactivité, attitude	3
5	Illustrations informatiques	4
6	Contenu mathématique	4
7	Stratégies et organisation des 4 heures de préparation	5
8	Conseils généraux en vrac	6

1 Rappel des règles de l'épreuve

Vous disposez de 4 heures pour préparer votre oral. Pendant ces 4 heures, vous devez choisir l'un des deux sujets qui vous sont proposés. Un sujet correspond à un texte d'environ 6 pages présentant un problème de modélisation et des résultats mathématiques dont les preuves, si elles sont rédigées, sont plus ou moins détaillées. Durant l'oral vous devez présenter un exposé sur le texte que vous avez choisi et montrer que vous vous l'êtes approprié. Il ne faut donc pas y faire directement référence dans votre présentation. Évitez donc de dire "dans le texte, il est dit que...", ou de commencer par "ce texte présente...". Il est toutefois possible de faire référence à une formule (vraiment) longue, c'est la seule exception à cette règle. L'oral dure environ 55 minutes. Vous avez 35 minutes pour faire votre présentation durant laquelle le jury ne vous interrompt pas. Celle-ci doit impérativement contenir une partie de modélisation avec l'introduction des hypothèses, des énoncés mathématiques, des preuves rigoureuses de résultats et enfin des illustrations informatiques. A la fin de ces 35 minutes, le jury vous posera des questions sur votre exposé, sur le texte et des questions de probabilités et statistiques plus ou moins en lien avec les objets mathématiques et théorèmes présents dans le texte.

2 Organisation de l'exposé

Vous devez présenter un exposé structuré qui doit respecter un certain format. Les points suivants sont très appréciés voire incontournables.

- Vous devez donner un titre à votre présentation, différent de celui du texte si possible. Il vaut mieux éviter d'employer des termes mathématiques dans le titre. Vous pouvez choisir quelque chose d'original mais attention à ne pas en faire trop.
- Le jury appréciera fortement que vous partiez d'un problème concret et que le modèle mathématique présenté dans le texte apparaisse comme une tentative de modélisation de ce problème : on se sert d'outils mathématiques, mais l'exposé ne doit pas se résumer à une suite de résultats théoriques.
- Une fois ce problème concret posé, il faut poser une/des problématique(s) qui va/vont permettre de structurer votre exposé et d'apporter des réponses, même partielles, au cours de votre présentation.
- Il faut ensuite écrire le plan de votre exposé au tableau, en indiquant les parties dans lesquelles vous allez présenter une simulation informatique. Cela permet de montrer au jury qu'il y a des simulations même si vous manquez finalement de temps pour les présenter. Vous n'êtes pas obligés de suivre l'ordre du texte. Essayez de ne pas reprendre les titres de parties du texte et d'avoir si possible un plan plus original que le classique "I- Hypothèses, II- Un premier modèle, III- Un autre modèle".
- Le cadre étant maintenant posé, vous pouvez introduire le modèle mathématique précis, les hypothèses et les notations. Bien sûr cela peut être fait avant, lorsque vous parlez du modèle concret au début de l'exposé notamment. C'est comme vous le sentez. Mais cette partie est capitale car c'est une épreuve de modélisation. N'hésitez pas à faire des schémas et à utiliser de la couleur, le jury appréciera fortement.
- Durant le reste de la présentation, il doit y avoir un aller-retour régulier entre les résultats mathématiques que vous énoncez et/ou démontrez, les simulations, la modélisation et les réponses aux problématiques. Vous devez expliquer en quoi les résultats permettent de répondre, partiellement ou totalement, au problème.
- Pensez à faire une conclusion et ne vous contentez pas d'un "voilà c'est terminé". Dans l'idéal vous résumez vos résultats et expliquez en quoi ils répondent au problème. Le jury appréciera que vous discutiez les hypothèses faites. Vous pouvez aussi proposer de modifier un peu le modèle pour le rendre plus réaliste, quitte à complexifier les outils mathématiques nécessaires. Typiquement, cela peut faire l'objet d'une simulation qui sera mise en valeur car originale.

3 Modélisation

Comme son nom l'indique il s'agit d'une épreuve de modélisation, ainsi votre exposé doit mettre en avant votre compréhension des hypothèses et résultats par rapport à un modèle concret. On doit sentir que les maths sont au service du problème concret.

- Partir d'un problème concret est très apprécié. Il arrive qu'un exemple explicite soit donné, mais ce n'est pas toujours le cas. Il faut alors essayer d'être inventif. Si un texte présente l'étude de différents mélanges de cartes, on peut se mettre dans la peau d'un gérant de casino qui souhaiterait faire mélanger ses cartes par une machine efficacement et sans être accusé de tricherie. D'autres exemples utiles : évolution d'une population sexuée (type humains ou

plantes selon le modèle) ou non (bactéries), ruine d'une assurance de compagnie, répulsion ou attraction entre composés chimiques, mouvement chaotique d'une particule...

- Au début de votre exposé, il faudra passer du problème concret à une formulation mathématique. Il faut donc introduire les notations utilisées et être en mesure d'expliquer les hypothèses faites par rapport au problème. Sont-elles naturelles ?
- Dans votre modèle, il y a de bonnes chances qu'il y ait au moins un paramètre, il faut en donner une interprétation par rapport au problème concret. Interprétation qui pourra être illustrée informatiquement au cours de l'exposé.
- Chaque résultat doit être relié au modèle étudié. Cette convergence presque sûre qu'est-ce qu'elle nous apporte en pratique ? Comment interpréter cette convergence en loi ? A quoi ça sert ?
- N'hésitez pas à discuter la pertinence des hypothèses ou à vous demander comment les affaiblir. Vous pouvez également proposer un modèle différent et expliquer, au moins qualitativement, les différences par rapport au modèle du texte.

4 Pédagogie, réactivité, attitude

Cette épreuve est aussi l'occasion de montrer votre pédagogie. Le jury veut vous voir dans la position d'un enseignant.

- Retournez-vous régulièrement pour regarder le jury et lui parler directement, c'est très important, surtout pour un futur professeur.
- Structurez bien votre tableau, délimitez des colonnes et respectez les, pour ne pas remplir le tableau trop vite. C'est aussi écrire le plus lisiblement possible, utiliser des mots clés, écrire "théorème", "preuve", souligner et/ou encadrer... Bref tout ce qui peut aider le jury à se raccrocher au tableau même s'il a décroché de votre exposé 5 minutes.
- Les maths doivent être au service du problème "concret", qui n'est pas un prétexte pour faire des maths. Avant d'énoncer un théorème, retournez-vous et motivez l'idée du résultat, en quoi il permet de faire avancer la réponse à votre problématique.
- N'hésitez pas à faire des schémas et dessins, en utilisant éventuellement des couleurs.
- Il faut avoir une attitude positive envers le jury. Même si vous êtes déçu par ce que vous avez fait et pensez avoir une mauvaise note, il ne faut pas faire sentir au jury que vous en avez marre d'être là, sinon c'est la catastrophe. D'autant plus qu'il arrive d'être très déçu mais d'avoir quand même une note correcte. Pendant la phase de questions, montrez-vous à l'écoute, réactifs. Évitez de rester muet trop longtemps, donnez vos pistes au jury, interagissez avec lui : il est bienveillant.
- N'essayez pas d'entuber le jury que ce soit pendant la phase de questions ou pendant votre exposé, il s'en rendra compte. Si dans la preuve que vous présentez il y a un argument que vous n'arrivez pas à écrire complètement rigoureusement, vous pouvez dire au jury que vous savez ce qu'il faut montrer, éventuellement vos pistes et vos difficultés. Soyez honnêtes, un enseignant ne doit pas arnaquer ses élèves. Évidemment, pour un argument très simple, le jury ne sera pas ravi, mais il aura au moins confiance en vous, et pourra revenir sur certains points lors de la phase de questions.
- Ne prenez pas le jury de haut, ne vous le mettez pas à dos.

- Comme votre tableau, votre discours doit être structuré. Posez des questions, rythmez vos phrases, faites des liens entre vos résultats ou vos parties, rappelez à l'oral les hypothèses qui vous permettent d'utiliser un théorème... N'oubliez pas que les membres du jury sont des humains, dont vous pouvez perdre l'attention, alors évitez de parler d'une voix monocorde, les blancs dans votre présentation et faites en sorte de les intéresser.

5 Illustrations informatiques

C'est une partie incontournable de l'épreuve sur laquelle il faut s'être bien préparé à l'avance. Même si vous n'êtes pas à l'aise, il faut proposer au moins une illustration informatique, les indispensables étant la loi des grands nombres et le théorème central limite.

- N'hésitez pas à parler de votre simulation avant de la lancer, de ce que vous avez choisi d'illustrer, de ce qu'on s'attend à observer sur la simulation. En quoi est-ce pertinent ? Cela vous permet de combler un éventuel blanc au moment de lancer la simulation et vous fait gagner des points de pédagogie par la même occasion. Vous pouvez aussi ménager un certain suspense.
- Vos graphiques doivent comporter un titre, une légende : le jury doit savoir ce que représentent les axes et chaque courbe tracée par exemple.
- Vous pouvez décider de reproduire une figure du texte, ou d'en proposer une pour illustrer rapidement un modèle : une figure commentée est bien souvent plus claire qu'un tableau d'hypothèses, même si elle ne le remplace pas, et vous permet de montrer au jury que vous avez bien compris la situation.
- S'il y a des paramètres dans votre modèle, faites les systématiquement varier dans vos simulations : les changements observés sont-ils logiques / attendus au vu de leur interprétation ? Dans vos programmes, ces paramètres doivent être des entrées pour pouvoir être changés rapidement.
- Pendant que votre programme tourne, ou que le vidéoprojecteur s'allume, expliquez votre démarche. Le jury appréciera que vous lui expliquiez que vous approchez une probabilité par une méthode de Monte-Carlo ou que vous avez choisi d'illustrer la convergence en loi par des histogrammes (ou par la convergence des fonctions de répartition empiriques). Si la simulation s'appuie sur un certain résultat mathématique, précisez-le, le jury ne peut pas toujours le deviner.
- Affichez votre programme, même s'il ne fonctionne pas et expliquez ce que vous avez voulu illustrer et comment vous vous y êtes pris. Il vaut mieux présenter un programme qui ne fonctionne pas que rien du tout !
- Pendant la préparation, sauvegardez sur la clé les différentes figures que vous avez obtenues. Il est préférable de faire tourner vos simulations devant le jury mais si vous avez un souci, vous pourrez toujours les utiliser en secours.

6 Contenu mathématique

Votre exposé doit évidemment comporter des résultats mathématiques. Vous pouvez faire la preuve de deux ou trois d'entre eux pendant votre exposé et admettre les autres, selon la longueur et la difficulté des preuves bien entendu.

- Le choix des résultats que vous prouvez est très important : il s'agit de vous mettre en valeur le plus possible. Choisissez les preuves sur lesquelles vous êtes le plus à l'aise et gardez en tête que plus vous apportez d'éléments nouveaux (absents du texte) et pertinents, mieux c'est. Donc n'hésitez pas à ajouter des détails aux preuves du texte, ce sera très fortement valorisé.
- Gardez en tête que le jury préfère voir une preuve avec de vrais arguments probabilistes ou statistiques plutôt qu'un simple calcul.
- Évitez de prouver un résultat classique, comme le lemme de Slutsky, le jury sait que vous avez accès aux livres. Préférez donc compléter les arguments et calculs des preuves du texte.
- Ne tombez pas dans le hors sujet.
- Il peut être intéressant de remarquer certaines propriétés absentes du texte (telle suite définit une chaîne de Markov ou une martingale par exemple). Il faut idéalement en faire quelque chose, une simulation ou un lien avec le modèle par exemple, sinon ça pourrait ne pas être valorisé et paraître un peu hors sujet.
- N'ayez pas peur du vocabulaire statistique, il est souvent possible d'incorporer une pointe de statistiques dans un texte orienté plutôt sur des probabilités, ce sera valorisé.
- Si vous connaissez la preuve de certains résultats du texte que vous ne présentez pas, n'hésitez pas à tendre des perches au jury, en donnant l'argument principal à l'oral. Peut-être qu'il vous posera la question et ce seront des points gagnés pour vous !

7 Stratégies et organisation des 4 heures de préparation

Il n'y a pas vraiment de meilleure organisation de votre temps de préparation, chacun fonctionne de manière différente. Le plus important est de s'entraîner plusieurs fois à l'avance, et en temps limité. Voici des conseils généraux qui n'engagent que nous.

- Regardez rapidement les deux textes et choisissez celui qui vous parle le plus, celui sur lequel vous pensez être le plus à l'aise. Si aucun des deux ne vous attire ou si les deux semblent vous convenir, pensez aux simulations et/ou aux questions du jury (par exemple un texte qui parle à un moment de chaînes de Markov amènera très certainement à des questions plus générales sur les chaînes de Markov). Certains textes sont très difficiles à illustrer numériquement (de manière pertinente).
- Une fois le choix fait, on peut parcourir rapidement le texte pour repérer les preuves à compléter et les résultats incontournables.
- On n'est évidemment pas obligé de traiter ou lire l'intégralité du texte. Il sera de toute manière impossible de tout présenter de façon détaillée en 35 minutes. On peut avoir une très bonne note en restant concentré sur une moitié du texte par exemple et en faisant des apports personnels pour compléter les preuves (c'est un fait vérifié). Par contre il faut veiller à ce que l'autre moitié du texte ne comporte pas de résultats trop importants, d'où l'intérêt de parcourir le texte à l'avance. Si la toute dernière page du texte présente une convergence presque sûre et un résultat de convergence en loi associé, ce n'est vraiment pas une bonne idée de passer cette partie, vous pourrez en faire vos illustrations informatiques !
- Passez environ une heure sur les simulations informatiques, selon votre rapidité à programmer bien sûr. Mais ne pas dépassez 1h30.
- Essayez de garder environ 30 minutes à la fin de votre temps de préparation pour organiser votre exposé : titre, problème concret, modélisation, problématique, plan, conclusion... Vous serez plus rassurés en sachant comment commencer et mener la présentation, plutôt que de vous lancer dans une tentative d'improvisation.

- Fixez un repère temporel pour calibrer la durée de votre exposé. Par exemple, à la fin de votre première partie, il doit vous rester 20 minutes pour faire le reste. Si vous prenez du retard pendant votre exposé, vous saurez qu'il faudra aller vite sur certains points, voire ne pas les présenter, pour finir ce que vous avez prévu de faire. Prévoyez un bout de partie que vous pourriez raccourcir, voire expliquer à l'oral, pour gagner du temps si la situation se présente.

8 Conseils généraux en vrac

- Normalement votre exposé doit tenir sur un tableau. Il se peut qu'il soit vraiment trop petit le jour J auquel cas il faut impérativement demander au jury l'autorisation pour effacer une partie de votre exposé.
- Évitez au maximum la paraphrase du texte, plus vous apportez de choses (pertinentes!) qui ne sont pas écrites dans le texte, plus le jury sera satisfait. L'originalité (même en petite quantité) capte l'attention du jury immédiatement qui a l'habitude de voir les mêmes textes.
- Ne tombez pas non plus dans le hors sujet.
- Numérotez vos feuilles.
- Structurez votre discours.
- Évitez les montres à aiguilles : faire des soustractions pendant que vous exposez, c'est compliqué! Les montres / bracelets connectés et les smartphones sont interdits le jour de l'oral.
- Regardez les suggestions à la fin du texte, ça peut vous donner des idées pour faire des apports personnels et des simulations. Et cela vous permet d'anticiper éventuellement certaines questions du jury.
- Si votre texte parle par exemple de chaînes de Markov ou de martingales, relisez rapidement les résultats principaux et leurs hypothèses car il y a de bonnes chances pour qu'un jury vous interroge dessus.
- Pendant votre exposé, faites comme si le jury ne connaissait pas le texte et donc ne faites pas référence au texte : c'est votre modèle et votre exposé!
- Revenez régulièrement au problème concret que vous avez introduit.
- Il peut être intéressant de lancer une illustration numérique dès le début pour présenter une situation, un jeu de données fourni avec le texte et poser le problème sur cet exemple pratique.
- La discussion des hypothèses et de leur pertinence est très valorisée. Veillez cependant à ne pas être virulent car l'auteur du texte peut être devant vous.
- Ne paniquez pas si un membre du jury vous pose une question qui vous semble triviale, ça arrive et ça ne veut pas dire qu'il croit que vous êtes nul.
- Ne négligez pas les statistiques, il est a priori possible d'avoir le choix entre deux textes orientés statistiques. De plus, même dans un texte orienté probabilités, vous pouvez souvent utiliser un résultat de convergence presque sûre et un raffinement en terme de convergence en loi pour parler d'estimateur, de consistance, d'asymptotique normalité, pour faire un intervalle de confiance illustré numériquement, voire pour introduire un test statistique.
- Tendez des perches au jury en mentionnant quelque chose qui n'est a priori pas clair à l'oral mais dont vous connaissez la réponse. Le jury vous interrogera peut-être là-dessus.
- Ne parlez pas de notions sur lesquelles vous n'êtes pas à l'aise, soyez honnêtes avec le jury. Vous avez le droit d'admettre un résultat (et choisir de l'illustrer numériquement plutôt par exemple), soyez clair dans ce cas.

- Vous pouvez être critique sur certains points que vous avez présentés, mais ne dénigrez pas votre travail devant le jury.
- N'improvisez pas (une preuve ou autre) au tableau pendant les 35 minutes, à moins d'être vraiment certain de ce que vous faites.
- Si vous faites des choix qui ne sont pas dans le texte, précisez-le clairement.
- Lorsque le jury vous indique qu'il vous reste 5 minutes par exemple, montrez lui que vous avez entendu sa remarque mais inutile de paniquer : vous avez le temps de finir d'énoncer votre théorème, d'expliquer ce qu'il représente dans votre modèle, de l'illustrer puis de conclure. A adapter au temps qu'il vous reste évidemment.
- Le jury vous évalue selon plusieurs critères : la modélisation, les simulations, le contenu mathématique, vos réponses aux questions et l'organisation de votre exposé et de votre discours. Tenez en compte dans votre présentation, il faut un équilibre entre les mathématiques, les simulations et la modélisation.